VERHANDELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

TWEE EN TWINTIGSTE DEEL.

MET PLATEN.

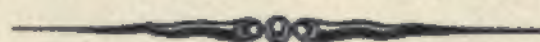
AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1883.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER - KRÖBER - BAKELS.

INHOUD

VAN HET

TWEE EN TWINTIGSTE DEEL.





VERGLEICHEND-ANATOMISCHE UNTERSUCHUNGEN

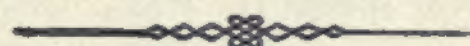
ÜBER DAS SOGENANNTE

PANKREAS DER CEPHALOPODEN

VON

Dr. W. J. VIGELIUS.

Gymnasiallehrer zu Dordrecht in Holland.



Vorstehende Untersuchungen sind bestimmt den ersten Beitrag zur Kenntniss eines Organes zu liefern, über dessen Bau wir im Grunde eigentlich noch nichts wissen. Die höchst spärlichen Angaben, welche die Literatur über die Anhänge der Lebergänge bei den Cephalopoden gewährt, sind so kurz und zugleich so oberflächlich, dass sie kaum Erwähnung verdienen.

Mit Uebergehung der älteren Notizen, welche von den Autoren BLAINVILLE *, GRANT † und H. MÜLLER § stammen, so wie auch der meinigen **, auf welche ich erst unten näher zurückzukommen gedenke, hebe ich an dieser Stelle nur

* BLAINVILLE, *Dictionnaire des sciences naturelles.* Paris et Strasbourg, 1816—1830. Tome XLIII.

† GRANT, On the Anatomy of Sepiola vulgaris. *Trans. Zool. Soc. London* 1. 1835.

§ H. MÜLLER, Bericht über einige im Herbst 1852 in Messina angestellte vergl. anat. Unters. *Zeitschr. f. w. Zoologie.* Bd. 4. 1853.

** W. J. VIGELIUS, Onderzoekingen over het excretorisch Systeem der Cephalopoden. Leiden 1879; und: über das Excretionssystem der Cephalopoden. *Niederl. Archiv f. Zool.* 1880.

die Angaben von BROCK hervor, weil diese trotz ihrer Kürze, einen besonderen Werth beanspruchen. In seinem „Versuche einer Phylogenie der dibranchiaten Cephalopoden" * finden wir einige interessante Mittheilungen über die eigenthümlichen Drüsenterritorien, welche bei den Octopoden an der Unterfläche der Leber auftreten, und wird weiter zum ersten Male auf eine vermuthliche Analogie zwischen diesen Drüsenmassen und den Pankreasanhängen bei den Decapoden hingewiesen.

Nicht nur unsere anatomischen sondern auch unsere physiologischen Kenntnisse von dem sogenannten Pankreas der Cephalopoden sind immerhin noch sehr dürftig zu nennen. Zu bedauern ist es jedenfalls, dass diesem Organe von Seiten der jüngeren Physiologen, welche sich während der letzten Jahre in so eingehender Weise mit Studien über die Verdauungsvorgänge bei niederen Thieren beschäftigt haben, fast gar keine Beachtung geschenkt worden ist.

Es ist dies um so auffallender, als bekanntlich ihr Hauptuntersuchungsgebiet die engsten Beziehungen zu unserm Thema erkennen lässt. In den schönen Arbeiten von LÉON FRÉDERICQ † und JOUSSET DE BELLESME § über das Lebersekret bei den Cephalopoden wird das sogenannte Pankreas ganz und gar ausser Acht gelassen.

Der einzige Autor, der es in den Kreis seiner Untersuchungen gezogen hat, ist KRUKENBERG **. Durch ihn wissen wir, dass die Lebergangsanhänge von Sepia officinalis und Eledone moschata im Gegensatz zur Leber, keine Enzyme liefern, sondern Sekrete welche von saurer Beschaffenheit sind. Dies ist aber auch alles was wir ihm in dieser Hinsicht verdanken, nähere Andeutungen über den Charakter dieser Säurebereitung fehlen.

Die Untersuchungen, welche ich hiermit der Oeffentlichkeit übergebe, wurden schon im Herbste des Jahres 1879 in der zoologischen Station zu Neapel angefangen. Dort hatte ich die günstige Gelegenheit frisches Material zu benutzen, konnte aber leider, anderer Beschäftigungen wegen, das Thema lange nicht vollständig ausarbeiten. Erst im vergangenen Winter war es mir vorbehalten, dasselbe zu beendigen, wozu ich durch die Zusendung vortrefflich conservirten Spiritusmaterials aus Neapel bereitwilligst unterstützt wurde. Herrn Dr. PAUL

---

* *Morph. Jahrb.* Bd. VI.

† LÉON FRÉDÉRICQ, *Archiv. Zool. expérim.* Tome 7, N°. 4. Idem, *Bulletin de l'Acad. de Belgique.* Tome 47. 1878.

§ JOUSSET DE BELLESME, *Compt. rend. Ac. d. Sc.* Paris. Tome 88, N°. 6 Idem, *Compt. rend. Ac. d. Sc.* Paris. Tome 88, N°. 9.

** KRUKENBERG, *Unt. physiol. Instit.* Heidelberg. Bd. 2, Heft 4.

Mayer, der mir in dieser Hinsicht in liebenswürdigster Weise zur Seite stand, sei an dieser Stelle mein wärmster Dank gebracht.

Vor Allem habe ich mein Augenmerk auf die Anatomie und Histologie des betreffenden Organes bei Decapoden und Octopoden gerichtet, zu einer eingehenden physiologischen Bearbeitung fehlten mir nicht nur das dazu geeignete Material, sondern auch die nöthigen Hülfsmittel; trotzdem bin ich in der glücklichen Lage am Ende dieser Schrift auf einige wenige physiologische Thatsachen hinweisen zu können, deren weitere Ausarbeitung ich nächstens der Oeffentlichkeit zu übergeben beabsichtige.

Sepia officinalis L.

Wie schon in einer früheren Arbeit * von mir auseinandergesetzt wurde, zerfällt der Harnsack von Sepia officinalis in zwei mit einander communicirende Abschnitte, nämlich in einen ventralen und einen dorsalen Theil, welche durch die grosse Körperhöhle (Visceropericardialhöhle) von einander getrennt sind. Der dorsale Abschnitt stellt einen geräumigen Sack dar, der sich weit nach hinten ausdehnt und dessen Wand vom Peritoneum gebildet wird.

Bauchwärts ist er durch die Wand der Visceropericardialhöhle, rückwärts durch die Schale, vorn durch die Leberkapsel begrenzt. Ausser dem spiralig gewundenen Blinddarm enthält er die beiden Lebergänge mit ihren eigenthümlichen Anhängen, deren specielle Betrachtung uns in den folgenden Seiten obliegt.

In Bezug auf den Verlauf der Lebergänge und die Entfaltung der ihnen aufsitzenden Organe, kann ich meine schon früher mitgetheilten Beobachtungen vollkommen bestätigen. Der Vollständigkeit wegen will ich dieselben hier noch einmal kürzlich vorführen.

Die Ductus hepatici entspringen aus dem hinteren Theile der Leber und durchbohren dann die vordere Wand der dorsalen Harnkammer, um ihren Weg nach hinten fortsusetzen.

So weit sie in dem Harnsack lagern, sind sie in ihrem ganzen Verlaufe, aber nur auf eine schmale Strecke ihrer Wandung, mit dem Peritoneum verbunden und ragen demnach frei in die Harnblase hinein.

Die Eintrittsstellen der Lebergänge liegen nicht genau symmetrisch zu beiden Seiten der Medianlinie.

Der rechte Gang erweitert sich von seinem Ursprunge ab allmählich, verläuft

---

* Über das Excretionssystem der Cephalopoden. *Niederl. Archiv f. Zoologie.* 1880.

nach hinten, umfasst den Pylorustheil des Darmes, der bekanntlich auch mit dem Magenblindsacke in Verbindung steht, und setzt sich dann direkt in den linken Gang fort, der wieder nach vorn verläuft und zur Leber geht. Beide Gänge durchsetzen die zugehörigen Leberlappen und bilden innerhalb der Lebermasse geräumige Lumina, welche sich weit nach vorn erstrecken. Die beiden Lebergänge entleeren ihr Sekret in den Magenblindsack durch eine einzelne grosse Oeffnung, welche an ihrer Vereinigungsstelle angetroffen wird. Sie sind, so weit sie die Harnblase durchsetzen, überall reichlich mit eigenthümlichen voluminösen Anhängen versehen, welche fast die ganze Höhle ausfüllen und, wie die Venenanhänge, in derselben frei flottiren. Ihr Lumen communicirt mittelst grosser Oeffnungen mit den sie tragenden Kanälen *. Ausserdem sind noch einige dieser Anhänge an die obere Seite des Blinddarms geheftet, welche, wie aus Injectionen klar hervorgeht, mit diesem Organe und demnach auch mit den Lebergängen in direkter Verbindung stehen.

Was die äussere Gestaltung dieser Anhänge betrifft, so scheinen sie beim ersten Anblick mancherlei Uebereinstimmungspunkte mit den excretorischen Venenanhängen darzubieten; bei näherer Betrachtung aber zeigt sich, dass sie durch ihre bedeutendere Grösse und besonders durch ihre traubenförmige Gestalt ganz auffallend von den letzteren abweichen. Die Traubenkörper sind manchmal kurz aber deutlich gestielt und hangen oft an der verschmälerten Basis mit einander zusammen.

Ihre Grösse und Ausbildung ist verschieden; in der Nähe des Blindsacks und an der oberen Seite der Lebergänge sind sie besonders stark entwickelt und ragen an diesen Stellen weit in den Harnsack hinein.

Schon mit blossem Auge, besser aber noch bei Loupenvergrösserung, ergibt sich, dass die Anhänge der Leberkanäle so wie auch diese selbst von einem sehr reich entfalteten Gefässnetze umspannt werden, dessen Natur ich mittelst an frischen Thieren angestellter einfacher und doppelter Injectionen aufzuklären im Stande bin †. Injicirt man das venöse Gefässsystem einer Sepia, (man thut

---

* Op. cit. Seite 11.

† Die von mir benutzten kaltflüssigen Injectionsmassen sind zweierlei: 1⁰. die mit Essigsäure schwach getällte 10 %ige mit Ammoniak bereitete Carminlösung, und 2⁰. das bekannte RICHARDSON's Blau. Die Injectionen wurden aus freier Hand mit Hülfe von fein und lang ausgezogenen Glasröhren angestellt. Nach Beendigung des Verfahrens wurden die Thiere sofort in sehr starken Alcohol (90 %) gebracht, worin sie längere Zeit verblieben. Sind die Sepien nicht zu gross, so kann man in dieser Weise zwar nicht vollständige, doch recht hübsche und jedenfalls ausreichende Injectionen erhalten.

in diesem Falle am Besten, die Kanüle in den linken Venacavaschenkel einzuführen) und verfolgt man den Verlauf der Vena mesenterica, welche in den vorderen Theil jenes Gefässes einmündet, so gewahrt man dass sie von ihrer Mündung an zunächst nach hinten läuft, sich dann medianwärts wendet um sich nachher an die Darmwindung zu heften. Auf der hinteren Strecke dieser Krümmung gibt sie einzelne Hauptaeste ab, welche sich in eine Anzahl feinerer Gefässe auflösen, die unter fortgesetzter Verzweigung die Lebergänge und deren Anhänge netzförmig umspannen. Einer dieser Hauptaeste lässt sich besonders leicht verfolgen; er begleitet den linken Lebergang, heftet sich an den Darm, verläuft nach hinten und löst sich schliesslich am Spiraldarm in eine Anzahl neuer Aeste auf; zuvor aber entsendet er einen Zweig für die schon oben erwähnten Anhänge, welche sich an der Dorsalseite des Blinddarms vorfinden.

Obige Injection lehrt weiter, dass ausser der Vena mesenterica auch die Vena genitalis sich an der Aufnahme des betreffenden venösen Gefässnetzes betheiligt; speciell sind es die feinen Gefässe, welche die dem Spiraldarm ventral aufliegenden Anhänge umspannen, die von ihr gesammelt werden.

Es versteht sich von selbst, dass ich zur Entscheidung der Frage nach der morphologischen und physiologischen Bedeutung dieses Gefässplexus in erster Instanz auf arterielle Injectionen angewiesen war. Zahlreiche in dieser Richtung von mir unternommene Versuche führten auf den folgenden Thatbestand. *

Die rechts verlaufende Aorta cephalica entsendet medianwärts zwei verhältnismässig feine Aeste, von denen der eine kurz näch ihrem Ursprunge aus dem Herzen, der andere etwas mehr nach vorn abgeht. Beide Arterien lassen einige neue Aeste hervorgehen, welche sich mit der Wand der Lebergänge verbinden und unter fortgesetzter Verästelung ebenfalls zur Bildung eines äusserst reich entfalteten Gefässnetzes Veranlassung geben, welches die Lebergänge so wie deren Anhänge überall bekleidet.

An der Bildung des betreffenden Gefässplexus betheiligen sich also nicht nur Venen, sondern auch Arterien. Fertigt man doppelte Injectionen mit verschiedenfarbigen Flüssigkeiten an und betrachtet man die nachher isolirten und gepressten Anhänge unter dem Mikroskope, so verhalten sich beiderlei Gefässbezirke nur in sofern ungleich, als der erstere im Allgemeinen ein viel feineres und dichteres Aussehen hat wie der letztere.

Ueber deren Verzweigungsmodus wollen wir erst dann berichten, wenn wir dem Baue der Anhänge nähere Beachtung geschenkt haben.

Wie schon oben bemerkt, hat jeder Anhang eine mehr oder weniger deutlich

---

* Ich injicirte immer vom Herzen aus.

ausgeprägte traubenförmige Gestalt. Er besteht aus einer Vereinigung von einer grösseren oder geringeren Anzahl verschiedengrosser Bläschen, welche alle mit einander in Verbindung stehen. (Fig. 1). Das Lumen des ganzen Anhanges communicirt durch eine grosse in der Regel kreisförmige Oeffnung mit dem ihn tragenden Lebergange.

Von diesen Thatsachen kann man sich wiederum mittelst Injectionen leicht überzeugen. Injicirt man einen Lebergang *, so werden die Bläschen mit der Injectionsmasse prall angefüllt.

Auf Querschnitten findet man in den meisten Fällen die Bläschen in unregelmässiger Weise um einen oder mehrere Centralräume angeordnet (Fig. 1), welche sich gegen die Basis des Anhanges zu einer gemeinsamen mit dem Lebergang communicirenden Höhle vereinigen. Jeder Anhang bildet demnach ein Verzweigungssystem blasenförmiger Hohlräume, deren Lumen vom Centrum gegen die Peripherie zu durchweg abnimmt.

Eine Regelmässigkeit in der Gestaltung der Centralhöhlen und der peripheren Bläschen wurde stets vermisst; letztere zeigen auf Querschnitten manchmal eine rundliche, manchmal eine gelappte unregelmässige Form, sind ihrer Grösse nach sehr verschieden und hangen gewöhnlich auf grössere oder kleinere Strecken mit einander zusammen.

Bevor wir zu der Beschreibung der feineren Texturverhältnisse unseres Organes übergehen, sei noch erwähnt dass die arteriell und venös injicirten Anhänge, in toto unter das Mikroskop gebracht, bezüglich der Gefässverzweigung in den Hauptpunkten dasselbe Verhalten darbieten.

In beiden Fällen bilden die feineren Gefässe, welche aus den divergirenden Aesten der in die Länge verlaufenden Hauptstämme ihren Ursprung nehmen, ein unregelmässiges Netzwerk, das die Bläschen in allen möglichen Richtungen umspannt (Fig. 2); wie bereits gesagt, sind jedoch die arteriellen Verzweigungen im Allgemeinen feiner und dichter als die venösen. An beiderlei Injectionspraeparaten, besonders aber an den venös injicirten Anhängen, konnte ich ausserdem mit Sicherheit nachweisen, dass die peripheren Gefässe bogenartig verlaufen und, bemerkenswerther Weise, den Bläschen in ihrer äusseren Begrenzung genau folgen. Dass ein inniger Zusammenhang zwischen diesen beiden Verzweigungssystemen existiren muss, lässt sich nach obiger Schilderung schon als sehr wahrscheinlich hinstellen; nach folgender Durchmusterung der Schnittpraeparate werden wir aber erst berechtigt sein, diesen Satz als bewiesen anzusehen.

---

* Die Unterbindung desselben ist ein äusserst schwieriges Verfahren und erfordert höchst sorgfältige Praeparation.

Der Anhang nebst seinen zahlreichen umspinnenden Gefässen wird auf der Aussenfläche von einem einschichtigen Cylinderepithel bekleidet, dessen grosse Zellen auf dem Durchschnitt entweder cylindrisch oder kubisch ausgebildet sind (Fig. 1, 2, 5, 6, 7). Von der Aussenfläche betrachtet, bildet es ein schönes Mosaik, das besonders an Osmiumpraeparaten sehr scharf hervortritt; die Zellen haben dann eine polygonale oder ovale Gestalt und sind scharf conturirt (Fig. 7). Jede Zelle umschliesst einen grossen rundlichen oder ovalen Kern, der durchweg die Mitte einnimmt und zahlreiche verschiedengrosse Kernkörperchen enthält. Nach aussen ist dieses Epithel von einer starken Cuticula bekleidet (Fig. 5).

Die innere Begrenzung des Anhanges wird von einer anderen Zellenschicht hergestellt, welche das Hohlräumesystem des Organes vollständig auskleidet. Auf die Beschaffenheit derselben komme ich erst unten in ausführlicher Weise zurück; ich erwähne sie hier nur deswegen, weil wir der Kenntniss ihrer Lage zum Verständnis der Gefässverzweigung bedürfen.

Mit Ausnahme derjenigen Stellen, wo das äussere Cylinderepithel zur Bekleidung einer grösseren hervorspringenden Arterie oder Vene dient, wird es überall von der inneren Schicht bekleidet. (Fig. 1, 4, 5).

Jeder Quer-oder Längschnitt vermag dieses einfache Verhalten zur Anschauung zu bringen, zeigt aber ausserdem, dass die beiden Zellenschichten da, wo sie zusammengehen, fast überall von einander durch einen Gefässbogen getrennt sind, dessen Wandung unmittelbar von den Schichten bedeckt wird. Besonders an Osmiumpraeparaten sind diese Verhältnisse sehr schön zu sehen. (Fig. 4, 5, 6).

An der Wandbildung des Anhanges betheiligen sich folglich dreierlei Bestandtheile nämlich 1^0 ein äusseres Epithel, 2^0 eine innere Zellenschicht und 3^0 Gefässe, welche, so zu sagen, sich zwischen den beiden ersteren einschieben. (Fig. 1).

Will man über den Charakter der letzteren ins Klare kommen, so genügt es die venös und arteriell injicirten Anhänge in Schnitte zu zerlegen (Fig. 3, 4). Es zeigt sich dann als Regel, dass in beiden Fällen die betreffenden Gefässbogen überall mit der Injectionsmasse ausgefüllt sind. Hieraus geht also mit Bestimmtheit hervor, dass gerade zwischen den beiden Zellenschichten die arteriellen Bahnen mit den venösen zusammenfliessen, dass somit die dort befindlichen Gefässe nichts weiter als Capillaren sind, welche die Verbindung zwischen dem venösen und arteriellen Systeme herstellen. Abgesehen von dieser Schlussfolgerung kann man sich fast auf jedem Querschnitte von der Thatsache überzeugen, dass die feineren Gefässe von den stärkeren den Anhang umspannenden Aesten ihren Ursprung nehmen.

Dass diese Verhältnisse sich mit meinen früheren Angaben über den Ver-

zweigungsmodus jener Gefässe vollkommen decken, braucht wohl kaum noch besonders hervorgehoben zu werden.

Die Capillaren sind in überaus zahlreicher Menge vorhanden, kreuzen sich in allen möglichen Richtungen und bilden in dieser Weise ein dichtes Gefässnetz, welches die beiden Zellenschichten fast überall von einander trennt. Diese Behauptung gründet sich vor Allem darauf, dass man deren auf jedem wenn auch ganz beliebig geführten Schnitt, immer eine bedeutende Anzahl zu Gesichte bekommt (Fig. 3, 4).

Das Lumen der bogenförmigen Capillaren zeigt sich je nach den Stellen sehr verschieden; es sind im Allgemeinen feine Gefässe von wechselndem Durchmesser, in denen manchmal sinusartige Erweiterungen auftreten (Fig. 6), welche als die Vereinigungsstellen zweier oder mehrerer Gefässe zu betrachten sind. Die Wand der Capillaren wird von einer zarthäutigen Membran gebildet, welche gegenüber den aufliegenden Zellenschichten scharf hervortritt. Das Gefässlumen enthält überall runde, ovale oder stabförmige Körperchen, welche ich als Blutzellen zu betrachten geneigt bin; man findet sie in den sinusartigen Erweiterungen oft in grosser Menge angehäuft. Besonders an Hämatoxylinpraeparaten sind diese vermutheten Blutzellen sehr leicht zu erkennen, da sie zu diesem Farbstoff eine grosse Affinität besitzen und daher immer eine sehr dunkele Farbe annehmen.

Der letzte Hauptbestandtheil des Anhanges, dem wir noch eine besondere Besprechung zu widmen haben, dürfte, wenigstens in Bezug auf die physiologische Bedeutung des Organes, wohl zugleich als der wichtigste gelten. Es ist dies die schon oben erwähnte innere Zellenschicht, welche, wie bereits gesagt, den ganzen Hohlraum des Anhanges auskleidet.

Betrachtet man die Zellen, welche diese Schicht aufbauen, unter starken Vergrösserungen, so stellt sich als sicher heraus, dass sie von drüsiger Natur sind und dass ihnen eine sekretorische Rolle zukommt.

Abgesehen von ihrem morphologischen Charakter, sind wir überhaupt zu jener Annahme vollkommen berechtigt, wenn wir ihr Verhalten zu den umspinnenden Capillaren, vor Allem aber den Bau des ganzen Anhanges näher ins Auge fassen. Alles weist darauf hin dass das betreffende Organ eine Art acinöser Drüse vorstellt und dass aus dem Inhalte der Capillaren Absonderungsstoffe entnommen werden, welche sich in den Drüsensäckchen ansammeln um von dort in den Lebergang entleert zu werden und sich dem Lebersekret beizumischen.

Gehen wir jetzt zur näheren Betrachtung des Drüsenlagers über. Dasselbe ist einschichtig und besteht in normalen Verhältnissen aus grossen Zellen, welche

in den meisten Fällen (Fig. 6) eine langgestreckte Gestalt haben, manchmal aber auch gegen ihr freies Ende zu etwas verbreitert sind.

Jede Zelle enthält einen grossen rundlichen ungefähr centrisch gelegenen Kern, der wiederum eine Anzahl verschiedengrosser Kernkörperchen birgt (Fig. 5, 6). Leider war ich nicht in der Lage die Drüsenzellen im frischen Zustande zu studiren; trotzdem aber glaube ich dass meine zahlreichen Schnittpraeparate, welche von trefflich conservirtem Material stammen, in den wesentlichsten Hauptpunkten Auskunft zu geben im Stande sind.

Durchweg lässt sich in dem Protoplasma der Drüsenzellen eine deutliche Längsstreifung erkennen. Sie sind aber nur selten ganz damit ausgefüllt; in den meisten Fällen enthält jede Zelle ausserdem eine (seltener zwei) kleinere oder grössere blasenförmige Höhle, welche durch ihr helleres Vorkommen leicht auffält. Letztere glaube ich als Vacuolen, welche der Ansammlung flüssiger Absonderungsproducte aus dem Blute dienen, ansprechen zu dürfen (Fig. 5). Sie sind entweder rund oder oval; die grösseren unter ihnen liegen oft dem freien Ende der Zelle zugekehrt.

Eigenthümlich ist weiter das vielfache Auftreten von rundlichen Körperchen in den Drüsenzellen, welche bald vereinzelt bald zu mehreren beisammen liegen (Fig. 5). Nicht selten fand ich sie im Centrum der Vacuolen gelagert. Es sei hier aber gleich betont, dass diese Gebilde nicht ausschliesslich der Drüsenschicht angehören, sondern auch bisweilen in dem äusseren Cylinderepithel auftreten können (Fig 5). Ueber ihre Genese wage ich es nicht ein sicheres Urtheil abzugeben; dennoch kann ich nicht umhin hervorzuheben, dass sie eine grosse Aehnlichkeit mit den in den Capillaren vorhandenen Blutzellen darbieten und dass sie sich gegenüber Tinctionsmitteln, wie Haematoxylin, GRENACHER's säure Carminlösing u. s. w. ganz genau wie diese verhalten. Nähere Untersuchungen müssen indessen hierüber entscheiden.

Die innere Drüsenzellenschicht ist nicht überall gleichmässig entwickelt, sondern unterliegt mannigfaltigen tiefeingreifenden Modificationen, welche sogar schliesslich zu ihrem völligen Untergange führen können. Bei normaler Entwicklung des betreffenden Zellenlagers (Fig. 6), liegen die noch ganz intacten cylindrischen Elemente regelmässig neben einander angeordnet. Sie besitzen nahezu dieselben Dimensionen und werden an ihrem inneren freien Theile von einer deutlichen ununterbrochenen Membran begrenzt. In den Veränderungen, welche nun die Drüsenzellen nach und nach erleiden, können wir zahlreiche Differenzirungsstufen unterscheiden, welche oft an ein und demselben Schnittpraeparat Schritt für Schritt zu verfolgen sind. Ueber die wichtigsten unter denselben habe ich Folgendes zu berichten.

Ein erstes Abweichen von dem oben geschilderten Verhalten gibt sich schon in einer unregelmässigeren Gestaltung der Drüsenzellen kund; dieselben haben unter sich eine verschiedene Grösse angenommen und bilden gruppenweise abwechselnde Ausbuchtungen und Vertiefungen, welche dem Hohlraum des Bläschens manchmal eine sternförmige Gestalt verleihen.

Das nächstfolgende Stadium schliesst sich dem vorhergehenden enge an. Es ist dadurch ausgezeichnet, dass die schon stark metamorphosirten Zellen eine beträchtlichere Grösse erreichen, weit nach innen hervorragen und wegen der starken Streckung ein höchst unregelmässiges Aussehen darbieten (Fig. 5). Ist dieser Zustand durchlaufen, so tritt allmählich die eigentliche Degeneration ein. Diese lässt sich zuerst dadurch erkennen, dass die Zellen an der inneren Fläche nach und nach ihre scharfe Contur verlieren, bis sie endlich die in den früheren Stadien noch vorhandene Cuticularmembran ganz eingebüsst haben (Fig. 8).

Während diese Differenzirungen in der äusseren Begrenzung vor sich gehen, fangen auch die Zellen an unter einander zu confluiren, eine Erscheinung welche ohne Zweifel durch das Platzen der Zellmembranen hervorgerufen wird (Fig. 9). Die Reste derselben liegen dann zwischen dem körnigen Protoplasma zerstreut und zeigen in den meisten Fällen eine mehr oder weniger starke Krümmung. In Folge der gesteigerten Vacuolenbildung zeigt sich das Protoplasma der verwischten Zellen manchmal blasig aufgetrieben.

Letztere Stadien führen nun allmählich zur völligen Zerstörung der Zellen. Der Inhalt derselben tritt, zum grössten Theile wenigstens, als eine feinkörnige Masse aus und die zerstreuten Zellkerne nebst den Resten der geplatzten Zellmembranen wandern passiv mit.

In diesem Zustande können die entarteten Zellen die verschiedensten Formen darbieten *, ja nicht selten bilden die ausgetretenen Protoplasmakörper ganze

---

* Es ist hier am Platze in der Kürze auf ein zuerst von mir verwendetes Färbemittel hinzuweisen, das in den Fällen, wo es sich um eine scharfe Tingirung von Zellenconturen handelt, manchmal ausgezeichnete Dienste leistet. Es ist dies eine Tinctur, welche dem bei unsern Apothekern als Lacca Viennense bekannten Farbstoff entstammt. Herr Dr. BRUNNENGRÄBER aus Rostock ist so freundlich gewesen mir mitzutheilen dass dieser Farbstoff in Deutschland unter dem Namen Amarantroth oder Wienerroth im Handel vorkommt.

Die Tinctur wird in der Weise bereitet, dass der fein zerriebene Farbstoff mit 90 % igem. Alcohol — auf 1 Gramm kommen 10 c. c. Alcohol — mehrere Tage in Berührung gelassen wird. Nach folgender Filtration erhält man eine etwa weinrothe klare Flüssigkeit, welche sofort zur Verwendung geeignet ist. Das Anwenden von schwächerem Alcohol z. B. von 70 pCt. ist aus verschiedenen Gründen abzurathen. Die zu tingirenden Objecte müssen vorher in Alc. von

Klumpen, welche sich in der Höhle des Bläschens ansammeln (Fig. 10, 11). Sind die geplatzten Zellmembranen in grosser Zahl vorhanden, so bilden sie gewöhnlich gleichsam ein grobes Maschenwerk, das die Lücken zwischen den Protoplasmamassen und somit auch das Lumen des Bläschens ganz oder theilweise ausfüllt (Fig. 1).

Nach den oben erörterten Thatsachen liegt die Annahme auf der Hand, dass der allmähliche Untergang der Drüsenzellen nicht nur von der Sekretbildung abhängig ist, sondern vielmehr als deren nothwendige Folge eintritt.

Auch unterliegt is kaum einem Bedenken, dass nach Beendigung des Zerstörungsprocesses wiederum eine Regeneration der Zellen stattfindet.

Wahrscheinlich betheiligt sich hieran die Protoplasmaschicht, welche den Capillaren unmittelbar aufliegt. Sichere Notizen stehen mir aber in dieser Beziehung nicht zur Verfügung.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die Sekretbildung an abwechselnden Stellen vor sich gehen muss, da immer nur bestimmte Zellengruppen zu gleicher Zeit im Zerfall begriffen sind.

Rossia macrosoma FÉR. D'ORB. und *Sepiola Rondeletii* SCHNEID.

Rossia und Sepiola verhalten sich in Bezug auf die Lage, die äussere Gestaltung und den Bau der Lebergangsanhänge so sehr ähnlich, dass wir nicht nöthig haben beide Genera von einander getrennt zu behandeln.

Was die makroskopischen Détails betrifft, so bieten die Lagerungsverhältnisse der Lebergänge eine weitgehende Uebereinstimmung mit dem bei Sepia erörterten Thatbestand. Wir brauchen also bei diesem Puncte uns nicht lange aufzuhalten. Erstens ist zu erwähnen dass in Folge der geringen Ausdehnung,

---

90 pCt. gehärtet sein und werden nach Beendigung des Verfahrens so lange damit ausgezogen, bis der Alcohol ganz farblos erscheint Zur Färbung grösserer Gegenstände wie z. B. der oben beschriebenen Drüsenanhänge von Sepia des Amphioxus u. s. w. braucht man mehrere Tage; bei Schnitten ist dagegen die Färbung schon in wenigen Minuten geschehen. Wie bereits gesagt, färbt die Tinctur nur das Protoplasma der Zellen und besonders deren Conturen. Die Färbung ist meistens schwach, zugleich aber, falls das Praeparat gut conservirt ist, sehr präcis. Weitere Versuche über die Verwendbarkeit dieser Lacktinctur als allgemein nützliches Färbemittel müssen indessen noch von mir angestellt werden.

welche der obere Harnsackabschnitt nach hinten zu besitzt, die verhältnismässig weiten Lebergänge relativ viel kürzer sind als bei Sepia. Sie umfassen auch hier den Anfangstheil des Darmes und entleeren ihren Inhalt durch eine einzige Oeffnung in den links vom Magen gelegenen Blinddarm.

Beide Kanäle sind genau wie bei Sepia in ihrem ganzen Verlaufe mit drüsigen Anhängen besetzt, welche in die Harnblase hineinragen und in derselben frei flottiren. An dem Blinddarm, der hier nicht frei in dem Harnsack liegt sondern mit dessen hinterer Wand fest verbunden ist, wurden dagegen niemals Anhänge angetroffen.

Leider fehlten mir Zeit und Gelegenheit an frischen Exemplaren von Rossia und Sepiola Gefässinjectionen anzustellen. Trotzdem kann ich constatiren, dass auch hier die Lebergänge so wie deren Anhänge von einem reich entfalteten Gefässnetze umspannt werden und dass die Aorta cephalica kurz nach ihrem Ursprunge aus dem Herzen einige Zweige entsendet, welche mit dem ersteren in Verbindung stehen und sich an dessen Bildung betheiligen.

Auch ist es mir gelungen die Vena mesenterica bis zu ihrer Auflösung an dem Darme zu verfolgen. Aus diesen so wie auch aus den noch folgenden Thatsachen dürfen wir also mit Sicherheit schliessen, dass der betreffende Gefässplexus denselben Charakter wie bei Sepia beibehält.

Die Lebergangsanhänge von Rossia und Sepiola (Fig. 12) sind nicht traubenförmig ausgebildet sondern haben das Aussehen blindgeschlossener cylindrischer Röhrchen, welche in den meisten Fällen verzweigt sind und deren Hohlraum durch eine grössere oder kleinere Oeffnung mit dem sie tragenden Ductus communicirt.

Ueber den histologischen Bau dieser Organe können wir uns ebenfalls sehr kurz fassen, da sie in den wesentlichsten Puncten mit den oben bei Sepia geschilderten Verhältnissen übereinstimmen. An deren Begrenzung betheiligen sich wiederum 1⁰. ein äusseres Epithel, 2⁰. eine innere Drüsenzellenschicht und 3⁰. Capillaren, welche sich zwischen die beiden ersteren einschieben (Fig. 13, 14, 15, 16).

Das äussere Epithel bekleidet den ganzen Anhang und setzt sich sogar auf den zugehörigen Lebergang fort. Da wo es stärkere Gefässe umgibt, bleibt, wie meine Schnitte lehren, nicht selten ein grösserer oder geringerer Raum zwischen ihm und der Gefässwand übrig. Die Fig. 13 bringt dies klar zur Anschauung.

In schönster Weise konnte ich weiter den Verlauf der bogenförmigen Capillaren studiren, welche fast auf jedem Schnitt zu Tage treten und ähnliche Körperchen (Blutzellen?) wie bei Sepia enthalten. Dass sie aus stärkeren die An-

hänge umspinnenden Gefässen ihren Ursprung nehmen, davon kann man sich gleichfalls leicht überzeugen (Fig. 13).

Auch die innere Drüsenzellenschicht unterliegt ähnlichen Veränderungen wie bei Sepia. Manchmal fand ich auf Querschnitten die kernführenden Zellen regelmässig neben einander geordnet (Fig. 15), manchmal aber auch zeigen sie eine verschiedene Grösse und sind dann oft sehr unregelmässig gestaltet. Im letzteren Falle ist die innere Begrenzung des Anhanges wellenartig gebogen (Fig. 16), oder es kommt zur Bildung von abwechselnden Ausbuchtungen (Längsfalten) und Vertiefungen, welche dem Hohlraum des Anhanges eine deutlich ausgeprägte Sternform verleihen (Fig. 14).

In Betreff der Degeneration der Drüsenzellen lassen sich genau dieselben Stadien wie bei Sepia verfolgen. Ist dieser Process sehr weit fortgeschritten, so wird fast das ganze Lumen des Anhanges von einem unregelmässig gestalteten weitmaschigen Netzwerke ausgefüllt, das aus Ueberresten von Zellmembranen mit dazwischen zerstreuten Kernen und Protoplasmabändern besteht (Fig. 17).

Für nähere Andeutungen verweise ich auf den bei Sepia gegebenen Text so wie auf die unten stehenden Figuren.

Loligo vulgaris Lam.

Schon an einem früheren Orte habe ich gezeigt, dass der dorsale Harnsackabschnitt bei Loligo in Betreff seiner Lage von dem der oben besprochenen Myopsiden abweicht, weil er sich nicht nach hinten sondern nach vorn erstreckt. Er liegt rückwärts von dem Tintenbeutel, hat eine etwa ovale Gestalt und ist wie bei Sepia vorn durch die Leberkapsel begrenzt *. Sein oberer Theil wird fast ganz von den zwei breiten und dicken Lebergängen eingenommen, welche dicht neben einander aus dem hinteren oberen Theile der Leber ihren Ursprung nehmen und dann nach hinten verlaufen. Diese Kanäle umfassen auch hier den Pylorustheil des Darmes und vereinigen sich schiesslich zu einem weiten gemeinsamen Gange, der in den vorderen Theil des mächtig entwickelten in der Visceropericardialhöhle gelegenen Blindsacks einmündet. Die Lebergänge sind, wie bei Sepia, an die dorsale Harnsackwand geheftet, verlaufen paralell und nehmen gegen den aboralen Körperpol an Dicke zu. Der ganze

* Op. cit. Fig. 6.

Ausfuhrapparat der Lebersekrete entbehrt bei Loligo der selbständigen Anhänge, welche wir bei Sepia, Sepiola und Rossia angetroffen haben, besitzt dafür aber eine sehr stark verdickte drüsige Wand *, welche dem Anscheine nach der spongiösen Venacavawand ähnlich ist. Schneidet man die Lebergänge auf, so gewährt man im Innern derselben zahlreiche grössere und kleinere Oeffnungen, welche überall mit dem drüsigen Wandgewebe in Verbindung stehen.

Die grosse Anzahl frischer Loligoexemplare, welche mir während meines Aufenthaltes in Neapel zur Verfügung stand, setzte mich in die Lage zahlreiche Gefässinjectionen anzustellen und in dieser Weise dem Charakter der Gefässbezirke, welche auch hier die Lebergänge so wie deren gemeinsamen Abschnitt begleiten, nähere Beachtung zu schenken.

Diese Versuche führten zu dem Resultat dass der betreffende Gefässplexus, wie bei Sepia, sowohl mit dem arteriellen wie mit dem venösen Gefässsysteme in Verbindung steht. Es gehen auch hier von der Aorta cephalica einige wenige medianwärts verlaufende Arterien ab, welche sich über die Lebergänge verzweigen und deren zahlreiche feine Verästelungen überall in das drüsige Gewebe eindringen. Ob sich an der Bildung dieses Netzes noch Arterien anderen Ursprungs betheiligen, wage ich nicht zu entscheiden. Sicher ist aber dass jeder Lebergang ausserdem von einer mit drüsigen Wandungen versehenen Vene begleitet wird, welche in den vorderen Theil des zugehörigen Venacavaschenkels einmündet. Diese Lebergangsvenen senden wiederum verschiedene Aeste ab, welche schliesslich zur Bildung eines äusserst feinen dendritisch verzweigten Gefässnetzes Veranlassung geben, das sich dem arteriellen Netze entsprechend in die Wand der Lebergänge senkt.

Beim Aufschneiden eines injicirten Leberkanals ergibt sich, dass diese Netze bis zu dessen Innenfläche vordringen und demnach die ganze Wand durchsetzen. Sie bilden ein reich entwickeltes Capillarsystem, das, wie sich unten zeigen wird, dem bei Sepia angetroffenen vollkommen analog ist (Fig. 19).

Wenden wir uns jetzt zu den mikroskopischen Verhältnissen. Um ein deutliches Bild von dem Verlaufe der Leberkanäle so wie von der Gestaltung ihrer Wandungen zu gewinnen, wurde der ganze Ausfuhrapparat sorgfältig von den umgebenden Organen abpraeparirt und nachher in eine Schnittserie zerlegt.

Aus dieser ging erstens hervor dass das Lumen der Lebergänge an deren Ursprungsstellen verhältnismässig eng ist und stark vorspringende Längsfalten enthält, dass es sich dagegen nach hinten zu mehr und mehr erweitert und zu-

---

* Vergl. Brock. Versuch einer Phylogenie der dibranchiaten Cephalopoden. *Morph. Jahrb.* Bd. VI.

gleich eine unregelmässige Gestalt annimmt. Anfangs verlaufen die Kanäle ungefähr in der Mitte ihrer drüsigen Wandungen, später aber, nämlich da wo sie den Darm einfassen, rücken sie mehr bauchwärts und vereinigen sich schliesslich zu einem gemeinsamen Gange, der ventralwärts von dem Darme gelegen ist und bekanntlich in den vorderen Theil des Blindsacks einmündet. Ihr Lumen fand ich stets von einer schwach gelblichen körnigen Masse ausgefüllt.

Es wurde schon oben betont dass die Wand des Ausfuhrapparates im Allgemeinen stark verdickt ist und über ihre ganze Länge ein drüsiges Aussehen hat. Nur an den Ursprungsstellen der Leberkanäle entbehrt sie desselben und wird hier von lockerem Bindegewebe mit eingestreuten Muskelfasern hergestellt.

Die Aussenfläche der Lebergangswand ist unregelmässig gestaltet und bildet zahlreiche Läppchen, welche durch seichte oder tiefe Einschnürungen von einander getrennt sind; sie wird von einem einschichtigen Cylinderepithel bekleidet, dessen polyedrische oder längliche Zellen runde oder ovale Kerne mit zahlreichen verschiedengrossen Kernkörperchen enthalten. Nach aussen ist diese Zellenschicht von einer deutlichen Cuticula begrenzt.

Die drüsige Lebergangswand, zu deren Erläuterung die Fig. 18 dienen möge, wird überall von einem Verzweigungssysteme kleinerer und grösserer Höhlen durchsetzt, welche sich bis zur Peripherie erstrecken und nicht nur unter einander sondern auch mit dem zugehörigen Lebergange in offener Verbindung stehen. Von diesem Verhalten kann man sich mittelst Injectionen leicht überzeugen. Die Höhlen, welche ich ihrer Function nach als „Drüsenfollikeln" bezeichne, bieten auf dem Durchschnitt die verschiedensten Formen und Dimensionen dar. Sie werden von einer einfachen Drüsenzellenschicht ausgekleidet, welche sich auf die innere Lebergangswand fortsetzt und demnach das Innere des ganzen Apparates begrenzt (Fig. 18). Es sei hier schon im Voraus bemerkt, dass sie der bei Sepia angetroffenen vollkommen analog ist und ähnlichen Modificationen wie dort unterliegt.

Zwischen den Schichten der sich berührenden Drüsenfollikeln verlaufen fast überall zarte Gefässe, welche wiederum die schon öfters erwähnten vermuthlichen Blutzellen enthalten.

Letztere haben in den meisten Fällen eine runde oder ovale Gestalt, sind aber auch manchmal spindel- oder stabförmig ausgebildet und liegen dann der Gefässwand dicht an.

Schnitte durch die venös und arteriell injicirten Lebergangswandungen bringen den Verlauf dieser Gefässe in schönster Weise zur Anschauung, zeigen aber zugleich dass sie in beiden Fällen vollständig mit den Injectionsmassen angefüllt sind (Fig. 19). Demnach sind wir auch hier zur Annahme eines Capillar-

systemes, das die Drüsenfollikeln oder genauer die jene auskleidenden Zellenschichten überall umspannt, vollkommen berechtigt. Im Anschluss hieran konnte ich auch mit Sicherheit nachweisen, dass die betreffenden Gefässe aus den stärkeren Venen- und Arterienaesten, welche die Wand in verschiedenen Richtungen durchlaufen, ihren Ursprung nehmen.

Zum Schlusse möge dann noch Einiges über die Beschaffenheit der inneren Drüsenzellenschicht hervorgehoben werden. Eine regelmässige Anordnung derselben, wie ich diese bei Sepia so oft antraf, liess sich hier nur selten erkennen; fast überall fand ich die Zellen unregelmässig neben einander gelagert und konnte ich auch die bei Sepia erwähnten Degenerationsstadien in beliebiger Weise verfolgen.

Die Drüsenzellen, in welchen die Vacuolenbildung sehr allgemein verbreitet ist, bieten im Bezug auf Gestalt und Grösse die mannigfaltigsten Verhältnisse dar. Manchmal sind sie breit und an ihrer freien Oberfläche abgerundet, manchmal sind sie eckig, biconcav oder cylindrisch gestaltet (Fig. 20).

Auch zeigen sie gar nicht selten am freien Ende flaschenförmige Erweiterungen, welche sich wie Blasen abzuschnüren scheinen. Ist die Zellenschicht regelmässig entwickelt, so erscheint sie oft wellenartig gebogen, in welchem Falle die abwechselnden Ausbuchtungen und Vertiefungen auch in den umspinnenden Capillaren ihren Ausdruck finden (Fig. 20 *c.*).

Den übrigen Myopsiden entsprechend, führen die Drüsenzellen bei Loligo grosse ovale Kerne, welche scharf conturirt sind und bald dem einen bald dem anderen Pole derselben anliegen. Die Kerne bergen zahlreiche Kernkörperchen, unter denen gewöhnlich einige wenige die übrigen an Grösse übertreffen. Mit der Auflösung der Zellmembranen tritt auch hier wiederum die Degeneration der Zellen ein.

Es überhebt mich der Nothwendigkeit die verschiedenen Stadien, welche schliesslich zu ihrem Untergange führen, aufzuzählen, weil diese in den hauptsächlichsten Puncten mit den schon bekannten Verhältnissen übereinstimmen. (Fig. 21).

Nur möge hervorgehoben werden, dass das Maschenwerk der Zellmembranen hier nicht nur besonders stark ausgebildet ist sondern dass es auch eine sehr allgemeine Verbreitung hat und die grössere Zahl der Drüsenfollikeln theilweise oder ganz ausfüllt. Die Räume zwischen den Maschen werden von derselben körnigen Masse eingenommen, welche ich überall in den Leberkanälen anzutreffen vermochte; ausser zahlreichen Zellkernen fand ich auch zwischen denselben hier und da grosse kernführende Drüsenzellen, welche vollkommen intact geblieben waren.

Vergleichen wir nach dieser Durchmusterung die drüsige Lebergangswand bei

Loligo mit den gesonderten Lebergangsanhängen bei Sepia, Sepiola u. Rossia in Bezug auf ihren Bau, so stellt sich als sicher heraus, dass beiderlei Organe vollkommen analoge Bildungen darstellen. Die Anhänge werden hier durch die Drüsenfollikeln vertreten und der einzige Hauptunterschied zwischen Beiden ist eigentlich nur darin gelegen dass erstere, anstatt gesondert aufzutreten, hier sich unmittelbar begrenzen und in dieser Weise eine drüsige Wand aufbauen.

Octopoden.

Bei allen von mir untersuchten Octopoden (Octopus vulgaris, Octopus tetracirrus, Octopus macropus, Eledone Aldrovandi, Eledone moschata (?) und Tremoctopus violaceus) sind die Lebergänge bindegewebig entwickelt und entbehren der gesonderten Anhänge oder der drüsigen Wandungen, welche bei den Myopsiden so allgemein verbreitet sind.

Anstatt dieser Organe finden wir aber ausnahmslos am hinteren Leberabschnitt die Ursprungsstellen der Ausfuhrgänge von einer eigenthümlichen drüsigen Zone umgeben, welche zwar der Lebermasse angehört, sich aber von dieser durch ihre Farbe mehr oder weniger deutlich unterscheidet (Fig. 22, 23).

Blainville ist der erste gewesen, der in seinem „Dictionnaire" * die Aufmerksamkeit auf diese Zone gelenkt hat; seine Angaben sind aber leider eben so sparsam und oberflächlich wie diejenigen, welche uns später von H. Müller † über dieses Thema hinterlassen sind.

Ein wesentlicher Fortschritt gegen Letzteren lässt sich erst in der schon erwähnten Arbeit von Brock § erkennen, in welcher nicht nur die Lage und die Eigenthümlichkeiten des in Rede stehenden Lebertheiles Berücksichtigung finden sondern auch die Wahrscheinlichkeit ausgesprochen wird, es sei die betreffende Zone als das Analogon der Lebergangsanhänge bei den Decapoden zu betrachten.

Ich habe mich vor Allem bestrebt, die Wahrheit dieses Ausspruchs näher zu prüfen. Zu diesem Zwecke wurde eine Anzahl von Schnittserien durch den aboralen Leberabschnitt der mir zu Gebote stehenden Octopoden angefertigt, welche als Resultat ergeben haben dass die Meinung von Brock, so weit die histologische Struktur ein sicheres Urtheil gestattet, die richtige ist und dass also wirklich die von ihm genannten „Drüsenterritorien" als Ersatz der fehlenden Anhänge eintreten.

---

* Op. cit.

† Op. cit.

§ Op. cit.

A 3

Bevor wir zur Betrachtung des feineren Baues übergehen, dürfte es nicht überflüssig sein Einiges über die grob-anatomischen Verhältnisse des Organes vorauszuschicken. Diese liegen bei den verschiedenen Gattungen so ziemlich ähnlich, so dass wir nur einen allgemein gültigen Grundplan zu entwerfen brauchen, in welchem die hervorstechenden Eigenthümlichkeiten klar zu Tage treten.

Will man die drüsige Zone in ihrer ganzen Ausdehnung übersehen, so gehört nichts weiter dazu als die Bindegewebskapseln der Leber sorgfältig abzupräpariren und nach oben zurückzuschlagen. Die Zone liegt immer an der Bauchfläche des aboralen Lebertheiles, nimmt ungefähr dessen Mitte ein und wird nach vorn nicht nur von der Lebermasse sondern auch von dem Tintenbeutel begrenzt (Fig. 22, 23). Letzteres Organ hat bei den Octopoden eine etwa birnförmige Gestalt und liegt bekanntlich innerhalb der Lebermasse mit Ausnahme der Ventralseite, wo seine Kapselwand mit der Bauchfläche der Leber zusammenfällt und also deutlich sichtbar ist.

Der aborale Theil des Tintenbeutels ist gewöhnlich zugespitzt und senkt sich über eine kleinere oder grössere Strecke (letzteres bei Eledone Aldrovandi und Tremoctopus violaceus) in die Mitte des vorderen Abschnitts der drüsigen Zone, wodurch dieser Theil in zwei mehr oder weniger deutlich getrennte Hälften zerfällt. In der Mitte der Zone fand ich öfters eine seichte longitudinale Furche, welche sich von dem Tintenbeutel ab bis zur aboralen Lebergrenze fortsetzt und das drüsige Organ (dem Anscheine nach) in zwei ungefähr symmetrische Längshälften theilt (Octopus vulgaris, Octopus tetracirrus, Octopus macropus, Eledone) (Fig. 22, 23).

Auch hat die Oberfläche der Zone manchmal ein feingefurchtes Aussehen, welches bei Loupenvergrösserung klar hervortritt.

Die Gestalt der Drüsenmasse ist nach den Gattungen sehr verschieden. Manchmal sind die Längshälften ziemlich in die Länge gezogen (Octopus vulgaris, Octopus tetracirrus, Octopus macropus), manchmal aber auch sind sie kurz und breit, in welchem Falle sie entweder eine rautenförmige Gestalt annehmen (Tremoctopus violaceus) oder unter Bildung einer ovalen oder rundlichen Scheibe in einander verfliessen (Eledone). Auch kommt es bei einigen Gattungen vor, dass der hintere Theil der Drüsenterritorien eine kleine Strecke weit auf die Dorsalseite der Leber übergreift, wie z. B. bei Octopus vulgaris und Tremoctopus violaceus der Fall ist.

Gewöhnlich setzen sich die Drüsenterritorien durch ihre Farbe scharf von der umgebenden Lebermasse ab; diese Abgrenzung war besonders deutlich bei Octopus macropus wo die Zone gelblich, die Leber röthlich erscheint und bei Tremocto-

pus violaceus, wo die Leber eine dunkelbraune, die Zone dagegen eine gelbliche Farbe besitzt. Bei Eledone fand ich die Trennung zwischen Beiden undeutlich ausgesprochen was höchstwahrscheinlich der anhaltenden Alcoholeinwirkung zuzuschreiben ist.

Die parigen Lebergänge (Fig. 22, 23) sind meistens symmetrisch gelagert und nehmen immer aus den Drüsenterritorien ihren Ursprung. Entweder liegen ihre Ursprungsstellen im mittleren Theile hart an einander und sind ganz nach hinten gerückt (Octopus tetracirrus, Octopus macropus) oder dieselben sind etwas weiter von einander entfernt (Tremoctopus violaceus), sodass jeder Leberkanal deutlich der zugehörigen Zonenhälfte angehört (Eledone Aldrovandi, Octopus vulgaris).

Die kurzen Lebergänge hangen durch Bindegewebe mit einander zusammen. Sie umfassen den Anfangstheil des Darmes (Fig. 23) und vereinigen sich nachher um entweder sofort in den Blindsack auszumünden, oder einen gemeinsamen Endabschnitt hervorgehen zu lassen. Schliesslich sei noch bemerkt dass die Lebergefässe (Venen?) vielleicht ausnahmslos am Ende zwischen den Ursprungsstellen der Lebergänge in die drüsige Zone eintreten.

Vergleichen wir die Octopoden in Bezug auf den feineren Bau der drüsigen Zone, so zeigt sich dass dieser in den wesentlichsten Puncten bei Allen derselbe ist. Demnach haben wir auch nicht nöthig unsere Befindungen bei jedem Genus resp. jeder Species auseinanderzusetzen sondern können uns darauf beschränken die Verhältnisse einer einzigen Gattung ausführlich zu behandeln und nachher die bei den übrigen Formen auftretenden Eigenthümlichkeiten kurz hervorzuheben.

Zur Darstellung der histologischen Verhältnisse wähle ich die Gattung Eledone, weil das Material derselben ihres vortrefflichen Conservirungszustandes wegen die genaueste histologische Untersuchung zuliess. Die Schnittserien, welche ich durch den aboralen Lebertheil anfertigte, lehrten mich in erster Instanz dass die Zone in Bezug auf ihren Bau überall denselben Typus beibehält. Nach vorn liegt sie frei und ist nur von einer der Leberkapsel angehörenden Bindegewebsschicht bekleidet, nach oben und nach den Seiten wird sie dagegen grösstentheils von der Lebermasse eingeschlossen, mit welcher sie unzertrennlich verbunden ist (Fig. 24).

Ueberaus leicht ist es die gegenseitige Begrenzung beider Organe zu verfolgen, da diese sich durch ihren verschiedenartigen Bau scharf gegen einander absetzen. Die Dicke der Zone ist je nach den Stellen sehr verschieden; sie erreicht aber ungefähr in der Mitte der Längenachse ihr Maximum.

Ein äusseres Cylinderepithel, wie dies bei den entsprechenden Drüsenorganen der Myopsiden so allgemein vorkommt, konnte ich bei den Octopoden nie-

mals nachweisen; seine Stelle wird hier durch die schon erwähnte umhüllende Bindegewebsschicht eingenommen.

Es wurde schon oben dargethan dass die Lebergänge bei den Octopoden immer aus der drüsigen Zone ihren Ursprung nehmen um dann ihren Weg nach dem Blinddarme zu verfolgen; diese Thatsache lässt schon mit Recht vermuthen, dass die von der Leber hinabsteigenden Kanäle auch die Drüsenterritorien durchbohren und sich mit deren Gewebe in Verbindung stellen müssen. Dies ist auch wirklich der Fall. Im vorderen Theile, kurz nach ihrem Austritt aus der Leber, verlaufen sie ziemlich weit von einander entfernt so dass jeder Gang ungefähr die Mitte der zugehörigen Zonenhälfte einnimmt, nach hinten dagegen näheren sie sich gegenseitig mehr und mehr und rücken zugleich bauchwärts so dass sie schliesslich zu beiden Seiten der medianen Furche zu liegen kommen.

Auf der grösseren Strecke des Verlaufs durch die Zone entbehren die Lebergänge des Characters wahrer mit eigenen Wandungen versehener Ausfuhrkanäle und stellen vielmehr sinusartige Erweiterungen dar, welche das Drüsengewebe durchsetzen; erst ganz nach hinten kurz vor ihren Austrittsstellen bekommen sie eine deutliche bindegewebige Wand, in welcher sich Muskeln und Gefässe einlagern. So weit die Leberkanäle die drüsige Zone durchlaufen, zeigen sie auf dem Querschnitt eine unregelmässige Gestalt; sie senden zahlreiche grössere und kleinere Aeste ab, welche sich in die umgebende Drüsensubstanz senken um sich darin völlig aufzulösen. Das Innere der Leberkanäle fand ich stellenweise von einer feinkörnigen Masse ausgefüllt.

Ueber den histologischen Bau der Zone habe ich Folgendes mitzutheilen. Das ganze Organ wird von einem Systeme kleiner Hohlräume durchzogen (Fig. 24), welche nicht nur mit einander sondern auch mit den Lebergängen und deren Verzweigungen in direkter Verbindung stehen. Dieses Verzweigungssystem erstreckt sich bis zur Peripherie des Organes, ist aber nach aussen vollkommen geschlossen. Die Hohlräume, welche auch hier die Bedeutung von Drüsenfollikeln haben, sind klein und gehen in Bezug auf ihre Dimensionen nicht weit aus einander. Sie haben eine unregelmässige Gestalt und verleihen dem Organe auf dem Durchschnitt ein etwas schwammiges Aussehen (Fig. 24).

Nach dieser Durchmusterung leuchtet es sofort ein, dass die Zone in ihrem Baue eine merkwürdige Uebereinstimmung mit der drüsigen Lebergangswand von Loligo darbietet. Wir haben hier der Hauptsache nach genau dasselbe Verhalten wie dort, nur mit dem Unterschiede dass die drüsigen Wandungen der Lebergänge hier nicht gesondert auftreten sondern mit einander zu einem einzigen Drüsenkörper verschmolzen sind.

Das Innere der zahlreichen einander begrenzenden Drüsenfollikel wird genau

wie bei Loligo von einer einfachen Drüsenzellenschicht ausgekleidet, welche sich auf die Lebergangswand fortsetzt und also auch deren Lumen begrenzt (Fig. 24).

Die Drüsenzellenschichten der einander anliegenden Follikel werden überall durch feine Gefässe von einander getrennt, welche auch hier die Bedeutung von Capillaren haben (Fig. 26).

Sie umspinnen die Drüsenfollikel, stehen mit den Lebercapillaren in unmittelbarem Zusammenhange und entspringen zweifelsohne aus den Aesten der starken Lebervenen und Leberarterien, welche die Zone in verschiedenen Richtungen durchsetzen.

Die Capillaren sind manchmal sinusartig erweitert und enthalten ähnliche Körperchen, wie ich sie in den Capillargefässen der Myopsiden anzutreffen vermochte. Was weiter die Drüsenzellenschicht anbelangt, so fand ich dieselbe in den meisten Fällen unregelmässig gestaltet da sie kleinere und grössere Falten bildet, welche in das Lumen der Follikel frei hervorspringen.

Die Drüsenzellen stimmen nicht nur in Bezug auf ihre Ausbildung mit denen der Myopsiden überein sondern sind auch denselben Degenerationsstadien unterworfen, welche wir schon früher in ausführlicher Weise besprochen haben.

Diese Degenerationsstadien führen schiesslich zur Bildung eines stark entwickelten Maschenwerkes, in welchem die Protoplasmakörner nebst zahlreichen Zellkernen zerstreut liegen.

Im Lumen der Leberkanäle, welche sich, wie aus obiger Schilderung hervorgeht, eigentlich nur durch ihre grössere Dimensionen von den umgebenden Drüsenfollikeln unterscheiden, war das Maschenwerk ebenfalls hier und da vorhanden.

Zu den verbreitesten Erscheinungen in den degenerirenden Drüsenzellen gehört gewiss das Auftreten von Vacuolen; öfters konnte ich mit Sicherheit nachweisen dass sie, von den geplatzten Zellmembranen theilweise umgeben, sich wie Blasen von dem restirenden Protoplasma der Zellen abschnürten (Fig. 26*a*).

Die Verbindung zwischen der Lebermasse und der Zone ist eine höchst einfache (Fig. 24). Da wo die drüsige Zone mit der Lebermasse verbunden ist, lagern sich die Drüsen- und die Leberfollikel direkt an einander in der Weise, dass Beide nur durch ein Capillargefäss getrennt werden. Der Drüsenkörper entbehrt also an diesen Verbindungsstellen einer selbständigen Wandung. Die Leberfollikel unterscheiden sich von denen der Zone sehr auffallend durch ihre ziemlich regelmässige polygonale Gestalt und durch ihre beträchtlichere Grösse. Durchschnitte lehren dass jeder Leberfollikel von einem Capillargefäss umspannt wird und zahlreiche in einem Kreise angeordnete Zellen enthält, welche das innere Lumen begrenzen.

Ueber diese Zellen mögen hier noch einige kurze Notizen Platz finden. Bar-

FURTH hat im Zool. Anzeiger N⁰. 66 eine interessante Mittheilung über die Leber der Gastropoden gemacht und u. A. gezeigt dass sich an deren Bildung zwei beziehungsweise drei Arten von Zellen betheiligen, nämlich 1⁰. gelb bis braun gefärbte Fermentzellen, welche meist länglich, rund oder kugelig sind und abgesehen von den Kernen grosse oder kleine Kugeln enthalten; 2⁰. die eigentlichen langgestreckten Leberzellen, welche eine Anzahl kleiner kugeliger oder unregelmässig gebildeter gelber Körnchen enthalten und 3⁰. grosse Zellen, welche ganz mit stark lichtbrechenden farblosen Körnern angefüllt sind. Diese Körner bestehen nach ihm zum grössten Theile aus kohlensaurem Kalk, der an eine organische Substanz gebunden ist.

In den Zellen der Leberfollikel verschiedener Octopoden, besonders in denen von Eledone, konnte ich nun Zellen nachweisen, welche eine merkwürdige Uebereinstimmung mit den so eben genannten Elementen darbieten. So enthalten z. B. die Leberfollikel von Eledone erstens rundliche gelbgrüne kerntragende Zellen (Fig. 27*a*), welche zwischen den übrigen Zellen zerstreut liegen und deren Inhalt eine fein- oder grobkörnige Masse darstellt. Ausser diesen kommen in grosser Menge langgestreckte und zugleich auch mehr rundliche Zellen vor, welche mit runden oder eckigen stark lichtbrechenden Körnern prall angefüllt sind (Fig. 27).

Ob nun diese Zellenarten denen der Gastropodenleber vollkommen analog sind, wage ich nicht zu entscheiden; eine grosse morphologische Uebereinstimmung zwischen denselben ist aber nicht in Abrede zu stellen. Leider kann ich über die chemische Natur der in den Zellen befindlichen Körner nichts Sicheres aussagen, da alle von mir angefertigten Schnitte zur histologischen Untersuchung sofort in Canadabalsam eingeschlossen wurden.

Es wurde schon früher darauf hingewiesen, dass wir nach Behandlung einer Gattung bei den übrigen von mir untersuchten Octopoden nicht lange zu verweilen brauchen, weil diese in Bezug auf den Bau der drüsigen Zone, auf deren Verhältnisse zur Leber u. s. w. dem oben geschilderten Typus fast vollkommen entsprechen. Dennoch will ich die bei ihnen gefundenen Eigenthümlichkeiten nicht ganz stillschweigend übergehen, da sie jedenfalls zur Ergänzung der schon bekannten Thatsachen dienen können.

So war ich z. B. in der Lage die histologischen Strukturverhältnisse der bindegewebigen Lebergänge von Octopus vulgaris, Octopus tetracirrus und Tremoctopus violaceus zu studiren und fand u. A. (ein Verhalten, welches wahrscheinlich für alle Octopoden Geltung hat) dass in deren Lumen zahlreiche

Längsfalten vorspringen, welche radiär gestellt sind. Die innere Lebergangswand ist überall von einem schönen Cylinderepithel bekleidet, das einer starken Basalmembran aufsitzt und nach innen von einer Cuticula begrenzt wird.

Bei Tremoctopus konnte ich dieses Epithel nicht auffinden, eine Thatsache welche höchstwahrscheinlich als Macerationserscheinung zu deuten ist.

Die eigentliche Lebergangswand wird von einem mehr oder weniger lockeren Bindegewebe hergestellt, welches zahlreiche Muskeln und Gefässe enthält. Erstere gestalten sich unter zweierlei Formen nämlich als Ringmuskeln und als Längsmuskeln, welche letztere oft eine beträchtliche Dicke erlangen.

Die Leberkanäle behalten auf einer grösseren oder kleineren Strecke ihres Verlaufs innerhalb der Zone ihre Bindegewebshülle, welche sich in den meisten Fällen sogar eine Weile auf deren Hauptaesten fortsetzt um schliesslich völlig zu verschwinden.

Bei Octopus tetracirrus fand ich die Drüsenfollikel, welche zwischen den Austrittsstellen der Lebergänge liegen, bedeutend grösser und zugleich auch regelmässiger angeordnet als in den übrigen Regionen des Organes.

Zum Studium der von mir als Blutzellen angesehenen Körperchen war die Gattung Tremoctopus bei weitem am günstigsten, weil sie bei dieser in den stark dilatirten Capillaren in überaus grosser Menge vorhanden waren.

Sie sind meistens kugelig, scharf conturirt und nehmen nach Färbung mit Cochenille, Grenacher's Carmin u. s. w. eine dunklere Farbe an als die Kerne der Drüsenzellen.

Zur Erläuterung der gegenseitigen Lagerungsverhältnisse zwischen Leber und Drüsenzone habe ich die schematischen Figuren in Fig. 25 construirt, welche mit Hülfe der darunter stehenden Erklärung den Sachverhalt klarer darlegen als es lange Erörterungen thun könnten.

Es sei schliesslich noch bemerkt, dass bei Tremoctopus die peripheren bauchwärts gelegenen Follikel radiär zur Längenachse der Leber gestellt sind und sich demnach durch ihre regelmässige Anordnung und Gestalt deutlich von den übrigen Follikeln des Organes unterscheiden.

SCHLUSSBEMERKUNGEN.

Am Ende meiner Untersuchungen lasse ich hier noch einige Bemerkungen allgemeineren Inhalts folgen, zu welchen die von mir gewonnenen Resultate grösstentheils den Anlass bieten.

Obgleich bei unsern oben stehenden Beschreibungen schon hin und wieder auf die allgemeine Bedeutung einer beobachteten Erscheinung hingewiesen wurde, wird eine kurze Zusammenfassung des Ganzen jedenfalls nicht nutzlos sein.

Betrachten wir erstens die beschriebenen Drüsenkörper bei Decapoden und Octopoden von einem rein morphologisch-histologischen Standpunkte, so lässt sich die zwischen diesen Organen waltende Analogie nicht verkennen. Wenn auch die von ihnen gelieferten Sekrete in beiden Gruppen vielleicht etwas aus einander gehen, der Hauptsache nach sind sie jedenfalls einander gleich, da die sekretbildenden Organe in Bezug auf ihren Bau vollkommene Uebereinstimmung darbieten.

Die Lagerungsverhältnisse und das äussere Vorkommen der in Rede stehenden Drüsen sind jedoch in den zwei Hauptgruppen der Dibranchiaten äusserst verschieden. Indem sie bei den Octopoden der Leber angehören und sich als einen modificirten Theil derselben erkennen lassen, stellen sie bei den Decapoden deutlich gesonderte Anhänge vor, oder sind in Gestalt drüsiger Lebergangswandungen entwickelt.

Aus der schon mehrmals citirten Arbeit von Brock über die Phylogenie der dibranchiaten Cephalopoden hat sich als Hauptresultat ergeben dass die Octopoden und Decapoden zwei Gruppen darstellen, welche sich fast ganz unabhängig von einander entwickelt haben. Nach ihm haben sich die Octopoden schon sehr früh von den Urdibranchiaten abgezweigt, während die typischen Oegopsiden in gerader Linie aus diesen letzteren hervorgegangen sind und ihrerseits wiederum als Ausgangspunct der Myopsiden zu gelten haben.

Später bin ich in meiner Arbeit über das Excretionssystem der Cephalopoden zu ganz ähnlichen Resultaten gekommen.

Die verschiedenen Ausbildungsstufen, welche das sogenannte Pankreas der Cephalopoden aufzuweisen hat, bilden nun aufs Neue eine sehr schöne Bestätigung jener phylogenetischen Spekulationen.

Die Octopoden nehmen auch in dieser Hinsicht unbedingt die niedrigste phylogenetische Stellung ein. Ursprünglich ist die drüsige Zone wahrscheinlich ein echter Theil der Leber gewesen, welcher sich unter fortschreitender Arbeitstheilung allmählich von derselben differenzirt und schliesslich den Charakter eines mehr selbständigen Drüsenkörpers angenommen hat.

In diesem Zustande finden wir das Organ noch bei den jetzt lebenden Octopoden vorhanden.

Bei den höher stehenden Decapoden (spec. Myopsiden) hat sich die Differenzirung desselben weiter vollzogen, indem es sich von der Leber vollständig losgemacht hat und auf die Leberkanäle übergesiedelt ist. Die Lage der letzteren innerhalb der Harnblase konnte diesem Vorgang nur günstig sein. Bei Loligo finden wir noch keine gesonderten Anhänge sondern eine drüsige Lebergangswand, welche dem Typus der Octopoden noch einigermassen entspricht.

Bei Sepiola, Rossia und Sepia liegt dagegen eine viel höhere Entwicklungsstufe vor. Das ursprünglich unparige Organ zerfällt hier in eine Anzahl deutlich gesonderter und von einander unabhängiger Anhänge, welche je eine selbständige Arbeit zu leisten bestimmt sind.

Unter den letzteren Gattungen betrachte ich dann wieder Sepia als die am höchsten stehende Form, weil dem Baue des Organes entsprechend auch die Sekretbildung am vollkommensten sein muss. Es leuchtet ein, dass nach dieser Anschauung Loligo die Brücke zwischen Myopsiden und Octopoden (oder vielmehr Oegopsiden) bildet.

Ueber die Sekrete des sogenannten Pankreas der Cephalopoden kann ich leider noch nichts Sicheres berichten. Demnächst hoffe ich mich aber nach Herbeischaffung frischen Materials zur Untersuchung derselben zu schreiten.

Nur will ich hier hervorheben, dass beim Aufschneiden der Lebergänge frischer Exemplare von Sepia und Loligo öfters zu bemerken war dass das Lebersekret in der unmittelbaren Nähe der Leber eine andere Farbe besitzt als in der Nähe des Blinddarms; so ist z. B. gewöhnlich das Lebersekret von Sepia an den Austrittstellen der Leberkanäle dunkler gefärbt als an der Stelle, wo diese in den Blindsack einmünden.

Es muss also das Lebersekret während seines Durchganges durch die Ausfuhrkanäle jedenfalls Veränderungen erleiden.

Was die chemische Natur des reinen Lebersekretes von Octopus und Eledone sowie auch von Sepia anbelangt, so muss ich mich den Aufstellungen der schon im Anfange genannten Autoren vollkommen anschliessen. Zu den von mir unternommenen Nachuntersuchungen stand mir ganz reines in Alcohol conservirtes Material zur Verfügung. Von Gallenstoffen war nie eine Spur aufzufinden. Da-

A 4

gegen fand ich am deutlichsten bei Octopus zwei Enzyme, von denen das eine in saurer Lösung, das andere in alkalischer Lösung Fibrin zu verdauen vermochte.

Die Anwesenheit dieser peptischen und tryptischen Enzyme war, trotzdem sie jedenfalls durch die Einwirkung des Alcohols viel von ihrer Wirksamkeit verloren hatten, doch recht deutlich nachzuweisen; ausserdem konnte ich auch das Vorhandensein von Diastase mit Hülfe der Glycose-reaction in schönster Weise constatiren.

Ueber das Vorkommen von Enzymen in den Lebergangsanhängen wage ich noch nicht ein sicheres Urtheil abzugeben: es fehlte mir bis jetzt an dem erforderlichen Material.

Dordrecht, Mai 1880.

ERKLÄRUNG DER ABBILDUNGEN.

Fig. 1. Horizontalschnitt durch einen Lebergangsanhang von Sepia officinalis. Vergr. ± 70. Carminpp.

l = Lumina der peripheren Bläschen, in welchen hier und da das Maschenwerk sichtbar ist.
a = Centralhöhle.
e = äusseres Cylinderepithel.
d = Drüsenzellenschicht.
c = Capillaren.
g = stärkeres umspannendes Gefäss.

Fig. 2. Peripherer Theil eines arteriell injicirten und nachher gepressten Lebergangsanhanges von Sepia officinalis.
Der Deutlichkeit wegen sind die gesonderten Bläschen nicht gezeichnet.
Hartn. Oc. 2. Obj. 4.

Fig. 3. Querschnitt eines arteriell injicirten Lebergangsanhanges von Sepia officinalis.
Hartn. Oc. 2. Obj. 4.
Bezeichnungen wie Fig. 1.

Fig. 4. Horizontalschnitt eines venös injicirten Lebergangsanhanges von Sepia officinalis. Carminpp.
Hartn. Oc. 2. Obj. 4.
Bezeichnungen wie Fig. 1.

f = stärkere umspannende Gefässe in der Längsrichtung getroffen.

Fig. 5. Durchschnitt eines Lebergangsanhanges von Sepia officinalis (theilweise abgebildet).
Hartn. Oc. 2. Obj. 8.
Haematoxylinpp.

d = Drüsenzellenschicht unregelmässig entwickelt, rechts im Zerfall begriffen.
c = Capillaren, welche die vermeintlichen Blutzellen enthalten.
e = äusseres Epithel.

*

f = Cuticula.
v = Vacuolen.

Hier und da befinden sich in den Zellenschichten den Blutzellen ähnliche Körperchen (*a*).

Fig. 6. Durchschnitt eines Lebergangsanhanges von Sepia officinalis. (theilweise abgebildet.)

Hartn. Oc. 2. Obj. 8. Osmium, Grenacher's saure Carminfärbung.

Die Drüsenzellenschicht regelmässig entwickelt.

Das umspannende Capillargefäss zeigt sinusartige Erweiterungen.

Bezeichnungen wie Fig. 5.

Fig. 7. Aüsseres Cylinderepithel eines Lebergangsanhanges von Sepia officinalis, von der Oberfläche betrachtet.

Hartn. Oc. 2. Obj. 8. Osmium, Grenacher's saure Carminfärbung.

Fig. 8. Isolirte Drüsenzellengruppe aus einem Lebergangsanhange von Sepia officinalis, um den Anfang der Degeneration und das Auflösen der Cuticularmembran zu zeigen.

Hartn. Oc. 3. Obj. 8.
v = Vacuolen.
w = Gefässwand.

Fig. 9. Theil der Drüsenzellenschicht aus einem Lebergangsanhange von Sepia officinalis. In der Mitte eine Gruppe von degenerirenden Zellen. Starke Vacuolenbildung und auswandernde Zellkerne.

Hartn. Oc. 2. Obj. 8. Osmium, Grenacher's saure Carminfärbung.
v = Vacuolen.
c = Capillargefäss, theilweise getroffen.

Fig. 10. Sepia officinalis. Weitere Degenerationsstadien der Drüsenzellen. Das Maschenwerk ist sichtbar, dazwischen austretende Protoplasmamassen mit zertreuten Zellkernen.

Hartn. Oc. 2. Obj. 8. Lacktincturfärbung (Lacca Viennense).
c = Capillargefäss.

Fig. 11. Sepia officinalis. Völlige Zerstörung der Drüsenzellen.

Hartn. Oc. 3. Obj. 8. Lacktincturfärbung.
g = Gefässwand.

Fig. 12. Ein Lebergangsanhang von Rossia macrosoma. Vergr. ± 5.

Fig. 13. Rossia macrosoma. Querschnitt durch einen Leberkanal mit den von ihm getragenen Anhängen.

Hartn. Oc. 2. Obj. 8. Schwache Cochenillefärbung.

d = Drüsenzellenschicht.
e = äusseres Epithel.
g = grössere umspannende Gefässe, welche mit den Capillaren (*c*) in Verbindung stehen.
l = Lumen des Leberkanales.

Fig. 14. Querschnitt eines Lebergangsanhanges von Rossia macrosoma. Starke Faltenbildung in der Drüsenzellenschicht d.
Hartn. Oc. 3. Obj. 5. Gren. saure Carminfärbung.
e = äusseres Epithel.
c = Capillargefäss.

Fig. 15. Längschnitt eines Lebergangsanhanges von Rossia macrosoma.
Hartn. Oc. 2. Obj. 8. Haematoxylinpp. Bezeichnung wie Fig. 14.

Fig. 16. Querschnitt eines Lebergangsanhanges von Rossia macrosoma. Die Drüsenzellenschicht ist ziemlich regelmässig entwickelt, hier und da wellenartig gebogen.
Hartn. Oc. 3. Obj. 5. Osmium, Gren. saure Carminfärb. Bezeichnung wie Fig. 14.

Fig. 17. Rossia macrosoma. Die Drüsenzellenschicht in Degeneration begriffen. Das Maschenwerk füllt das ganze Lumen des Anhanges aus.
Hartn. Oc. 2. Obj. 8. Gren. saure Carminfärbung.

Fig. 18. Querschnitt eines Leberkanales von Loligo vulgaris, zum Theile abgebildet.
Hartn. Oc. 3. Obj. 4. Gren. saure Carminfärbung.
l = Lumen des Leberganges.
d = Drüsenfollikel.
f = Drüsenzellenschicht.
c = Capillaren.
e = äusseres Epithel.
g = starke Vene mit drüsiger Wandung g'.

Fig. 19. Horizontalschnitt der drüsigen Wand eines arteriell injicirten Leberkanales von Loligo vulgaris.
Hartn. Oc. 2. Obj. 4. Carminpp.
Bezeichnung wie Fig. 18.

Fig. 20. Loligo vulgaris. Isolirte Drüsenzellen.
Hartn. Oc. 3. Obj. 8.
In c. ist das umspinnende Capillargefäss mit abgebildet.

Fig. 21. Loligo vulgaris. Drüsenzellengruppe, welche im Zerfall begriffen ist.
Hartn. Oc. 3. Obj. 8. Grenacher's saure Carminfärbung.

Fig. 22. Oct. tetracirrus. Die Leber (*l*) mit der drüsigen Zone (*z*) sowie die Lebergänge (*n*) mit Magen (*i*), Blindsack (*b*) und abgebundenem Darm (*d*) sorgfältig präparirt und aus einander gelegt. Alles von der Ventralfläche betrachtet. In der Mitte der Lebermasse schimmert der Tintenbeutel durch. Nat. Grösse.

Fig. 23. Octopus macropus. Dieselben Organe wie in Fig. 22. Bezeichnung wie oben; Blinddarm und Magen liegen hier etwas gedreht. ± Nat. Grösse.

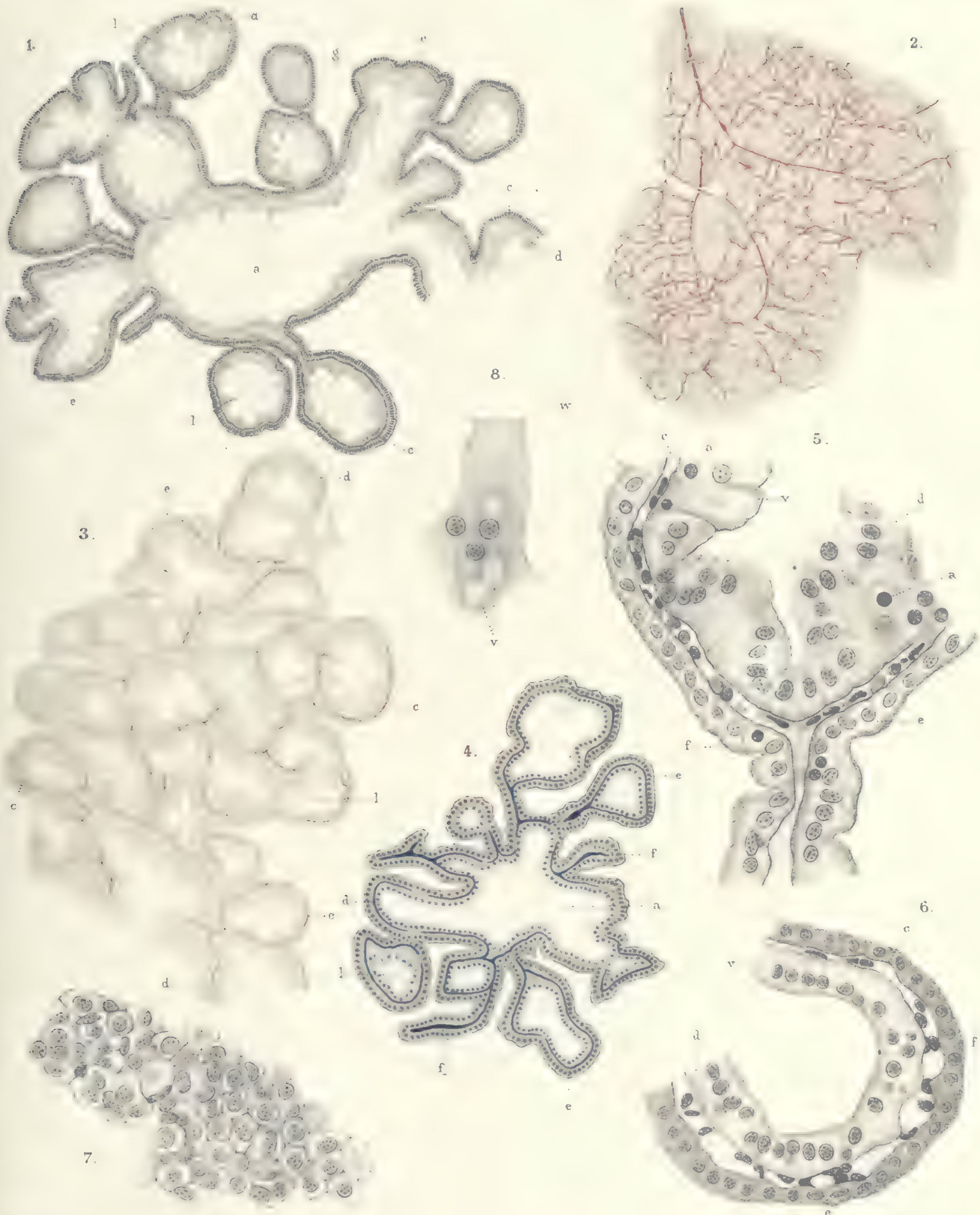
Fig. 24. Eledone sp. Horizontalschnitt der drüsigen Zone, an der Stelle wo diese mit der Lebermasse zusammenhängt. Chromsäure. Schwache Cochenillefärbung.
Hartn. Oc. 2. Obj. 4.

d = Leberfollikel.
e = deren Zellen
c = Capillaren.
a = Follikel der drüsigen Zone.
b = deren Drüsenzellenschicht.

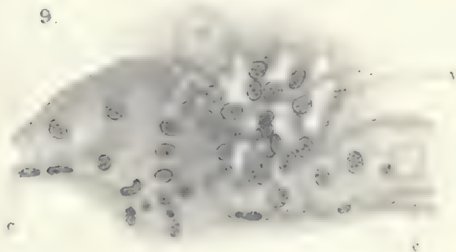
Fig. 25. Tremoctopus violaceus. Schematische Querschnitte der drüsigen Zone und der umgebenden Lebermasse nach verschiedenen Höhen aufgenommen um das Verhalten zwischen beiderlei Organen zu veranschaulichen. Die Drüsenterritorien sind roth gefärbt. Die Pfeile weisen nach der Ventralfläche. 1. Aboraler Theil. Die Zone ist noch in zwei gesonderte Hälften zertheilt. 2. Letztere haben sich mit einander vereinigt und bilden also ein Ganzes. *f* = mediane Furche. 3. Mittlerer Theil der drüsigen Zone fast ganz von der Leber umgeben. 4. Es wird wiederum eine Zweitheilung der Zone vorbereitet. 5. Oraler Abschnitt der Zone. Die Zweitheilung hat sich vollzogen.

Fig. 26. Octopus vulgaris. Zwei Drüsenzellenschichten benachbarter Follikel durch ein Capillargefäss von einander getrennt. Bei *a* sind die Zellen in Degeneration begriffen.
Hartn. Oc. 3. Obj. 8. Cochenillefärbung.

Fig. 27. Vermuthliche Fermentzelle (*a*) und Kalkkörner aus den Leberfollikeln von Eledone.
Hartn. Oc. 3. Obj. 8.



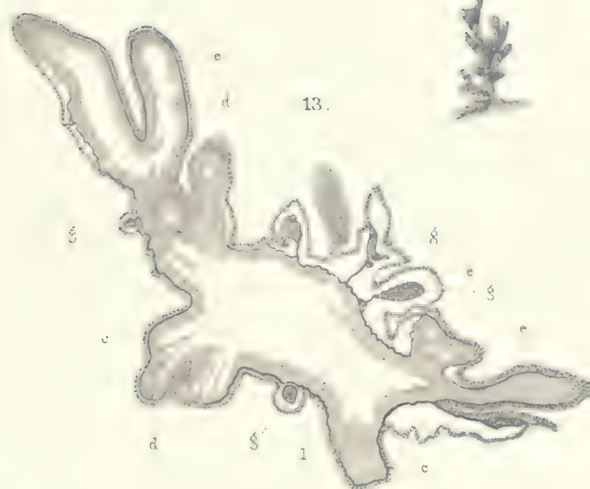
W. J. Vigelius fec. A. J. Wendel lith.


9.

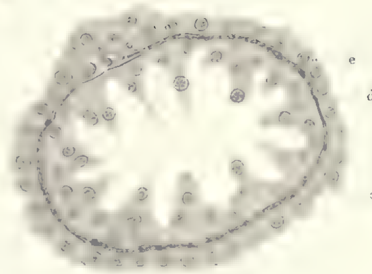

10


11


12.

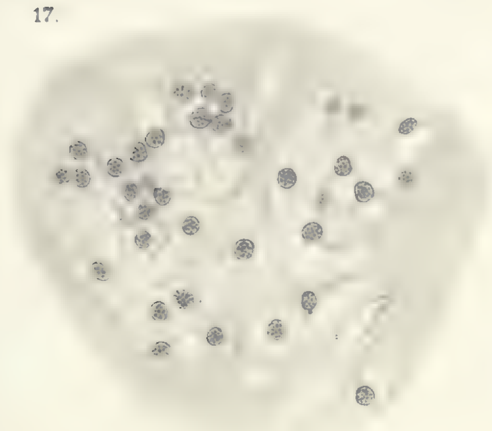

13.

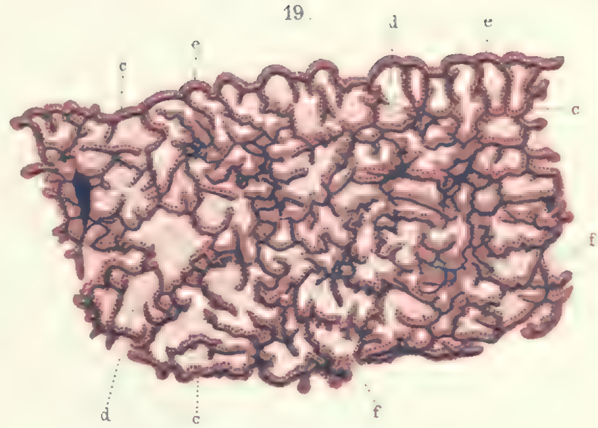

15.


14.

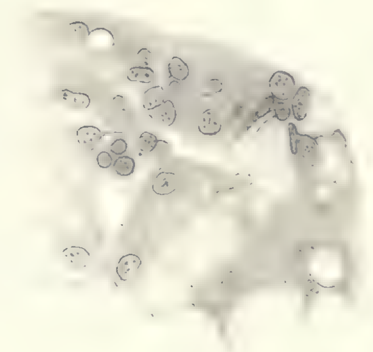

16.

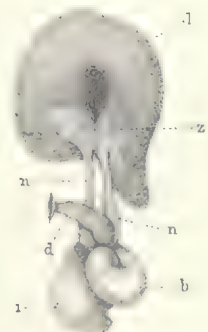
W J Vigelius fc: A. J. Wendel lith.

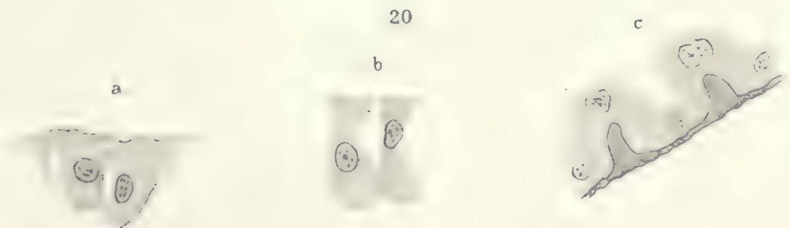




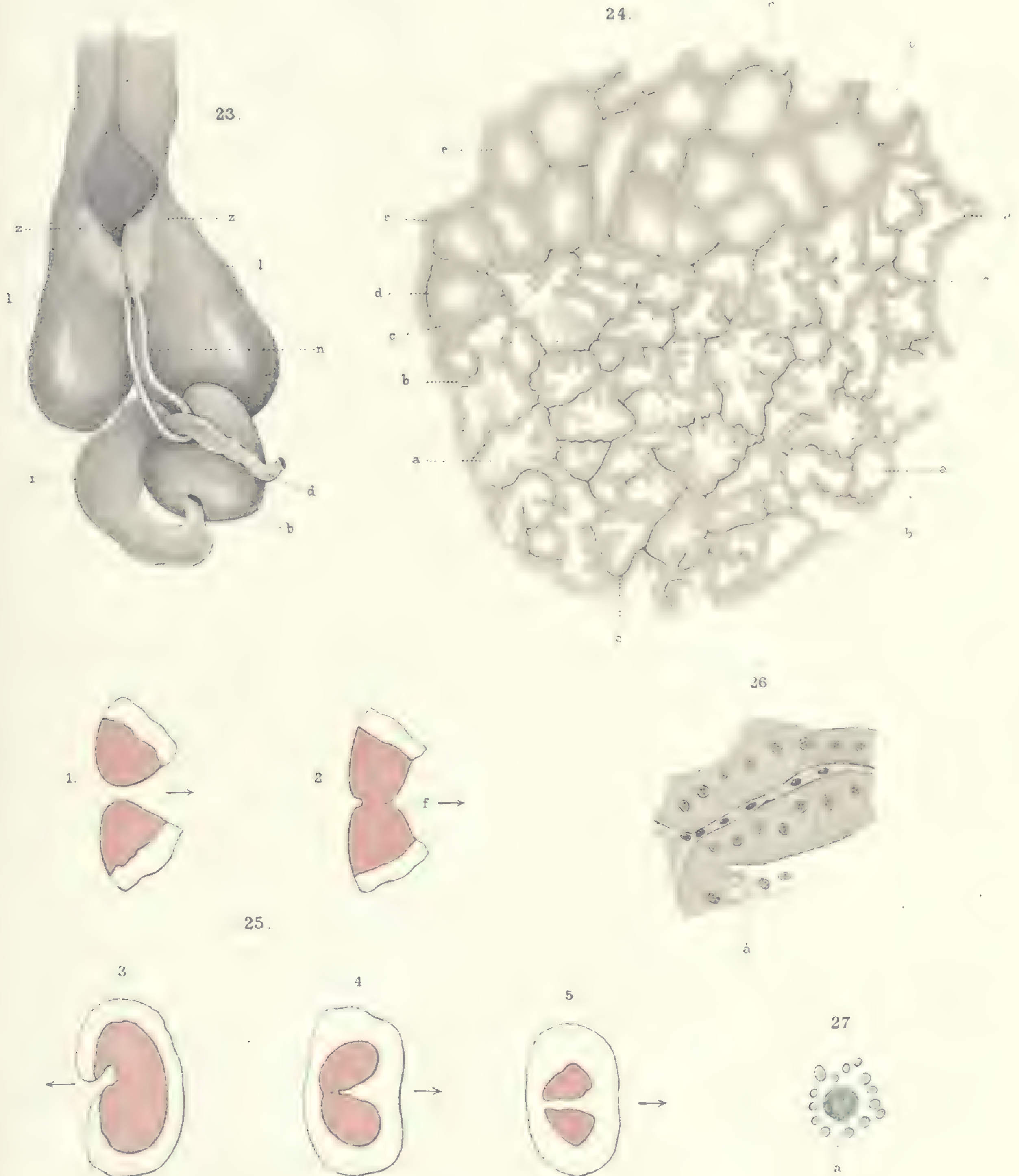








W. J. Vigelius fec. A. J. Wendel lith.



W. J. Vigelius fec. A. J. Wendel lith.

EEN AANHANGSEL

TOT DE

TAFELS VAN ONBEPAALDE INTEGRALEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

---

1. Bij een ander onderzoek kwam ik tot onbepaalde integralen, waarin de functie onder het integraalteeken eene elliptische integraal bevatte. Het kwam mij niet zonder gewicht voor, zulke integralen ook te onderzoeken, wanneer het den gewonen, kanonischen vorm van elliptische integralen gold.

Ten einde dit onderzoek echter uit een meer algemeen standpunt te kunnen behandelen, was het noodig, algemeene herleidingsformulen te bezitten voor integralen van den vorm $\int \varphi(x) \Delta \, dx$ en $\int \varphi(x) \frac{1}{\Delta} \, dx$; waar de $\Delta = \sqrt{1-k^2 \sin^2 x}$ is, zooals zij in de elliptische integralen der eerste en tweede soort voorkomt, en waar $\varphi(x)$ eene eenvoudige goniometrische functie voorstelt. Wel is daaromtrent iets geleverd door VERDAM in twee stukjes, voorkomende in Deel II van het Tijdschrift „het Instituut", — en zijn door mij in het XVI^de Deel der Verslagen en Mededeelingen die herleidingsformulen werkelijk gegeven, doch alleen voor het geval dat de integralen tusschen de grenzen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ werden genomen, en dus natuurlijk die herleidingsformulen veel eenvoudiger worden: maar het gewenschte stel ontbrak toch.

Het viel echter niet moeilijk, de gewenschte herleidingsformulen af te leiden

B 1

voor de meest algemeene integralen, die mij van dienst konden zijn, namelijk $\int \varphi(x) \Delta^{2n-1} dx$, waar $\varphi(x)$ eene geheele macht van sinus, cosinus, of tangens van de geheele of van de halve x is, en waarbij n ook negatief te nemen was, zoodat de Δ in den noemer voorkwam. En daaruit waren dan de overeenkomstige integralen $\int \varphi(x) \frac{dx}{\Delta}$ en $\int \varphi(x) \Delta\, dx$, hier voor $n = 0$ en $n = 1$, gemakkelijk te vinden.

Daar alle integralen hier genomen worden tusschen de grenzen 0 en x, behoeft dit nergens afzonderlijk te worden aangegeven.

Het onderzoek leverde ten slotte een volledig stel geschikte herleidingsformulen met de noodige eindintegralen, die nu in tafels konden worden verzameld. Daardoor scheen de titel van dit opstel gerechtvaardigd.

HOOFDSTUK I.

VOORBEREIDEND ONDERZOEK VAN INTEGRALEN, DIE ALLEEN GONIOMETRISCHE FUNCTIËN, EN DAARBIJ DE Δ BEVATTEN.

2. Om het voorgestelde doel te bereiken, moet men in plaats van de methode van het integreeren bij gedeelten, — die hier niet toegepast kan worden — zooals bekend is, eene andere gebruiken, die aldus kan worden voorgesteld. Men moet een geschikten vorm differentieeren; dan de verschillende termen, die daardoor ontstaan, zoo herleiden, dat er na de integratie de gezochte integraal en hare verwanten van dezelfde soort voorkomen. Die te differentieeren vorm zal nu moeten bevatten: 1°. de factoren onder het integraalteeken tot eene hoogere macht, soms met een verschil van 1 of van 2; 2°. die, welke in den noemer voorkomen, evenzoo tot eene lagere macht; omdat door het differentieeren de eerste machten verlaagd, de tweede verhoogd worden. Vervolgens moeten nog als factoren daarbij gevoegd worden de differentiaalquotienten der verschillende factoren. De ondervinding zal hier wel leeren, hoe in de verschillende voorkomende gevallen die te differentieeren vorm te kiezen zij.

Beginnen wij met de eenvoudigste gevallen, waar $\varphi(x)$ slechts een enkelen vorm bezit, tot eene zekere geheele macht p verheven.

Men heeft door logarithmisch differentieeren

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{\cos x.\sin^{p-3}x}{\Delta^{2n-1}}=\frac{\cos x\,.\,\sin^{p-3}x}{\Delta^{2n-1}}\left\{-\frac{\sin x}{\cos x}+(p-3)\frac{\cos x}{\sin x}-\tfrac{1}{2}(2n-1)\frac{-2k^2\sin x\,.\cos x}{\Delta^2}\right\}=$$

$$=\frac{\sin^{p-4}x}{\Delta^{2n+1}}\{[-\sin^2x+(p-3)(1-\sin^2x)](1-k^2\sin^2x)+(2n-1)k^2\sin^2x.(1-\sin^2x)\}=$$

$$=\frac{\sin^{p-4}x}{\Delta^{2n+1}}\{(p-3)-[(p-2)+(p-2n-2)k^2]\sin^2x+(p-2n-1)k^2\sin^4x\}=..(a_1)$$

$$=\frac{\sin^{p-4}x}{k^2\Delta^{2n+1}}\{-(2n-1)(1-k^2)+[(4n-p)+(p-2n-2)k^2]\Delta^2+(p-2n-1)\Delta^4\}\ ;.(b_1)$$

waar nu de grootheid tusschen haakjes in het tweede lid eerst naar de machten van $\sin x$, dan naar die van Δ is gerangschikt. Wanneer men nu in deze laatste p door $p+4$ vervangt, zal de integratie ons tot de beide herleidingsformulen voeren

$$\int\frac{\sin^p x\,dx}{\Delta^{2n+1}}=\frac{1}{(p-2n-1)k^2}\left\{\frac{\cos x\,.\,\sin^{p-3}x}{\Delta^{2n-1}}+\right.$$

$$\left.+[(p-2)+(p-2n-2)k^2]\int\frac{\sin^{p-2}x\,dx}{\Delta^{2n+1}}-(p-3)\int\frac{\sin^{p-4}x\,dx}{\Delta^{2n+1}}\right\},\ldots(A_1)$$

$$=\frac{1}{(2n-1)(1-k^2)}\left\{-\frac{k^2\cos x\,.\,\sin^{p+1}x}{\Delta^{2n-1}}+\right.$$

$$\left.+[(4n-p-4)+(p-2n+2)k^2]\int\frac{\sin^p x\,dx}{\Delta^{2n-1}}+(p-2n+3)\int\frac{\sin^p x\,dx}{\Delta^{2n-3}}\right\}..(B_1)$$

Evenzoo is

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{\sin x.\cos^{p-3}x}{\Delta^{2n-1}}=\frac{\sin x\,.\cos^{p-3}x}{\Delta^{2n-1}}\left\{\frac{\cos x}{\sin x}-(p-3)\frac{\sin x}{\cos x}-\tfrac{1}{2}(2n-1)\frac{-2k^2\sin x\,.\cos x}{\Delta^2}\right\}=$$

$$=\frac{\cos^{p-4}x}{\Delta^{2n+1}}\{[\cos^2x-(p-3)(1-\cos^2x)](1-k^2+k^2\cos^2x)+(2n-1)k^2\cos^2x.(1-\cos^2x)\}=$$

$$=\frac{\cos^{p-4}x}{\Delta^{2n+1}}\{-(p-3)(1-k^2)+[(p-2)-(p-n-2)2k^2]\cos^2x+(p-2n-1)k^2\cos^4x\}=.(a_2)$$

$$=\frac{\cos^{p-4}x}{k^2\Delta^{2n+1}}\{-(2n-1)(1-k^2)+[(4n-p)-(n-1)2k^2]\Delta^2+(p-2n-1)\Delta^4\};..(b_2)$$

*

en hieruit leidt men af, wanneer men eerst in (b_2) p vervangt door $p+4$,

$$\int\frac{\cos^p x dx}{\Delta^{2n+1}}=\frac{1}{(p-2n-1)k^2}\left\{\frac{\sin x \,.\, \cos^{p-3} x}{\Delta^{2n-1}}-\right.$$

$$\left.-[(p-2)-(p-n-2)2k^2]\int\frac{\cos^{p-2}x dx}{\Delta^{2n+1}}+(p-3)(1-k^2)\int\frac{\cos^{p-4}x dx}{\Delta^{2n+1}}\right\}, \,.\,.(A_2)$$

$$=\frac{1}{(2n-1)(1-k^2)}\left\{-\frac{k^2 \sin x \,.\, \cos^{p+1} x}{\Delta^{2n-1}}+\right.$$

$$\left.+[(4n-p-4)-(n-1)2k^2]\int\frac{\cos^p x\, d x}{\Delta^{2n-1}}+(p-2n+3)\int\frac{\cos^p x\, d x}{\Delta^{2n-3}}\right\} \,.\,.\,.(B_2)$$

En nog

$$\frac{d}{dx}.\frac{tang^{p-2} x}{\sin x.\cos x.\Delta^{2n-1}}=\frac{tang^{p-2} x}{\sin x.\cos x.\Delta^{2n-1}}\left\{(p-2)\frac{1}{\cos^2 x.tang x}-\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}-\tfrac{1}{2}(2n-1)\frac{-2k^2 \sin x.\cos x}{\Delta^2}\right\}=$$

$$=\frac{tang^{p-2}x}{\Delta^{2n+1}}\left\{\left[(p-2)\frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right](1-k^2\sin^2 x)+(2n-1)k^2\right\}=$$

$$=\frac{tang^{p-4}x}{\Delta^{2n+1}}\left\{\left[(p-2)\frac{1}{\cos^2 x}-1+tang^2 x\right]\left(\frac{1}{\cos^2 x}-k^2 tg^2 x\right)+(2n-1)k^2 tang^2 x\right\},$$

of daar $\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x=1+tg^2 x$ is,

$$=\frac{tang^{p-4}x}{\Delta^{2n+1}}\{(p-3)+[(p-2)2+(2n-p+2)k^2]tang^2 x+(p-1)(1-k^2)tang^4 x\}; \,.\,(a_3)$$

waaruit

$$\int\frac{tang^p x\, d x}{\Delta^{2n+1}}=\frac{1}{(p-1)(1-k^2)}\left\{\frac{tang^{p-2} x}{\sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta^{2n-1}}-\right.$$

$$\left.-[(p-2)2+(2n-p+2)k^2]\int\frac{tang^{p-2} x\, d x}{\Delta^{2n+1}}-(p-3)\int\frac{tang^{p-4} x\, d x}{\Delta^{2n+1}}\right\} \,.\,.\,.(A_3)$$

Eene herleidingsformule (b_3) is hier niet te vinden dan met den factor $\dfrac{tang^{p-2} x}{\sin^2 x \,.\, \cos^2 x \,.\, \Delta^{2n+1}}=\dfrac{tang^{p-4} x+2\, tang^{p-2} x+tang^p x}{\Delta^{2n+1}}$; en deze kan niet tot eene herleidingsformule (B_3) voeren.

Uit den vorm der formule (A_3) blijkt, dat het geval van $p=1$ hier is uitgesloten.

3. Dergelijke herleidingsformulen kan men ook afleiden voor goniometrische factoren van den halven hoek, dat is voor $sin^p \frac{1}{2} x$, $cos^p \frac{1}{2} x$ en $tang^p \frac{1}{2} x$. Vooreerst heeft men daartoe, altijd naar de boven gevolgde methode,

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{cos\frac{1}{2}x . sin^{p-5}\frac{1}{2}x}{\Delta^{2n-1}} = \frac{cos\frac{1}{2}x . sin^{p-5}\frac{1}{2}x}{\Delta^{2n-1}} \left\{ -\frac{1}{2}\frac{sin\frac{1}{2}x}{cos\frac{1}{2}x} + (p-5)\frac{1}{2}\frac{cos\frac{1}{2}x}{sin\frac{1}{2}x} - (2n-1)\frac{1}{2}\frac{-2k^2 sin x . cos x}{\Delta^2} \right\} =$$

$$= \frac{sin^{p-6}\frac{1}{2}x}{2\Delta^{2n+1}} \{[-sin^2\tfrac{1}{2}x + (p-5)(1-sin^2\tfrac{1}{2}x)](1-4k^2 sin^2\tfrac{1}{2}x + 4k^2 sin^4\tfrac{1}{2}x) +$$

$$+ (2n-1)k^2 . 4 sin^2\tfrac{1}{2}x . (1-sin^2\tfrac{1}{2}x)(1-2 sin^2\tfrac{1}{2}x)\} =$$

$$= \frac{sin^{p-6}\frac{1}{2}x}{2\Delta^{2n+1}} \{(p-5) - [(p-4) + (p-2n-4)4k^2] sin^2\tfrac{1}{2}x +$$

$$+ (p-3n-3)8k^2 sin^4\tfrac{1}{2}x + (4n-p+2)4k^2 sin^6\tfrac{1}{2}x\}; \quad \ldots\ldots (a_4)$$

derhalve

$$\int \frac{sin^p \frac{1}{2}x\, dx}{\Delta^{2n+1}} = \frac{1}{(4n-p+2)4k^2} \left\{ \frac{sin x . sin^{p-6}\frac{1}{2}x}{\Delta^{2n-1}} - (p-3n-3)8k^2 \int \frac{sin^{p-2}\frac{1}{2}x\, dx}{\Delta^{2n+1}} + \right.$$

$$\left. + [(p-4) + (p-2n-4)4k^2] \int \frac{sin^{p-4}\frac{1}{2}x\, dx}{\Delta^{2n+1}} - (p-5) \int \frac{sin^{p-6}\frac{1}{2}x\, dx}{\Delta^{2n+1}} \right\} \ldots (A_4)$$

Ook hier, en evenzeer bij de twee volgende gevallen, is de herleiding (*b*) niet te vinden; want daar $2\, sin^2 \frac{1}{2} x = 1 - cos\, x$, $2\, cos^2 \frac{1}{2} x = 1 + cos\, x$ is, en wegens den factor $cos\, x$ in den laatsten term van de herleiding, zullen er nog immer termen in die herleiding overblijven met den vreemden en niet te verwijderen factor $cos\, x$.

Vervolgens is

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{sin\frac{1}{2}x . cos^{p-5}\frac{1}{2}x}{\Delta^{2n-1}} = \frac{sin\frac{1}{2}x . cos^{p-5}\frac{1}{2}x}{\Delta^{2n-1}} \left\{ \frac{1}{2}\frac{cos\frac{1}{2}x}{sin\frac{1}{2}x} - (p-5)\frac{1}{2}\frac{sin\frac{1}{2}x}{cos\frac{1}{2}x} - (2n-1)\frac{1}{2}\frac{-2k^2 sin x . cos x}{\Delta^2} \right\} =$$

$$= \frac{cos^{p-6}\frac{1}{2}x}{2\Delta^{2n+1}} \{[cos^2\tfrac{1}{2}x - (p-5)(1-cos^2\tfrac{1}{2}x)](1-4k^2 cos^2\tfrac{1}{2}x + 4k^2 cos^4\tfrac{1}{2}x) +$$

$$+ (2n-1)k^2 . 4 cos^2\tfrac{1}{2}x . (1-cos^2\tfrac{1}{2}x)(2 cos^2\tfrac{1}{2}x - 1)\} =$$

$$= \frac{cos^{p-6}\frac{1}{2}x}{2\Delta^{2n+1}} \{-(p-5) + [(p-4) + (p-2n-4)4k^2] cos^2\tfrac{1}{2}x -$$

$$- (p-3n-3)8k^2 cos^4\tfrac{1}{2}x + (p-4n-2)4k^2 cos^6\tfrac{1}{2}x\}; \quad \ldots\ldots (a_5)$$

waaruit men afleidt

$$\int\frac{\cos^p\frac{1}{2}x\,dx}{\Delta^{2n+1}}=\frac{1}{(4n-p+2)4k^2}\left\{-\frac{\sin x\,.\cos^{p-6}\frac{1}{2}x}{\Delta^{2n-1}}+(3n-p+3)8k^2\int\frac{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x\,dx}{\Delta^{2n+1}}+\right.$$

$$\left.+[(p-4)+(p-2n-4)4k^2]\int\frac{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x\,dx}{\Delta^{2n+1}}-(p-5)\int\frac{\cos^{p-6}\frac{1}{2}x\,dx}{\Delta^{2n+1}}\right\}\ldots(A_5)$$

Ten laatste heeft men nog

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{\tang^{p-4}\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^3\frac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}}=\frac{\tang^{p-4}\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^3\frac{1}{2}x\,.\Delta^{2n-1}}\left\{(p-4)\tfrac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}x\,.\tang\frac{1}{2}x}-\tfrac{1}{2}\frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}+\right.$$

$$\left.+3\,.\tfrac{1}{2}\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x}-(2n-1)\tfrac{1}{2}\frac{-2k^2\sin x\,.\cos x}{\Delta^2}\right\}=$$

$$=\frac{\tang^{p-6}\frac{1}{2}x}{2\Delta^{2n+1}}\left\{\left[(p-4)\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}x}-1+3tg^2\tfrac{1}{2}x\right]\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}x}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}x}-4k^2\sin^2\tfrac{1}{2}x\right)+\right.$$

$$\left.+(2n-1)4k^2\left(2-\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}x}\right)\tang^2\tfrac{1}{2}x\right\}=$$

$$=\frac{\tang^{p-6}\frac{1}{2}x}{2\Delta^{2n+1}}\{(p-5)+[(3p-11)-(p-2n-4)4k^2]\tang^2\tfrac{1}{2}x+$$

$$+[(3p-7)-(p+2n-2)4k^2]\tang^4\tfrac{1}{2}x+(p-1)\tang^6\tfrac{1}{2}x\};\ldots\ldots(a_6)$$

en hieruit volgt de herleidingsformule

$$\int\frac{\tang^p\frac{1}{2}x\,dx}{\Delta^{2n+1}}=\frac{1}{p-1}\left\{\frac{2\tang^{p-4}\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^3\frac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}}-[(3p-7)-(p+2n-2)4k^2]\int\frac{\tang^{p-2}\frac{1}{2}x\,dx}{\Delta^{2n+1}}-\right.$$

$$\left.-[(3p-11)-(p-2n-4)4k^2]\int\frac{\tang^{p-4}\frac{1}{2}x\,dx}{\Delta^{2n+1}}-(p-5)\int\frac{\tang^{p-6}\frac{1}{2}x\,dx}{\Delta^{2n+1}}\right\},\ldots(A_6)$$

die wederom niet meer geldt voor $p=1$.

Nog behoeven wij eene herleidingsformule voor zulke integralen, die alleen de Δ en geen goniometrischen factor bevatten; wij vinden haar volgens onze methode op de volgende wijze.

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{\sin x\,.\cos x}{\Delta^{2n-1}}=\frac{\sin x\,.\cos x}{\Delta^{2n-1}}\left\{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}-(2n-1)\tfrac{1}{2}\frac{-2k^2\sin x\,.\cos x}{\Delta^2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\Delta^{2n+1}}\{(\cos^2x-\sin^2x)\Delta^2+(2n-1)k^2\sin^2x\,.\cos^2x\}=$$

$$=\frac{1}{k^2\Delta^{n+1}}\{-(2n-1)(1-k^2)+(n-1)(2-k^2)2\Delta^2-(2n-3)\Delta^4\};\ldots(b_7)$$

derhalve

$$\int\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(1-k^2)}\left\{-\frac{k^2 sinx.cosx}{\Delta^{2n-1}}+(n-1)(2-k^2)2\int\frac{dx}{\Delta^{2n-1}}-(2n-3)\int\frac{dx}{\Delta^{2n-3}}\right\}\ldots B_7)$$

4. In alle vorige herleidingsformulen zijn de n en p volkomen onbepaald gebleven; men kan ze derhalve ook negatief nemen. Beginnen wij met de n, waardoor de Δ uit den noemer in den teller verschijnt. In alle herleidingsformulen (A) vervange men daartoe n door $-n$: in de overeenkomstige formulen (B) daarentegen, die omgekeerd moeten worden, stelle men $2-n$ voor n in de plaats; op deze wijze zal er komen

$$\int sin^p x.\Delta^{2n-1}dx=\frac{1}{(p+2n-1)k^2}\left\{cosx.sin^{p-3}x.\Delta^{2n+1}+[(p-2)+(p+2n-2)k^2]\int sin^{p-2}x.\Delta^{2n-1}dx-\right.$$
$$\left.-(p-3)\int sin^{p-4}x.\Delta^{2n-1}dx\right\},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A_8)$$

$$=\frac{1}{p+2n-1}\left\{k^2 cosx.sin^{p+1}x.\Delta^{2n-3}+[(4n+p-4)-(p+2n-2)k^2]\int sin^p x.\Delta^{2n-3}dx-\right.$$
$$\left.-(2n-3)(1-k^2)\int sin^p x.\Delta^{2n-5}dx\right\},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B_8)$$

$$\int cos^p x.\Delta^{2n-1}dx=\frac{1}{(p+2n-1)k^2}\left\{sinx.cos^{p-3}x.\Delta^{2n+1}-[(p-2)-(p+n-2)2k^2]\int cos^{p-2}x.\Delta^{2n-1}dx+\right.$$
$$\left.+(p-3)(1-k^2)\int cos^{p-4}x.\Delta^{2n-1}dx\right\},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A_9)$$

$$=\frac{1}{p+2n-1}\left\{k^2 sinx.cos^{p+1}x.\Delta^{2n-3}+[(4n+p-4)-(n-1)2k^2]\int cos^p x.\Delta^{2n-3}dx-\right.$$
$$\left.-(2n-3)(1-k^2)\int cos^p x.\Delta^{2n-5}dx\right\},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B_9)$$

$$\int tang^p x.\Delta^{2n-1}dx=\frac{1}{(p-1)(2-k^2)}\left\{\frac{tg^{p-2}x}{sinx.cosx}\Delta^{2n+1}-[(p-2)2-(2n+p-2)k^2]\int tang^{p-2}x.\Delta^{2n-1}dx-\right.$$
$$\left.-(p-3)\int tang^{p-4}x.\Delta^{2n-1}dx\right\},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A_{10})$$

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx = \frac{1}{(4n+p-2)4k^2}\Big\{-\sin x.\sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n+1}+(p+3n-3)8k^2\int \sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx -$$

$$-[(p-4)+(p+2n-4)4k^2]\int \sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx + (p-5)\int \sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx\Big\}, \quad (A_{11})$$

$$\int \cos^p \tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx = \frac{1}{(4n+p-2)4k^2}\Big\{\sin x.\cos^{p-3}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n+1}+(3n+p-3)8k^2\int \cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx -$$

$$-[(p-4)+(p+2n-4)4k^2]\int \cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx + (p-5)\int \cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx\Big\}, \quad (A_{12})$$

$$\int \mathrm{tang}^p \tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx = \frac{1}{p-1}\Big\{\frac{2\,\mathrm{tang}^{p-4}\tfrac{1}{2}x}{\sin\tfrac{1}{2}x.\cos^3\tfrac{1}{2}x}\Delta^{2n+1}-[(3p-7)-(p-2n-2)4k^2]\int \mathrm{tang}^{p-2}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx -$$

$$-[(3p-11)-(p+2n-4)4k^2]\int \mathrm{tang}^{p-4}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx-(p-5)\int \mathrm{tang}^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx\Big\}, \quad (A_{13})$$

$$\int \Delta^{2n-1}dx = \frac{1}{2n-1}\Big\{k^2\sin x.\cos x.\Delta^{2n-3}+(n-1)(2-k^2)2\int \Delta^{2n-3}dx-(2n-3)(1-k^2)\int \Delta^{2n-5}dx\Big\} \quad (B_{14})$$

5. Vervolgens kan ook p negatief genomen worden. Voor ons doel echter zijn de formulen ongeschikt, waar een sinus of een tangens in den noemer voorkomt; wel kan men zulke gebruiken, waar in den noemer een cosinus komt. Derhalve vervange men p door $-p$ in (B_2) en (B_9). Bij de overeenkomstige (A_2) en (A_9), die moeten worden omgekeerd, neme men $4-p$ voor p; en om dezelfde reden stelle men in de herleidingsformulen (A_5) en (A_{12}), $6-p$ voor p in de plaats, omdat die evenzeer moeten worden omgekeerd. Langs dezen weg verkrijgen wij nog

$$\int \frac{dx}{\cos^p x.\Delta^{2n+1}} = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)}\Big\{\frac{\sin x}{\cos^{p-1}x.\Delta^{2n-1}}+[(p-2)-(p+n-2)2k^2]\int\frac{dx}{\cos^{p-2}x.\Delta^{2n+1}} +$$

$$+(p+2n-3)k^2\int\frac{dx}{\cos^{p-1}x.\Delta^{2n+1}}\Big\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (A_{15})$$

$$= \frac{1}{(2n-1)(1-k^2)}\Big\{-\frac{k^2\sin x}{\cos^{p-1}x.\Delta^{2n-1}}+[(4n+p-4)-(n-1)2k^2]\int\frac{dx}{\cos^p x.\Delta^{2n-1}} -$$

$$-(p+2n-3)\int\frac{dx}{\cos^p x.\Delta^{2n-3}}\Big\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (B_{15})$$

$$\int \frac{dx}{\cos^p \frac{1}{2}x . \Delta^{2n+1}} = \frac{1}{p-1} \left\{ \frac{\sin x}{\cos^p \frac{1}{2} x . \Delta^{2n-1}} + [(p-2)+(2n+p-2)4k^2] \int \frac{dx}{\cos^{p-2} \frac{1}{2} x . \Delta^{2n+1}} - \right.$$

$$\left. -(3n+p-3)8k^2 \int \frac{dx}{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x . \Delta^{2n+1}} + (4n+p-4)4k^2 \int \frac{dx}{\cos^{p-6}\frac{1}{2}x . \Delta^{2n+1}} \right\}, \ldots (A_{16})$$

$$\int \frac{\Delta^{2n-1} dx}{\cos^p x} = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)} \left\{ \frac{\sin x}{\cos^{p-1} x} \Delta^{2n+1} + [(p-2)-(p-n-2)2k^2] \int \frac{\Delta^{2n-1} dx}{\cos^{p-2} x} + \right.$$

$$\left. + (p-2n-3)k^2 \int \frac{\Delta^{2n-1} dx}{\cos^{p-4} x} \right\}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A_{17})$$

$$= \frac{1}{2n-p-1} \left\{ \frac{k^2 \sin x}{\cos^{p-1} x} \Delta^{2n-3} + [(4n-p-4)-(n-1)2k^2] \int \frac{\Delta^{2n-3} dx}{\cos^p x} - \right.$$

$$\left. - (2n-3)(1-k^2) \int \frac{\Delta^{2n-5} dx}{\cos^p x} \right\}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B_{17})$$

$$\int \frac{\Delta^{2n-1} dx}{\cos^p \frac{1}{2} x} = \frac{1}{p-1} \left\{ \frac{\sin x}{\cos^p \frac{1}{2} x} \Delta^{2n+1} + [(p-2)-(2n-p+2)4k^2] \int \frac{\Delta^{2n-1} dx}{\cos^{p-2} \frac{1}{2} x} + \right.$$

$$\left. + (3n-p+3)8k^2 \int \frac{\Delta^{2n-1} dx}{\cos^{p-4} \frac{1}{2} x} - (4n-p+4)4k^2 \int \frac{\Delta^{2n-1} dx}{\cos^{p-6} \frac{1}{2} x} \right\} . . (A_{18})$$

6. Uit deze algemeene herleidingsformulen kan men nu zulke afleiden, waar de Δ slechts tot de eerste macht voorkomt; daarbij zal men dan alleen van de formulen (A), niet van de formulen (B), gebruik kunnen maken. Wil men die eerste macht van Δ in den noemer houden, dan stelle men $n = 0$ in de vergelijkingen (A_1) tot (A_6), (A_{15}) en (A_{16}), en verkrijgt alzoo de eenvoudiger uitkomsten

$$\int \sin^p x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-1)k^2} \left\{ \cos x . \sin^{p-3} x . \Delta + (p-2)(1+k^2) \int \sin^{p-2} x \frac{dx}{\Delta} - (p-3) \int \sin^{p-4} x \frac{dx}{\Delta} \right\}, \ldots (C_1)$$

$$\int \cos^p x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-1)k^2} \left\{ \sin x . \cos^{p-3} x . \Delta - (p-2)(1-2k^2) \int \cos^{p-2} x \frac{dx}{\Delta} + (p-3)(1-k^2) \int \cos^{p-4} x \frac{dx}{\Delta} \right\}, \ldots (C_2)$$

$$\int \tan g^p x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)} \left\{ \frac{\tan g^{p-2} x}{\sin x . \cos x} \Delta - (p-2)(2-k^2) \int \tan g^{p-2} \frac{dx}{\Delta} - (p-3) \int \tan g^{p-4} x \frac{dx}{\Delta} \right\}, \ldots (C_3)$$

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-2)4k^2} \left\{ - \sin x . \sin^{p-6} \tfrac{1}{2} x . \Delta + (p-3)8k^2 \int \sin^{p-2} \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} - \right.$$

$$\left. - (p-4)(1+4k^2) \int \sin^{p-4} \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} + (p-5) \int \sin^{p-6} \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} \right\}, \ldots (C_4)$$

$$\int \cos^p \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-2)\,4\,k^2} \Big\{ \sin x \,.\, \cos^{p-6} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta + (p-3)\,8\,k^2 \int \cos^{p-2} \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} -$$

$$- (p-4)(1+4k^2) \int \cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} + (p-5) \int \cos^{p-6} \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} \Big\}, \quad \ldots (C_5)$$

$$\int \tang^p \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{p-1} \Big\{ \frac{2 \tang^{p-4} \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x \,.\, \cos^3 \frac{1}{2} x} \Delta - [(3p-7)-(p-2)\,4\,k^2] \int \tang^{p-2} \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} -$$

$$-[(3p-11)-(p-4)4k^2] \int \tang^{p-4} \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} - (p-5) \int \tang^{p-6} \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} \Big\}, \ldots (C_6)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^p x . \Delta} = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)} \Big\{ \frac{\sin x}{\cos^{p-1} x} \Delta + (p-2)(1-2k^2) \int \frac{dx}{\cos^{p-2} x . \Delta} + (p-3)k^2 \int \frac{dx}{\cos^{p-4} x . \Delta} \Big\}, \ldots (C_7)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^p \frac{1}{2} x . \Delta} = \frac{1}{p-1} \Big\{ \frac{\sin x}{\cos^p \frac{1}{2} x} \Delta + (p-2)(1+4k^2) \int \frac{dx}{\cos^{p-2} \frac{1}{2} x . \Delta} - (p-3)\,8\,k^2 \int \frac{dx}{\cos^{p-4} \frac{1}{2} x . \Delta} +$$

$$+ (p-4)\,4\,k^2 \int \frac{dx}{\cos^{p-6} \frac{1}{2} x \,.\, \Delta} \Big\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (C_8)$$

Wil men daarentegen de Δ in den teller brengen, zoo kan men in de herleidingsvergelijkingen (A_8) tot (A_{13}) en in (A_{17}) en (A_{18}) $n = 1$ stellen. Dit levert ons de gewenschte uitkomsten

$$\int \sin^p x . \Delta dx = \frac{1}{(p+1)k^2} \Big\{ \cos x . \sin^{p-3} x . \Delta^3 + [(p-2)+pk^2] \int \sin^{p-2} x . \Delta dx - (p-3) \int \sin^{p-4} x . \Delta dx \Big\}, . (D_1)$$

$$\int \cos^p x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{(p+1)\,k^2} \Big\{ \sin x \,.\, \cos^{p-3} x \,.\, \Delta^3 - [(p-2)-(p-1)\,2k^2] \int \cos^{p-2} x \,.\, \Delta\, dx +$$

$$+ (p-3)(1-k^2) \int \cos^{p-4} x \,.\, \Delta\, dx \Big\}, \ldots\ldots\ldots\ldots (D_2)$$

$$\int \tang^p x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)} \Big\{ \frac{\tang^{p-2} x}{\sin x \,.\, \cos x} \Delta^3 - [(p-2)\,2 - pk^2] \int \tang^{p-2} x \,.\, \Delta\, dx -$$

$$- (p-3) \int \tang^{p-4} x \,.\, \Delta\, dx \Big\}, \ldots\ldots\ldots\ldots (D_3)$$

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{(p+2)\,4\,k^2} \Big\{ - \sin x \,.\, \sin^{p-6} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta^3 + 8\,p\,k^2 \int \sin^{p-2} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx -$$

$$-[(p-4)+(p-2)4k^2] \int \sin^{p-4} \tfrac{1}{2} x . \Delta dx + (p-5) \int \sin^{p-6} \tfrac{1}{2} x . \Delta dx \Big\}, . . (D_4)$$

$$\int cos^p \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{(p+2)\,4\,k^2} \Big\{ sin\, x \,.\, cos^{p-6} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta^3 + 8\,p\,k^2 \int cos^{p-2} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx -$$

$$-[(p-4)+(p-2)4k^2]\int cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x.\Delta dx+(p-5)\int cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\Delta dx\Big\}, \ldots (D_5)$$

$$\int tang^p \tfrac{1}{2} x \,.\Delta\, dx = \frac{1}{p-1}\Big\{\frac{2\, tg^{p-4}\tfrac{1}{2}x}{sin\tfrac{1}{2}x.cos^3\tfrac{1}{2}x}\Delta^3 - [(3p-7)-(p-4)\,4k^2]\int tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,.\Delta\, dx -$$

$$-[(3p-11)-(p-2)4k^2]\int tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x.\Delta dx-(p-5)\int tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\Delta dx\Big\}, \ldots (D_6)$$

$$\int\frac{\Delta dx}{cos^p x}=\frac{1}{(p-1)(1-k^2)}\Big\{\frac{sin x}{cos^{p-1}x}\Delta^3+[(p-2)-(p-3)2k^2]\int\frac{\Delta dx}{cos^{p-2}x}+(p-5)k^2\int\frac{\Delta dx}{cos^{p-4}x}\Big\}, \ldots (D_7)$$

$$\int\frac{\Delta dx}{cos^p\tfrac{1}{2}x}=\frac{1}{p-1}\Big\{\frac{sin\, x}{cos^p\tfrac{1}{2}x}\Delta^3+[(p-2)+(p-4)\,4k^2]\int\frac{\Delta dx}{cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x}-(p-6)\,8k^2\int\frac{\Delta dx}{cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x}+$$

$$+(p-8)\,4k^2\int\frac{\Delta dx}{cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x}\Big\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (D_8)$$

7. Om deze herleidingsformulen met vrucht te kunnen gebruiken, moet men eerst de zoogenaamde eindintegralen kennen. Waar de goniometrische factor onder het integraalteeken eene functie van x was, zien wij, dat wij aan twee zulke eindintegralen genoeg hebben, dat is, alsdan de overige achtereenvolgens kunnen afleiden. Waar er echter goniometrische functiën van $\frac{1}{2}x$ voorkomen, zijn er telkens drie zulke eindintegralen noodig, om de verdere te kunnen berekenen. Voorts zij men indachtig, dat deze eindintegralen, en dus ook de algemeene integralen zelve, voor p even tot elliptische voeren, voor p oneven echter niet, zoolang er sprake is van functiën van de geheele x; voor functiën van $\frac{1}{2}x$ gaat dit niet evenzeer door. Men vergete hierbij niet, dat overal p telkens met 2 vermindert.

Voor de herleidingsformulen (C) zijn de eindintegralen, als men $F(k,x)$ en $E(k,x)$ eenvoudig door F en E voorstelt,

$$\int\frac{\Delta}{dx}=F\,, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma_1)$$

$$\int sin^2 x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{k^2}\int\frac{1-\Delta^2}{\Delta}dx=\frac{1}{k^2}(F-E), \ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma_2)$$

$$\int cos^2 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k^2}\int \frac{\Delta^2 - (1-k^2)}{\Delta} dx = \frac{1}{k^2}\{E - (1-k^2) F\} \; ; \; \ldots \ldots \ldots \ldots (\gamma_3)$$

$$\frac{d}{dx} . tang\, x . \Delta = \frac{\Delta}{cos^2 x} + tang\, x \frac{-2k^2 sin x . cos x}{2\Delta} = \frac{1-k^2 sin^2 x}{\Delta\, cos^2 x} - \frac{k^2 sin^2 x}{\Delta} = \frac{-k^2 tg^2 x}{\Delta} +$$

$$+ \frac{1 + tg^2 x}{\Delta} - \frac{k^2 sin^2 x}{\Delta} = \frac{(1-k^2) tang^2 x + (1-k^2 sin^2 x)}{\Delta};$$

dus

$$\int tang^2 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{1-k^2}\{-E + tang\, x . \Delta\} . \ldots \ldots \ldots \ldots (\gamma_4)$$

Stelt men nu in (C_1), (C_2) en (C_3), $p = 4$, substitueert men overal (γ_1), en verder respectieve (γ_2), (γ_3), (γ_4), zoo komt er

$$\int sin^4 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{3k^2}\left\{ sin\, x . cos\, x . \Delta + 2(1+k^2)\int sin^2 x \frac{dx}{\Delta} - \int\frac{dx}{\Delta}\right\} =$$

$$= \frac{1}{3k^4}\{(2+k^2)F - (1+k^2)2E + k^2 sin\, x . cos\, x . \Delta\} \; , \ldots \ldots \ldots \ldots (\gamma_5)$$

$$\int cos^4 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{3k^2}\left\{ sin\, x . cos\, x . \Delta - 2(1-2k^2)\int cos^2 x \frac{dx}{\Delta} + (1-k^2)\int\frac{dx}{\Delta}\right\} =$$

$$= \frac{1}{3k^4}\{(2-3k^2)(1-k^2)F - (1-2k^2)2E + k^2 sin\, x . cos\, x . \Delta\} , \ldots \ldots \ldots (\gamma_6)$$

$$\int tang^4 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{3(1-k^2)}\left\{\frac{tang^2 x}{sin\, x . cos x}\Delta - 2(2-k^2)\int tang^2 x \frac{dx}{\Delta} - \int\frac{dx}{\Delta}\right\} =$$

$$= \frac{1}{3(1-k^2)^2}\{(2-k^2)2E - (1-k^2)F + [(1-k^2) tang^2 x - (3-k^2)] tang x . \Delta\} ; \ldots \ldots (\gamma_7)$$

$$\int sin\, x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k} L \frac{1+k}{k\, cos\, x + \Delta} \; , \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (\gamma_8)$$

$$\int cos\, x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k} Bg\, sin\,(k\, sin\, x) \; , \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (\gamma_9)$$

$$\int tang\, x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{\sqrt{1-k^2} + \Delta}{(1+\sqrt{1-k^2}) cos\, x} \; , \ldots \ldots \ldots (\gamma_{10})$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cdot \Delta} = L \frac{\Delta - \cos x}{\sin x}, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (\gamma_{11})$$

$$\int \frac{dx}{\cos x \cdot \Delta} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{\sqrt{1-k^2}\sin x + \Delta}{\cos x}, \ldots \ldots \ldots \ldots (\gamma_{12})$$

$$\int \frac{dx}{\tan g\, x \cdot \Delta} = L \frac{2 \sin x}{1+\Delta}, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (\gamma_{13})$$

$$\int \sin^2 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \tfrac{1}{2} \int \frac{1-\cos x}{\Delta} dx = \frac{1}{2}\left\{F - \frac{1}{k} Bg \sin (k \sin x)\right\}, \ldots \ldots (\gamma_{14})$$

$$\int \cos^2 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \tfrac{1}{2} \int \frac{1+\cos x}{\Delta} dx = \frac{1}{2}\left\{F + \frac{1}{k} Bg \sin (k \sin x)\right\}, \ldots \ldots \ldots (\gamma_{15})$$

door middel van (γ_1) en (γ_9);

$$\frac{d}{dx}.2\tan g \tfrac{1}{2}x.\Delta = \frac{\Delta}{\cos^2 \frac{1}{2}x} + 2\tan g \tfrac{1}{2}x \frac{-2\,k^2 \sin x.\cos x}{2\Delta} = \frac{\Delta^2 - k^2 \sin^2 x.\cos x}{\cos^2 \frac{1}{2} x . \Delta} = \frac{\Delta^2 - (1-\Delta^2)\cos x}{\cos^2 \frac{1}{2} x . \Delta} =$$
$$= \frac{-\cos x + (1+\cos x)\Delta^2}{\cos^2 \frac{1}{2} x . \Delta} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} x - \cos^2 \frac{1}{2} x + 2\cos^2 \frac{1}{2} x . \Delta^2}{\cos^2 \frac{1}{2} x . \Delta},$$

dus

$$\int \tan g^2 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = F - 2E + 2 \tan g \tfrac{1}{2} x . \Delta; \ldots \ldots \ldots \ldots (\gamma_{16})$$

$$\int \sin^4 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \tfrac{1}{4} \int \frac{(1-\cos x)^2}{\Delta} dx = \frac{1}{4k^2}\{E - (1-2k^2)F - 2k\, Bg \sin (k \sin x)\}, \ldots (\gamma_{17})$$

$$\int \cos^4 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \tfrac{1}{4} \int \frac{(1+\cos x)^2}{\Delta} dx = \frac{1}{4k^2}\{E - (1-2k^2)F + 2k\, Bg \sin (k \sin x)\}, \ldots (\gamma_{18})$$

naar (γ_1), (γ_9), (γ_3). Stel in (C_6) $p = 4$, dan is, met gebruik van (γ_1), (γ_{16}) en (γ_{22}),

$$\int \tan g^4 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{3}\left\{\frac{2\Delta}{\sin \frac{1}{2} x . \cos^3 \frac{1}{2} x} - (5 - 8k^2) \int \tan g^2 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} - \int \frac{dx}{\Delta} + \int \frac{dx}{tg^2 \frac{1}{2} x . \Delta}\right\} =$$
$$= \frac{1}{3}\left\{(1-2k^2)8E - (5-8k^2)F - \frac{2\tan g \frac{1}{2}x}{\cos^2 \frac{1}{2} x}[(1-4k^2) + (1-2k^2)2\cos x]\Delta\right\}; \ldots (\gamma_{19})$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{1}{2} x \,.\, \Delta} = \int \frac{1 + \cot^2 \frac{1}{2} x}{\Delta} dx = 2(F - E - \cot \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta), \ldots\ldots (\gamma_{20})$$

naar (γ_1) en (γ_{22});

$$\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2} x \,.\, \Delta} = \int \frac{1 + \tan^2 \frac{1}{2} x}{\Delta} dx = 2(F - E + \tan \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta), \ldots\ldots (\gamma_{21})$$

naar (γ_1) en (γ_{16});

$$\frac{d}{dx} . 2 \cot \tfrac{1}{2} x . \Delta = \frac{-\Delta}{\sin^2 \frac{1}{2} x} + 2 \cot \tfrac{1}{2} x \frac{-2k^2 \sin x . \cos x}{2\Delta} = \frac{-\Delta^2 - k^2 \sin^2 x . \cos x}{\sin^2 \frac{1}{2} x \,.\, \Delta} = \frac{-\Delta^2 - (1 - \Delta^2) \cos x}{\sin^2 \frac{1}{2} x \,.\, \Delta} =$$
$$= \frac{-\cos x - (1 - \cos x) \Delta^2}{\sin^2 \frac{1}{2} x \,.\, \Delta} = \frac{-\cos^2 \frac{1}{2} x + \sin^2 \frac{1}{2} x - 2 \sin^2 \frac{1}{2} x \,.\, \Delta^2}{\sin^2 \frac{1}{2} x \,.\, \Delta},$$

dus

$$\int \frac{dx}{\tan^2 \frac{1}{2} x \,.\, \Delta} = F - 2E - 2 \cot \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta ; \ldots\ldots (\gamma_{22})$$

$$\int \tan \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \int \frac{1 - \cos x}{\sin x} \frac{dx}{\Delta} = L \frac{(1 + \Delta)(\Delta - \cos x)}{2 \sin^2 x}, \ldots\ldots (\gamma_{23})$$

$$\int \frac{dx}{\tan \frac{1}{2} x \,.\, \Delta} = \int \frac{1 + \cos x}{\sin x} \frac{dx}{\Delta} = L \frac{2(\Delta - \cos x)}{1 + \Delta}, \ldots\ldots (\gamma_{24})$$

waarbij (γ_{11}) en (γ_{13}) worden gebruikt;

$$\frac{d}{dx} . \frac{\Delta}{\cos^2 \frac{1}{2} x} = \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^3 \frac{1}{2} x} \Delta + \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} x} \frac{-2k^2 \sin x . \cos x}{2\Delta} = \frac{tg \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} \Delta - \frac{2k^2 tg \frac{1}{2} x . \cos x}{\Delta} =$$
$$= \frac{tg \frac{1}{2} x}{\Delta} \{1 + tg^2 \tfrac{1}{2} x - 4k^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} x - 2k^2 \cos x\} = \frac{tg \frac{1}{2} x}{\Delta} (tg^2 \tfrac{1}{2} x + 1 - 2k^2),$$

dus volgens (γ_{23})

$$\int \tan^3 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} x} \Delta - 1 - (1 - 2k^2) L \frac{(\Delta - \cos x)(1 + \Delta)}{2 \sin^2 x}; \ldots\ldots (\gamma_{25})$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \,.\, \Delta} = \int \frac{1 + tg^2 x}{\Delta} dx = \frac{1}{1 - k^2} \{(1 - k^2) F - E + \tan x \,.\, \Delta\}, \ldots (\gamma_{26})$$

naar (γ_1) en (γ_4). Stel nu in (C_7) en (C_8) $p = 4$, substitueer overal (γ_1) en verder respective (γ_{26}) en (γ_{21}), zoo komt er

$$\int\frac{dx}{\cos^4 x\,.\,\Delta}=\frac{1}{3(1-k^2)}\left\{\frac{\sin x}{\cos^3 x}\Delta+2(1-2k^2)\int\frac{dx}{\cos^2 x\,.\,\Delta}+k^2\int\frac{dx}{\Delta}\right\}=$$

$$=\frac{1}{3(1-k^2)^2}\left\{(2-3k^2)(1-k^2)F-(1-2k^2)2E+[(1-k^2)+(1-2k^2)2\cos^2 x]\frac{\sin x}{\cos^3 x}\Delta\right\},\ldots(\gamma_{27})$$

$$\int\frac{dx}{\cos^4\frac{1}{2}x\,.\,\Delta}=\frac{1}{3}\left\{\frac{\sin x}{\cos^4\frac{1}{2}x}\Delta+2(1+4k^2)\int\frac{dx}{\cos^2\frac{1}{2}x\,.\,\Delta}-8k^2\int\frac{dx}{\Delta}\right\}=$$

$$=\frac{1}{3}\left\{(1+2k^2)4F-(1+4k^2)4E+\frac{2\,tang\,\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}x}[2(1+2k^2)+(1+4k^2)\cos x]\Delta\right\}\ldots(\gamma_{28})$$

Voor de integralen, die oneven machten van $\sin\frac{1}{2}x$ bevatten, heeft men de volgende substitutie noodig, als men de nieuwe standvastigen

$$l=\sqrt{\frac{1+k}{2}},\qquad r=\frac{1}{8k}(1+2k)^2\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha_1)$$

invoert.

$$\cos\tfrac{1}{2}x.\sqrt{2k}=tang\,\tfrac{1}{2}y,\qquad \Delta(k,x)=\frac{\Delta(l,y)}{\cos^2\frac{1}{2}y},\qquad \sin\tfrac{1}{2}x\,dx=\frac{-dy}{\cos^2\frac{1}{2}y.\sqrt{2k}},$$

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}x=\frac{2k-tang^2\frac{1}{2}y}{k},\qquad \cos^2\tfrac{1}{2}y=\frac{1}{1+2k\cos^2\frac{1}{2}x}=\frac{1}{1+k+k\cos x};\ldots(\alpha_2)$$

dus

$$\int\sin\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{-1}{\sqrt{2k}}\int\frac{dy}{\Delta(l,y)}=\frac{-1}{\sqrt{2k}}F(l,y),\ldots\ldots\ldots\ldots(\gamma_{29})$$

$$\int\sin^3\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{-1}{2k\sqrt{2k}}\int\frac{2k-tg^2\frac{1}{2}y}{\Delta(l,y)}dy=\frac{1}{2k\sqrt{2k}}\left\{-2kF(l,y)+F(l,y)-2E(l,y)+2tg\tfrac{1}{2}y.\Delta(l,y)\right\}$$

$$[\text{naar }(\gamma_{16})]=\frac{1}{2k\sqrt{2k}}\left\{(1-2k)F(l,y)-2E(l,y)+\frac{2\cos\frac{1}{2}x.\sqrt{2k}}{1+k+k\cos x}\Delta\right\},\ldots\ldots(\gamma_{30})$$

$$\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\,\Delta}=\frac{2k}{-\sqrt{2k}}\int\frac{1}{2k-tang^2\frac{1}{2}y}\,\frac{dy}{\Delta(l,y)}=-\sqrt{2k}\int\frac{1+\cos y}{(2k-1)+(2k+1)\cos y}\,\frac{dy}{\Delta(l,y)}=$$

$$=\frac{-\sqrt{2k}}{2k+1}\int\left\{1+\frac{2}{(2k-1)+(2k+1)\cos y}\right\}\frac{dy}{\Delta(l,y)}=\frac{-\sqrt{2k}}{1+2k}F(l,y)+\frac{2\sqrt{2k}}{1+2k}\int\frac{(2k-1)-(2k+1)\cos y}{8k-(2k+1)^2\sin^2 y}\,\frac{dy}{\Delta(l,y)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2k}}{1+2k}\left\{-F(l,y)-\frac{1-2k}{4k}\,\Pi(-r,l,y)-\frac{2(1+2k)}{8k-(2k+1)^2\sin^2 y}\,\frac{d.\sin y}{\Delta(l,y)}\right\}=$$

$$=-\frac{\sqrt{2k}}{1+2k}\left\{F(l,y)+\frac{1-2k}{4k}\,\Pi(-r,l,y)\right\}-L\frac{\sin y+2\sqrt{2k}\,\Delta(l,y)}{2\sqrt{2k}(1-r\sin^2 y)}=$$

$$=\frac{-\sqrt{2k}}{1+2k}\left\{F(l,y)+\frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,y)\right\}-L\frac{(\Delta+\cos\frac{1}{2}x)}{\sqrt{1+(1-r)4k\cos^2\frac{1}{2}x+4k^2\cos^4\frac{1}{2}x}}=$$

$$=\frac{-\sqrt{2k}}{1+2k}\left\{F(l,y)+\frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,y)\right\}-\tfrac{1}{2}L\frac{(\Delta+\cos\frac{1}{2}x)^2}{\sqrt{(1+k-2r)2k(1+\cos x)}+\Delta^2}\ldots(\gamma_{31})$$

Voor de integralen, die oneven machten van $\cos\frac{1}{2}x$ bevatten, heeft men, bij dezelfde waarden van l en r,

$$\sin\tfrac{1}{2}x.\sqrt{2k}=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}z,\qquad \Delta(k,x)=\frac{\Delta(l,z)}{\cos^2\frac{1}{2}z},\qquad \cos\tfrac{1}{2}x\,dx=\frac{dz}{\cos^2\frac{1}{2}z.\sqrt{2k}},$$

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}x=\frac{2k-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}z}{k},\qquad \cos^2\tfrac{1}{2}z=\frac{1}{1+2k\sin^2\frac{1}{2}x}=\frac{1}{1+k-k\cos x};\ldots(\alpha_3)$$

derhalve

$$\int\cos\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{\sqrt{2k}}\int\frac{dz}{\Delta(l,z)}=\frac{1}{\sqrt{2k}}F(l,z),\ \ldots\ldots\ldots(\gamma_{32})$$

$$\int\cos^3\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{2k\sqrt{2k}}\int\frac{2k-tg^2\frac{1}{2}z}{\Delta(l,z)}dz=\frac{1}{2k\sqrt{2k}}\left\{2E(l,z)-(1-2k)F(l,z)-\frac{2\sin\frac{1}{2}x.\sqrt{2k}}{1+k-k\cos x}\Delta\right\};.(\gamma_{33})$$

even als bij (γ_{30}); en evenzeer, naar dezelfde herleiding als bij (γ_{31}),

$$\int\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x.\Delta}=\frac{2k}{\sqrt{2k}}\int\frac{1}{2k-tg^2\frac{1}{2}z}\frac{dz}{\Delta(l,z)}=\frac{\sqrt{2k}}{1+2k}\left\{F(l,z)+\frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,z)\right\}+$$

$$+\tfrac{1}{2}L\frac{(\Delta+\sin\frac{1}{2}x)^2}{\sqrt{(1+k-2r)2k(1-\cos x)}+\Delta^2}.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\gamma_{34})$$

Eenige dezer formulen, die in N^0. 6 en 7 voorkomen, kan men vinden in de boven aangehaalde verhandeling van Verdam; daarvan moesten er echter enkele verbeterd worden.

8. Hetzelfde, wat in de vorige paragrafen voor de herleidingsformulen (C) gedaan is, en waarvan men later een nuttig gebruik zal maken, kan men nu, met eene verwachting op even goeden uitslag, voor het andere stel herleidingsformulen (D) bewerkstelligen. Om die te kunnen gebruiken, is het evenzeer hier noodig, de eindintegralen te kennen; haar aantal is twee, waar het goniometrische functiën der geheele x geldt, en daarentegen drie, zoodra er zulke functiën van $\frac{1}{2}x$ voorkomen. Overigens vermindert in onze formulen (D) de exponent p overal telkens met 2; zoodat ook hier weder de gevallen van evene en onevene p gescheiden voorkomen. Bij goniometrische functiën van de geheele x komen daarbij dan ook elliptische integralen voor, als p even is, terwijl dit niet plaats heeft, zoodra p oneven is.

Hier vindt men nu als eindintegralen

$$\int \Delta\, dx = E\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\delta_1)$$

$$\int sin^2x.\Delta dx = \int \frac{sin^2x - k^2 sin^4x}{\Delta} dx = \frac{1}{3k^2}\{(1-k^2)F-(1-2k^2)E-k^2 sin x.cos x.\Delta\}\,, \quad \ldots \quad (\delta_2)$$

naar (γ_1) en (γ_5); en evenzoo naar (γ_2) en (γ_6)

$$\int cos^2x.\Delta dx = \int \frac{(1-k^2)cos^2x + k^2 cos^4x}{\Delta} dx = \frac{1}{3k^2}\{(1+k^2)E-(1-k^2)F+k^2 sin x.cos x.\Delta\}\,, \quad . \quad (\delta_3)$$

waarvan de som wederom (δ_1) oplevert. Nog door (γ_4) en (γ_2)

$$\int tang^2 x\,.\,\Delta\, dx = \int \frac{(1-k^2)\,tg^2 x + k^2 sin^2 x}{\Delta} dx = F - 2\,E + tang\, x\,.\,\Delta\,. \quad \ldots\ldots \quad (\delta_4)$$

Stel nu in (D_1), (D_2), (D_3), $p = 4$, en gebruik (δ_1) en verder respectieve (δ_2), (δ_3), (δ_4), dan wordt

$$\int sin^4x.\Delta dx = \frac{1}{5k^2}\left\{sin x.cos x.\Delta^3 + (2+4k^2)\int sin^2x.\Delta dx - \int \Delta dx\right\} = \frac{1}{15k^4}\{(1-k^2)(1+2k^2)2F -$$
$$-(2+3k^2-8k^4)E - [2(1+2k^2) - 3\Delta^2]k^2 sin\, x\,.\,cos\, x\,.\,\Delta\}\,, \quad \ldots\ldots \quad (\delta_5)$$

$$\int cos^4 x\,.\,\Delta\, d\,x = \frac{1}{5k^2}\left\{sin\, x\,.\,cos\, x\,.\,\Delta^3 - (2-6\,k^2)\int cos^2 x\,.\,\Delta\, d\,x + (1-k^2)\int \Delta\, d\,x\right\} =$$
$$= \frac{1}{15k^4}\{(1-k^2)(1-3k^2)2F-(2-7k^2-3k^4)E-[2(1-3k^2)-3\Delta^2]k^2 sin x.cos x.\Delta\}\,, \, . \, (\delta_6)$$

$$\int tang^4 x\,.\,\Delta\, d\,x = \frac{1}{3(1-k^2)}\left\{\frac{tang^2 x}{sin\, x\,.\,cos\, x}\Delta^3 - (4-4\,k^2)\int tang^2 x\,.\,\Delta\, d\,x - \int \Delta\, d\,x\right\} =$$
$$= \frac{1}{3(1-k^2)}\left\{(7-8\,k^2)\,E - (1-k^2)4\,F - [4\,(1-k^2) + 4\,cos^2 x - 5\,\Delta^2]\,\frac{sin\, x}{cos^3\, x}\Delta\right\}; \, . \, . \, (\delta_7)$$

$$\frac{d}{dx}.\frac{1}{2}cos\, x\,.\,\Delta = -\frac{1}{2}sin\, x\,.\,\Delta + \frac{1}{2}cos\, x\,\frac{-2\,k^2 sin\, x\,.\,cos\, x}{2\,\Delta} = \frac{sin\, x}{2\Delta}\left\{-\Delta^2 - k^2 cos^2 x\right\} =$$
$$= \frac{sin\, x}{2\Delta}(-2\,\Delta^2 + 1 - k^2) = -\,sin\, x\,.\,\Delta + \frac{1}{2}(1-k^2)\,\frac{sin\, x}{\Delta}\,,$$

B 3

dus met behulp van (γ_8)

$$\int \sin x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{2k}(1-k^2)\, L\, \frac{1+k}{\Delta + k\cos x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x \,.\, \Delta\,; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\delta_8)$$

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{1}{2}\sin x\,.\,\Delta = \frac{1}{2}\cos x\,.\,\Delta + \frac{1}{2}\sin x\,\frac{-2k^2\sin x\,.\cos x}{2\Delta} = \frac{\cos x}{2\Delta}\,\{\Delta^2 - k^2\sin^2 x\} =$$

$$= \frac{\cos x}{2\Delta}(2\Delta^2 - 1) = \cos x\,.\,\Delta - \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\Delta},$$

dus komt er met behulp van (γ_9)

$$\int \cos x\,.\,\Delta\, dx = \frac{1}{2k}\, Bg\sin(k\sin x) + \frac{1}{2}\sin x\,.\,\Delta\;; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\delta_9)$$

$$\int \tan g\, x\,.\,\Delta\, dx = \int \tan g\, x\,\frac{1-k^2\sin^2 x}{\Delta}\, dx = \int\left\{(1-k^2)\frac{\tan g x}{\Delta} - \frac{1}{2\Delta}\frac{d}{dx}.(1-k^2\sin^2 x)\right\}dx =$$

$$= \sqrt{1-k^2}\, L\, \frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x} + 1 - \Delta\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\delta_{10})$$

na gebruik van (γ_{10});

$$\int \frac{dx}{\sin x}.\Delta = \int \frac{1-k^2\sin^2 x}{\sin x}\,\frac{dx}{\Delta} = \int\left(\frac{1}{\sin x} - k^2\sin x\right)\frac{dx}{\Delta} = L\frac{\Delta - \cos x}{\sin x} + kL\frac{\Delta + k\cos x}{1+k}, \quad \ldots \quad (\delta_{11})$$

volgens (γ_{11}) en (γ_8); evenzeer volgens (γ_9) en (γ_{12})

$$\int \frac{dx}{\cos x}\cdot\Delta = \int \frac{1-k^2+k^2\cos^2 x}{\cos x}\,\frac{dx}{\Delta} = \int\left(\frac{1-k^2}{\cos x} + k^2\cos x\right)\frac{dx}{\Delta} = k\, Bg\sin(k\sin x) +$$

$$+ \sqrt{1-k^2}\, L\, \frac{\sin x.\sqrt{1-k^2}+\Delta}{\cos x}\;; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\delta_{12})$$

$$\int \frac{dx}{\tan g x}.\Delta = \int \frac{1-k^2\sin^2 x}{\tan g\, x}\,\frac{dx}{\Delta} = \int\left\{\frac{1}{\tan g x} + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}.(1-k^2\sin^2 x)\right\}\frac{dx}{\Delta} = L\frac{2\sin x}{1+\Delta} - 1 + \Delta, \quad \ldots \quad (\delta_{13})$$

naar (γ_{13});

$$\int \sin^2 \tfrac{1}{2}x.\Delta dx = \tfrac{1}{2}\int(1-\cos x)\,\Delta dx = \frac{1}{4}\left\{2E - \frac{1}{k}Bg\sin(k\sin x) - \sin x.\Delta\right\}, \quad \ldots\ldots \quad (\delta_{14})$$

$$\int cos^2 \tfrac{1}{2}x.\Delta\, dx = \tfrac{1}{2}\int(1+cos\,x)\,\Delta\, dx = \frac{1}{4}\left\{2E + \frac{1}{k}Bg\,sin\,(k\,sin\,x) + sin\,x.\Delta\right), \ldots \ldots (\delta_{15})$$

waarbij van (δ_1) en (δ_9) is gebruik gemaakt;

$$\int tang^2 \tfrac{1}{2}x.\Delta dx = \int tang^2 \tfrac{1}{2}x \frac{1-k^2 sin^2 x}{\Delta} dx = \int\left(\frac{tg^2 \frac{1}{2}x}{\Delta} - 4k^2 \frac{sin^4 \frac{1}{2}x}{\Delta}\right) dx = 2(1-k^2)F - 3E +$$
$$+ 2\,k\,Bg\,sin\,(k\,sin\,x) + 2\,tang\,\tfrac{1}{2}x.\Delta, \ldots \ldots (\delta_{16})$$

met behulp van (γ_{16}) en (γ_{17}). Verder is, wanneer men (δ_1), (δ_9), (δ_3) gebruikt,

$$\int sin^4 \tfrac{1}{2}x.\Delta\, dx = \tfrac{1}{4}\int(1-cos\,x)^2\,\Delta\, dx = \frac{1}{12\,k^2}\Big\{(1+4\,k^2)\,E - (1-k^2)\,F -$$
$$- 3k\,Bg\,sin\,(k\,sin\,x) - (3-cos\,x)k^2\,sin\,x.\Delta\Big\}, \ldots \ldots (\delta_{17})$$

$$\int cos^4 \tfrac{1}{2}x.\Delta\, dx = \tfrac{1}{4}\int(1+cos\,x)^2\,\Delta\, dx = \frac{1}{12\,k^2}\Big\{(1+4\,k^2)\,E - (1-k^2)\,F +$$
$$+ 3\,k\,Bg\,sin\,(k\,sin\,x) + (3+cos\,x)\,k^2\,sin\,x.\Delta\Big\}. \ldots \ldots (\delta_{18})$$

Men stelle in (D_6) $p = 4$, en gebruike daarbij (δ_1), (δ_{16}), (δ_{22}), dan komt er

$$\int tang^4 \tfrac{1}{2}x.\Delta dx = \frac{1}{3}\left\{\frac{2}{sin\frac{1}{2}x.cos^3\frac{1}{2}x}\Delta^3 - 5\int tang^2\tfrac{1}{2}x.\Delta dx - (1-8k^2)\int\Delta dx + \int\frac{dx}{tang^2\frac{1}{2}x}\Delta\right\} =$$
$$= \frac{1}{3}\left\{(11+8k^2)E - (1-k^2)8F - 12kBgsin(ksinx) - [(1+2k^2)+(1+k^2)2cosx]\frac{sinx}{cos^4\frac{1}{2}x}\Delta\right\}; \ldots (\delta_{19})$$

$$\int\frac{dx}{sin^2\frac{1}{2}x}\Delta = \int(1+cot^2\tfrac{1}{2}x)\,\Delta\, dx = 2\,(1-k^2)\,F - 2\,E - 2\,k\,Bg\,sin\,(k\,sin\,x) - 2\,cot\,\tfrac{1}{2}x.\Delta, \ldots (\delta_{20})$$

naar (δ_1) en (δ_{22});

$$\int\frac{dx}{cos^2\frac{1}{2}x}\Delta = \int(1+tang^2\tfrac{1}{2}x)\Delta\, dx = 2(1-k^2)F - 2E + 2\,k\,Bg\,sin\,(k\,sin\,x) + 2\,tang\,\tfrac{1}{2}x.\Delta, \ldots (\delta_{21})$$

naar (δ_1) en (δ_{16});

$$\int\frac{dx}{tang^2\frac{1}{2}x}\Delta = \int\frac{1-k^2 sin^2 x}{tang^2\frac{1}{2}x}\frac{dx}{\Delta} = \int\left(\frac{1}{tg^2\frac{1}{2}x} - 4\,k^2\,cos^4\,\tfrac{1}{2}x\right)\frac{dx}{\Delta} =$$
$$= 2\,(1-k^2)\,F - 3\,E - 2\,k\,Bg\,sin\,(k\,sin\,x) - 2\,cot\,\tfrac{1}{2}x.\Delta, \ldots \ldots (\delta_{22})$$

*

naar (γ_{22}) en (γ_{18});

$$\int tang\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta\,dx = \int\frac{1-\cos x}{\sin x}\Delta\,dx = k\,L\frac{\Delta+k\cos x}{1+k} + L\frac{(\Delta-\cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x} + 1 - \Delta,\;.\;.\;(\delta_{23})$$

naar (δ_{11}) en (δ_{18}); evenzeer door dezelfde integralen

$$\int\frac{dx}{tang\frac{1}{2}x}\Delta = \int\frac{1+\cos x}{\sin x}\Delta\,dx = k\,L\frac{\Delta+k\cos x}{1+k} + L\frac{2(\Delta-\cos x)}{1+\Delta} + \Delta - 1;\;.\;.\;.\;.\;(\delta_{24})$$

$$\int tang^3\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta\,dx = \int tang^3\tfrac{1}{2}x\,\frac{1-4k^2\sin^2\frac{1}{2}x\,.\cos^2\frac{1}{2}x}{\Delta}dx = \int\left\{tg^3\tfrac{1}{2}x - k^2\frac{(1-\cos x)^3}{\sin x}\right\}\frac{dx}{\Delta} =$$

$$= \int\left\{tg^3\tfrac{1}{2}x - k^2\frac{4-4\cos x-3\sin^2 x+\sin^2 x\,.\cos x}{\sin x}\right\}\frac{dx}{\Delta} =$$

$$= \int\left\{tang^3\tfrac{1}{2}x - \frac{4k^2}{\sin x} + \frac{4k^2}{tang\,x} + 3k^2\sin x + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}.(1-k^2\sin^2 x)\right\}\frac{dx}{\Delta} =$$

$$= -3k\,L\frac{\Delta+k\cos x}{1+k} - (1+2k^2)\,L\frac{(\Delta-\cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x} + (1+\cos^2\tfrac{1}{2}x)\frac{\Delta}{\cos^2\frac{1}{2}x} - 2,\;.\;.\;(\delta_{25})$$

waarbij gebruik gemaakt werd van (γ_{25}), (γ_{11}), (γ_{13}), (γ_8);

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x}\Delta = \int(1+tg^2 x)\,\Delta\,dx = F - E + tang\,x\,.\,\Delta\;,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\delta_{26})$$

naar (δ_1) en (δ_3).

Stel in (D_7) $p=4$, en in (D_8) $p=4$ en $p=6$, dan is, na invoering van (δ_1) overal, en verder van (δ_{26}), van (δ_{15}) en (δ_{21}), van (δ_{28}),

$$\int\frac{dx}{\cos^4 x}\Delta = \frac{1}{3(1-k^2)}\left\{\frac{\sin x}{\cos^3 x}\Delta^3 + (2-2k^2)\int\frac{dx}{\cos^2 x}\Delta - k^2\int\Delta\,dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{3(1-k^2)}\left\{(1-k^2)\,2F - (2-k^2)\,E + [(3-2k^2)-(2-k^2)\sin^2 x]\frac{\sin x}{\cos^3 x}\Delta\right\},\;.\;.\;(\delta_{27})$$

$$\int\frac{dx}{\cos^4\frac{1}{2}x}\Delta = \frac{1}{3}\left\{\frac{\sin x}{\cos^4\frac{1}{2}x}\Delta^3 + 2\int\frac{dx}{\cos^2\frac{1}{2}x}\Delta + 16k^2\int\Delta\,dx - 16k^2\int\cos^2\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta\,dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\left\{(1-k^2)\,4F - (1-2k^2)\,4E + [2(1-k^2)+(1-2k^2)\cos x]\frac{\sin x}{\cos^4\frac{1}{2}x}\Delta\right\},\;.\;.\;(\delta_{28})$$

$$\int \frac{dx}{\cos^6 \frac{1}{2} x} \Delta = \frac{1}{5} \left\{ \frac{\sin x}{\cos^6 \frac{1}{2} x} \Delta^3 + (4 + 8 k^2) \int \frac{dx}{\cos^4 \frac{1}{2} x} \Delta - 8 k^2 \int \Delta \, dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{15} \Big\{ (1 + 2 k^2)(1 - k^2) \, 16 F - (2 + 3 k^2 - 8 k^4) \, 8 E +$$

$$+ [4(1-k^2)(1+4k^2) + (1+2k^2)(3-4k^2) 2 \cos x + 2 \cos^2 x + (3-8k^2)\Delta^2] \frac{\sin x}{\cos^6 \frac{1}{2} x} \Delta \Big\}, \ldots (\delta_{29})$$

welke laatste integraal hier zoo straks noodig zal zijn bij de behandeling der integralen (δ_{31}) en (δ_{34}).

Gaat men toch over tot de integralen met oneven machten van $\sin \frac{1}{2} x$, dan heeft men ook hier weder de oude substitutie (α_2) noodig; zijn deze ingevoerd, dan moet men bij de beide eerste formulen de integralen (δ_{28}) en (δ_{29}) gebruiken, voor y in plaats van x; en alzoo verkrijgt men

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x \, . \, \Delta \, dx = \frac{-1}{\sqrt{2k}} \int \frac{dy}{\cos^2 \frac{1}{2} y} \frac{\Delta(l,y)}{\cos^2 \frac{1}{2} y} = \frac{-1}{3\sqrt{2k}} \Big\{ (1-l^2) \, 4 F(l,y) - (1 - 2 l^2) \, 4 E(l,y) +$$

$$+ [2(1-l^2) + (1-2l^2)\cos y] \frac{\sin y}{\cos^4 \frac{1}{2} y} \Delta(l,y) \Big\} = \frac{-1}{3\sqrt{2k}} \Big\{ (1-k) \, 2 F(l,y) + 4 k E(l,y) +$$

$$+ [(1-k) - k \cos y] 2 \tan \tfrac{1}{2} y . \Delta \Big\} = \frac{-2}{3\sqrt{2k}} \Big\{ (1-k) F(l,y) + 2kE(l,y) + \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} [1 - 2k \cos^2 \tfrac{1}{2} y] \Big\} =$$

$$= \frac{-2}{3\sqrt{2k}} \Big\{ (1-k) F(l,y) + 2 k E(l,y) + \frac{1 - k + k \cos x}{1 + k + k \cos x} \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big\}, \ldots . (\delta_{30})$$

$$\int \sin^3 \tfrac{1}{2} x . \Delta dx = \frac{-1}{2k\sqrt{2k}} \int \frac{dy}{\cos^2 \frac{1}{2} y} \frac{\Delta(l,y)}{\cos^2 \frac{1}{2} y} (2k - \tan^2 \tfrac{1}{2} y) = \frac{-1}{2k\sqrt{2k}} \int \left(\frac{2k+1}{\cos^4 \frac{1}{2} y} - \frac{1}{\cos^6 \frac{1}{2} y} \right) \Delta(l,y) dy =$$

$$= \frac{1}{30 k \sqrt{2k}} \Big\{ - (2k + 1)(1 - k) \, 10 F(l,y) - (2k + 1) \, 20 k E(l,y) -$$

$$- 10(2k+1) \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} (1 - 2k \cos^2 \tfrac{1}{2} y) + (2+k)(1-k) 8 F(l,y) - (3 - 5k - 4k^2) 4 E(l,y) +$$

$$+ [2(1-k)(3+2k) + (2+k)(1-2k) 2 \cos y + 2 \cos^2 y - (1+4k)\Delta^2 \cos^4 \tfrac{1}{2} y] \frac{\sin y}{\cos^4 \frac{1}{2} y} \Delta \Big\} =$$

$$= \frac{1}{30k\sqrt{2k}} \Big\{ (6-12k)(1-k) F(l,y) - (3+6k^2) 4 E(l,y) + 2 \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big[-5(2k+1)(1-2k\cos^2 \tfrac{1}{2} y) +$$

$$+ \{ 2 (2 \cos^2 \tfrac{1}{2} y)^2 - (3 + 2k) 2k (2 \cos^2 \tfrac{1}{2} y) + 4(1+k) - (1+4k)\Delta^2 \cos^4 \tfrac{1}{2} y \} \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} y} \Big] \Big\} =$$

$$= \frac{1}{30k\sqrt{2k}} \Big\{ (1-2k)(1-k) 6 F(l,y) - (1+2k^2) 12 E(l,y) + 2 \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big[-(5 + 22k + 8k^2) +$$

$$+(4+5k+10k^2)\,2\cos^2\tfrac12 y+4\frac{1+k}{\cos^2\frac12 y}-(1+4k)\,\Delta^2\cos^2\tfrac12 y\Big]\Big\}=$$

$$=\frac{1}{15k\sqrt{2k}}\Big\{(1-2k)(1-k)3F(l,y)-(1+2k^2)6E(l,y)-\cos\tfrac12 x.\Delta\sqrt{2k}\Big[(1+14k+4k^2)-$$

$$-4(1+k)k\cos x-\frac{2(4+5k+10k^2)-(1+4k)\Delta^2}{1+k+k\cos x}\Big]\Big\},\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(\delta_{31})$$

$$\int\frac{dx}{\sin\frac12 x}\Delta=\int\frac{1-k^2\sin^2 x}{\sin\frac12 x}\frac{dx}{\Delta}=\int\left(\frac{1}{\sin\frac12 x}-4k^2\sin\tfrac12 x.\cos^2\tfrac12 x\right)\frac{dx}{\Delta}=$$

$$=\int\frac{dx}{\sin\frac12 x.\Delta}-4k^2\int\frac{\operatorname{tang}^2\frac12 y}{2k}\,\frac{-dy}{\cos^2\frac12 y.\sqrt{2k}}\,\frac{\cos^2\frac12 y}{\Delta(l,y)}=\int\frac{dx}{\sin\frac12 x.\Delta}+\sqrt{2k}\int\operatorname{tang}^2\tfrac12 y\frac{dy}{\Delta(l,y)},$$

dus naar (γ_{31}) en (γ_{16})

$$\int\frac{dx}{\sin\frac12 x}\Delta=\frac{-\sqrt{2k}}{1+2k}\Big\{F(l,y)+\frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,y)\Big\}-\frac12 L\frac{(\Delta+\cos\frac12 x)^2}{(1+k-2r)2k(1+\cos x)+\Delta^2}+$$

$$+\sqrt{2k}\{F(l,y)-2E(l,y)+2\operatorname{tang}\tfrac12 y.\Delta(l,y)\}=\frac{\sqrt{2k}}{1+2k}\Big\{2kF(l,y)-(1+2k)2E(l,y)-$$

$$-\frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,y)\Big\}-\frac12 L\frac{(\Delta+\cos\frac12 x)^2}{(1+k-2r)2k(1+\cos x)+\Delta^2}+\frac{4k\cos\frac12 x.\Delta}{1+k+k\cos x}\ldots(\delta_{32})$$

Even zoo moet men bij de integralen met oneven machten van $\cos\frac12 x$ de vroegere substitutie (α_2) ook hier invoeren; men verkrijgt dan integralen in z, en daarbij zijn dan dezelfde integralen, als boven, te gebruiken.

$$\int\cos\tfrac12 x.\Delta\,dx=\frac{1}{\sqrt{2k}}\int\frac{dz}{\cos^2\frac12 z}\,\frac{\Delta(l,z)}{\cos^2\frac12 z}=\frac{2}{3\sqrt{2k}}\Big\{2kE(l,z)+(1-k)F(l,z)+$$

$$+\frac{1-k-k\cos x}{1+k-k\cos x}\sin\tfrac12 x.\Delta\sqrt{2k}\Big\},\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(\delta_{33})$$

$$\int\cos^3\tfrac12 x.\Delta dx=\frac{1}{2k\sqrt{2k}}\int\frac{dz}{\cos^2\frac12 z}\,\frac{\Delta(l,z)}{\cos^2\frac12 z}(2k-\operatorname{tang}^2\tfrac12 z)=\frac{1}{15k\sqrt{2k}}\Big\{(1+2k^2)6E(l,z)-(1-2k)(1-k)3F(l,z)-$$

$$+\sin\tfrac12 x.\Delta\sqrt{2k}\Big[(1+14k+4k^2)-4(1+k)k\cos x-\frac{2(4+5k+10k^2)-(1+4k)\Delta^2}{1+k-k\cos x}\Big]\Big\},\ldots(\delta_{34})$$

$$\int\frac{dx}{\cos\frac12 x}\Delta=\int\frac{1-k^2\sin^2 x}{\cos\frac12 x}\frac{dx}{\Delta}=\int\left(\frac{1}{\cos\frac12 x}-4k^2\sin^2\tfrac12 x.\cos\tfrac12 x\right)\frac{dx}{\Delta}=$$

$$=\int\frac{dx}{\cos\frac12 x.\Delta}-4k^2\int\frac{\operatorname{tang}^2\frac12 z}{2k}\,\frac{dz}{\cos^2\frac12 z.\sqrt{2k}}\,\frac{\cos^2\frac12 z}{\Delta(l,z)}=\int\frac{dz}{\cos\frac12 x.\Delta}-\sqrt{2k}\int\operatorname{tang}^2\tfrac12 z\frac{dz}{\Delta(l,z)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2k}}{1+2k}\left\{(1+2k)2E(l,z)-2kF(l,z)+\frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,z)\right\}+\frac{1}{2}L\frac{(\Delta+\sin\frac{1}{2}x)^2}{(1+k-2r)2k(1-\cos x)+\Delta^2}-$$

$$-\frac{4k\sin\frac{1}{2}x.\Delta}{1+k-k\cos x}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(\delta_{35})$$

9. Naast het stel algemeene herleidingsformulen, dat in § 2—5 is afgeleid, heeft men later nog een ander stel noodig, dat eenvoudiger is. Men komt daartoe langs denzelfden weg, dat is, in plaats van bij gedeelten te integreeren, door het differentieeren van een geschikten vorm, dien men telkens met zorg moet uitkiezen. Alzoo is vooreerst

$$\frac{d}{dx}.\frac{\sin^{p-1}x}{\Delta^{2n-1}}=\frac{\sin^{p-1}x}{\Delta^{2n-1}}\left\{(p-1)\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{2n-1}{2}\frac{-2k^2\sin x.\cos x}{\Delta^2}\right\}=$$

$$=\frac{\sin^{p-2}x.\cos x}{\Delta^{2n+1}}\{(p-1)\Delta^2+(2n-1)k^2\sin^2x\}=\frac{\sin^{p-2}x.\cos x}{\Delta^{2n+1}}\{(p-1)-(p-2n)k^2\sin^2x\}\ ,\ .\ (a_{19})$$

$$=\frac{\sin^{p-2}x.\cos x}{\Delta^{2n+1}}\{(2n-1)+(p-2n)\Delta^2\}\ ;\ \dots\dots\dots\dots(b_{19})$$

en hieruit leidt men af, wanneer men in (b_{19}) eerst p door $p+2$ vervangt,

$$\int\sin^p x.\cos x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}=\frac{1}{(p-2n)k^2}\left\{-\frac{\sin^{p-1}x}{\Delta^{2n-1}}+(p-1)\int\sin^{p-2}x.\cos x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}\right\},\ ..\ (A_{19})$$

$$=\frac{1}{2n-1}\left\{\frac{\sin^{p+1}x}{\Delta^{2n-1}}-(p-2n+2)\int\sin^p x.\cos x\frac{dx}{\Delta^{2n-1}}\right\}.\ \dots\dots\ (B_{19})$$

Evenzoo vindt men door differentiatie

$$\frac{d}{dx}.\frac{\cos^{p-1}x}{\Delta^{2n-1}}=\frac{\cos^{p-1}x}{\Delta^{2n-1}}\left\{(p-1)\frac{-\sin x}{\cos x}-\frac{2n-1}{2}\frac{-2k^2\sin x.\cos x}{\Delta^2}\right\}=$$

$$=\frac{\sin x.\cos^{p-2}x}{\Delta^{2n+1}}\{-(p-1)\Delta^2+(2n-1)k^2\cos^2x\}=\frac{\sin x.\cos^{p-2}x}{\Delta^{2n+1}}\{-(p-1)(1-k^2)-(p-2n)k^2\cos^2x\},..(a_{20})$$

$$=\frac{\sin x.\cos^{p-2}x}{\Delta^{2n+1}}\{-(2n-1)(1-k^2)-(p-2n)\Delta^2\}\ ;\ \dots\dots(b_{20})$$

waaruit volgt, mits men eerst $p+2$ voor p stelle in (b_{20}),

$$\int\sin x.\cos^p x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}=\frac{1}{(p-2n)k^2}\left\{1-\frac{\cos^{p-1}x}{\Delta^{2n-1}}-(p-1)(1-k^2)\int\sin x.\cos^{p-2}x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}\right\},..(A_{20})$$

$$=\frac{1}{(2n-1)(1-k^2)}\left\{1-\frac{cos^{p+1}x}{\Delta^{2n-1}}-(p-2n+2)\int sin\,x\,.\,cos^p x\frac{dx}{\Delta^{2n-1}}\right\}. \quad . \quad (B_{20})$$

Door differentiatie volgt verder

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{tang^{p+1}x}{\Delta^{2n-1}}=\frac{tang^{p+1}x}{\Delta^{2n-1}}\left\{(p+1)\frac{1}{cos^2 x\,.\,tang\,x}-\frac{2n-1}{2}\frac{-2k^2 sin\,x\,.\,cos\,x}{\Delta^2}\right\}=$$

$$=\frac{tang^{p+1}x}{\Delta^{2n+1}}\left\{(p+1)\frac{1+tang^2 x}{tang\,x}(1-k^2 sin^2 x)+(2n-1)k^2 sin\,x\,.\,cos\,x\right\}=$$

$$=\frac{tang^p x.cos^2 x}{\Delta^{2n+1}}\{(p+1)(1+tang^2 x)(1+tang^2 x-k^2 tang^2 x)+(2n-1)k^2 tang^2 x\}=$$

$$=\frac{tang^p x.cos^2 x}{\Delta^{2n+1}}\{(p+1)+[2(p+1)-(p-2n+2)k^2]tang^2 x+(p+1)(1-k^2)tang^4 x\}\ ,\ldots (a_{21})$$

$$=\frac{tang^{p+1}}{\Delta^{2n+1} sin\,x\,.\,cos\,x}\{(p+1)\Delta^2+(2n-1)k^2 sin^2 x\,.\,cos^2 x\}=$$

$$=\frac{tang^p x}{k^2 cos^2 x\,.\,\Delta^{2n+1}}\{(p+1)k^2\Delta^2+(2n-1)(1-\Delta^2)(\Delta^2-1+k^2)\}=$$

$$=\frac{tang^p x}{k^2 cos^2 x.\Delta^{2n+1}}\{-(2n-1)(1-k^2)+[2(2n-1)+(p-2n+2)k^2]\Delta^2-(2n-1)\Delta^4\}\ ;\ldots (b_{21})$$

waarvan de eerste (a_{21}) eene herleidingsformule oplevert naar de machten van $tang\,x$, de tweede (b_{21}) eene andere naar de machten van Δ; maar hier zijn, in tegenstelling met hetgeen overal elders verkregen werd, de herleide integralen telkens van verschillende gedaante, in zooverre als de eerstbedoelde integralen den factor $cos^2 x$ overal in den teller bezitten, terwijl dezelfde factor $cos^2 x$ bij de tweede soort van integralen juist in den noemer voorkomt. Men heeft dus hier afzonderlijk, wanneer bij de eerste (a_{21}) eerst p door $p-4$ wordt vervangen, door integratie

$$\int tang^p x.cos^2 x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}=\frac{1}{(p-3)(1-k^2)}\left\{\frac{tang^{p-3}x}{\Delta^{2n-1}}-[2(p-3)-(p-2n-2)k^2]\int tang^{p-2}x.cos^2 x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}-\right.$$

$$\left.-(p-3)\int tang^{p-4}x\,.\,cos^2 x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}\right\},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (A_{21})$$

met de overeenkomstige, waarbij p in $p+2$ en $p+1$ werd veranderd,

$$\int tang^p x.sin^2 x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}=\frac{1}{(p-1)(1-k^2)}\left\{\frac{tang^{p-1}x}{\Delta^{2n-1}}-[2(p-1)-(p-2n)k^2]\int tang^{p-2}x.sin^2 x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}-\right.$$

$$\left.-(p-1)\int tang^{p-4}x\,.\,sin^2 x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}\right\},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (A'_{21})$$

$$\int tang^p x \,.\, sin\, x \,.\, cos\, x \frac{dx}{\Delta^{2n+1}} = \frac{1}{(p-2)(1-k^2)} \left\{ \frac{tang^{p-2} x}{\Delta^{2n-1}} - \right.$$

$$\left. -[2(p-2)-(p-2n-1)k^2] \int tang^{p-2}x.sinx.cosx \frac{dx}{\Delta^{2n+1}} - (p-2) \int tang^{p-4}x.sinx.cosx \frac{dx}{\Delta^{2n+1}} \right\}, . (A''_{21})$$

benevens

$$\int \frac{tang^p x}{cos^2 x . \Delta^{2n+1}} dx = \frac{1}{(2n-1)(1-k^2)} \left\{ -k^2 \frac{tang^{p+1} x}{\Delta^{2n-1}} + [2(2n-1)+(p-2n+2)k^2] \int \frac{tang^p x}{cos^2 x . \Delta^{2n-1}} dx - \right.$$

$$\left. -(2n-1) \int \frac{tang^p x}{cos^2 x \,.\, \Delta^{2n-3}} dx \right\}, \ldots \ldots (B_{21})$$

en hier, op dezelfde wijze als boven, voor $p-2$ en $p-1$ in de plaats van p,

$$\int \frac{tang^p x}{sin^2 x . \Delta^{2n+1}} dx = \frac{1}{(2n-1)(1-k^2)} \left\{ -k^2 \frac{tang^{p-1} x}{\Delta^{2n-1}} + [2(2n-1)+(p-2n)k^2] \int \frac{tang^p x}{sin^2 x . \Delta^{2n-1}} dx - \right.$$

$$\left. -(2n-1) \int \frac{tang^p x}{sin^2 x \,.\, \Delta^{2n-3}} dx \right\}, \ldots \ldots (B'_{21})$$

$$\int \frac{tang^p x}{sinx.cosx.\Delta^{2n+1}} dx = \frac{1}{(2n-1)(1-k^2)} \left\{ -k^2 \frac{tang^p x}{\Delta^{2n-1}} + [2(2n-1)+(p-2n+1)k^2] \int \frac{tang^p x}{sinx.cosx.\Delta^{2n-1}} dx - \right.$$

$$\left. -(2n-1) \int \frac{tang^p x}{sin\, x \,.\, cos\, x \,.\, \Delta^{2n-3}} dx \right\}. \ldots \ldots (B''_{21})$$

10. Gaat men over tot den boog $\frac{1}{2} x$, dan vervallen ook hier, even als in § 3, alle formulen (b), en mitsdien ook alle de daaruit afgeleide herleidingsformulen (B). Men moet dus alleen trachten de formulen (a) af te leiden, en daaruit dan verder de herleidingsformulen (A), die dan trouwens bij dit onderzoek van het grootste gewicht zijn.

Volgens dezelfde methode, als ook vroeger, komt men dan hier tot het volgende.

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{sin^{p-3} \frac{1}{2} x}{\Delta^{2n-1}} = \frac{sin^{p-3} \frac{1}{2} x}{\Delta^{2n-1}} \left\{ \frac{p-3}{2} \frac{cos \frac{1}{2} x}{sin \frac{1}{2} x} - \frac{2n-1}{2} \frac{-2k^2 \, sin\, x \,.\, cos\, x}{\Delta^2} \right\} =$$

$$= \frac{sin^{p-4} \frac{1}{2} x \,.\, cos \frac{1}{2} x}{2\Delta^{2n+1}} \{(p-3)\Delta^2 + (2n-1) 4 k^2 sin^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, cos\, x\} =$$

$$= \frac{sin^{p-4} \frac{1}{2} x . cos \frac{1}{2} x}{2\Delta^{2n+1}} \{(p-3)(1-4k^2 sin^2 \tfrac{1}{2} x + 4k^2 sin^4 \tfrac{1}{2} x) + (2n-1) 4 k^2 sin^2 \tfrac{1}{2} x . (1-2 sin^2 \tfrac{1}{2} x)\} =$$

$$= \frac{sin^{p-4} \frac{1}{2} x . cos \frac{1}{2} x}{2\Delta^{2n+1}} \{(p-3) - (p-2n-2) 4 k^2 sin^2 \tfrac{1}{2} x + (p-4n-1) 4 k^2 sin^4 \tfrac{1}{2} x\}, \ldots (a_{22})$$

B 4

waaruit men, na integratie, afleidt

$$\int sin^p \tfrac{1}{2}x . cos \tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta^{2n+1}} = \frac{1}{(p-4n-1)4k^2} \left\{ \frac{2 sin^{p-3}\frac{1}{2}x}{\Delta^{2n-1}} + (p-2n-2)4k^2 \int sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x . cos \tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta^{2n+1}} - \right.$$

$$\left. - (p-3) \int sin^{p-4} \tfrac{1}{2}x . cos \tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta^{2n+1}} \right\} . \quad \ldots \ldots \quad (A_{22})$$

Vervolgens verkrijgt men ook evenzoo

$$\frac{d}{dx} . \frac{cos^{p-3}\frac{1}{2}x}{\Delta^{2n-1}} = \frac{cos^{p-3}\frac{1}{2}x}{\Delta^{2n-1}} \left\{ \frac{p-3}{2} \frac{-sin \frac{1}{2}x}{cos \frac{1}{2}x} - \frac{2n-1}{2} \frac{-2k^2 sin x . cos x}{\Delta^2} \right\} =$$

$$= \frac{sin \frac{1}{2}x . cos^{p-4}\frac{1}{2}x}{2\Delta^{2n+1}} \{ -(p-3)\Delta^2 + (2n-1) 4k^2 cos^2 \tfrac{1}{2}x . cos x \} =$$

$$= \frac{sin \frac{1}{2}x . cos^{p-4}\frac{1}{2}x}{2\Delta^{2n+1}} \{ -(p-3)(1-4k^2 cos^2 \tfrac{1}{2}x + 4k^2 cos^4 \tfrac{1}{2}x) + (2n-1)4k^2 cos^2 \tfrac{1}{2}x . (2cos^2\tfrac{1}{2}x - 1) \} =$$

$$= \frac{sin \frac{1}{2}x . cos^{p-4}\frac{1}{2}x}{2\Delta^{2n+1}} \{ -(p-3) + (p-2n-2) 4k^2 cos^2 \tfrac{1}{2}x - (p-4n-1) 4k^2 cos^4 \tfrac{1}{2}x \} , \ldots (a_{23})$$

zoodat, na integratie, hieruit volgt

$$\int sin \tfrac{1}{2}x . cos^p \tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta^{2n+1}} = \frac{1}{(p-4n-1)4k^2} \left\{ 2 \frac{2cos^{p-3}\frac{1}{2}x}{\Delta^{2n-1}} + (p-2n-2) 4k^2 \int sin \tfrac{1}{2}x . cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta^{2n+1}} - \right.$$

$$\left. - (p-3) \int sin \tfrac{1}{2}x . cos^{p-4} \tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta^{2n+1}} \right\} . \quad \ldots \ldots \quad (A_{23})$$

Ten slotte heeft men nog

$$\frac{d}{dx} . \frac{tang^{p-5}\frac{1}{2}x}{\Delta^{2n-1}} = \frac{tang^{p-5}\frac{1}{2}x}{\Delta^{2n-1}} \left\{ \frac{p-5}{2} \frac{1}{cos^2 \frac{1}{2}x . tang \frac{1}{2}x} - \frac{2n-1}{2} \frac{-2k^2 sin x . cos x}{\Delta^2} \right\} =$$

$$= \frac{tang^{p-5}\frac{1}{2}x}{sin x . \Delta^{2n+1}} \{ (p-5)\Delta^2 + (2n-1)(1-\Delta^2) cos x \} =$$

$$= \frac{tang^{p-5}\frac{1}{2}x . cos^4\frac{1}{2}x}{\Delta^{2n+1}} \left\{ (p-5) \frac{1+tang^2\frac{1}{2}x}{2 tang \frac{1}{2}x} \left(\frac{1}{cos^4\frac{1}{2}x} - 4k^2 tang^2 \tfrac{1}{2}x \right) + (2n-1) 2k^2 tang \tfrac{1}{2}x . \left(2 - \frac{1}{cos^2\frac{1}{2}x} \right) \right\} =$$

$$= \frac{tang^{p-6}\frac{1}{2}x . cos^4\frac{1}{2}x}{2\Delta^{2n+1}} \{ (p-5) + [3(p-5) - (p-2n-4)4k^2] tang^2 \tfrac{1}{2}x +$$

$$+ [3(p-5) - (p+2n-6)4k^2] tang^4 \tfrac{1}{2}x + (p-5) tang^6 \tfrac{1}{2}x \} , \quad \ldots \ldots \quad (a_{24})$$

waaruit men door integratie afleidt

$$\int tang^p\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}=\frac{1}{p-5}\left\{\frac{2tang^{p-5}\frac{1}{2}x}{\Delta^{2n-1}}-[3(p-5)-(p+2n-6)4k^2]\int tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}-\right.$$
$$\left.-[3(p-5)-(p-2n-4)4k^2]\int tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}-(p-5)\int tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta^{2n+1}}\right\} \ldots (A_{24})$$

11. In deze herleidingsformulen kan men nu n negatief nemen, even als dit in § 4 geschiedde, zoodat daardoor de Δ in den teller komt. Bij de formulen (A) heeft dit volstrekt geen bezwaar; daarbij stelle men eenvoudig $n = -n$; maar in dit geval moeten de formulen (B) worden omgekeerd: bij de twee eerste (B_{19}) en (B_{20}) stelle men dan eerst $n = 1 - n$, bij de laatste (B_{21}) moet men $2 - n$ in de plaats van n stellen. Alzoo verkrijgt men dan

$$\int \sin^p x.\cos x.\Delta^{2n-1}dx=\frac{1}{(p+2n)k^2}\left\{-\sin^{p-1}x.\Delta^{2n+1}+(p-1)\int \sin^{p-2}x.\cos x.\Delta^{2n-1}dx\right\}, \ldots (A_{25})$$

$$=\frac{1}{p+2n}\left\{\sin^{p+1}x.\Delta^{2n-1}+(2n-1)\int \sin^p x.\cos x.\Delta^{2n-3}dx\right\}, \ldots (B_{25})$$

$$\int \sin x.\cos^p x.\Delta^{2n-1}dx=\frac{1}{(p+2n)k^2}\left\{1-\cos^{p-1}x.\Delta^{2n+1}-(p-1)(1-k^2)\int \sin x.\cos^{p-2}x.\Delta^{2n-1}dx\right\}, \ldots (A_{26})$$

$$=\frac{1}{p+2n}\left\{1-\cos^{p+1}x.\Delta^{2n-1}+(2n-1)(1-k^2)\int \sin x.\cos^p x.\Delta^{2n-3}dx\right\}, \ldots\ldots (B_{26})$$

$$\int tang^p x.\cos^2 x.\Delta^{2n-1}dx=\frac{1}{(p-3)(1-k^2)}\left\{tang^{p-3}x.\Delta^{2n-1}-\right.$$
$$\left.-[2(p-3)-(p+2n-2)k^2]\int tang^{p-2}x.\cos^2 x.\Delta^{2n-1}dx-(p-3)\int tang^{p-4}x.\cos^2 x.\Delta^{2n-1}dx\right\}, \ldots (A_{27})$$

$$\int \frac{tang^p x}{\cos^2 x}\Delta^{2n-1}dx=\frac{1}{2n-3}\left\{k^2 tang^{p+1}x.\Delta^{2n-3}+\right.$$
$$\left.+[2(2n-3)-(p+2n-2)k^2]\int\frac{tang^p x}{\cos^2 x}\Delta^{2n-3}dx-(2n-3)(1-k^2)\int\frac{tang^p x}{\cos^2 x}\Delta^{2n-5}dx\right\}, \ldots (B_{27})$$

$$\int \sin^p\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx=\frac{1}{(p+4n-1)4k^2}\left\{2\sin^{p-3}\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n+1}+\right.$$
$$\left.+(p+2n-2)4k^2\int \sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx-(p-3)\int \sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta^{2n-1}dx\right\}, \ldots (A_{28})$$

*

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^p \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta^{2n-1}\, dx = \frac{1}{(p+4n-1)\,4k^2} \Big\{ 2 - 2 \cos^{p-3} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta^{2n+1} +$$
$$+ (p+2n-2) 4k^2 \int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^{p-2} \tfrac{1}{2} x . \Delta^{2n-1} dx - (p-3) \int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x . \Delta^{2n-1} dx \Big\}, \quad . \; . \; . \; (A_{29})$$

$$\int \operatorname{tang}^p \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^4 \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta^{2n-1}\, dx = \frac{1}{p-5} \Big\{ 2 \operatorname{tang}^{p-5} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta^{2n+1} -$$
$$- [3(p-5) - (p-2n-6) 4k^2] \int \operatorname{tang}^{p-2} \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^4 \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta^{2n-1}\, dx -$$
$$- [3(p-5) - (p+2n-4)\, 4k^2] \int \operatorname{tang}^{p-4} \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^4 \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta^{2n-1}\, dx -$$
$$- (p-5) \int \operatorname{tang}^{p-6} \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^4 \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta^{2n-1}\, dx \Big\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (A_{30})$$

Maar evenzeer kan men in eenige der herleidingsformulen den exponent p negatief nemen. Alzoo geven (B_{20}) en (B_{26}) rechtstreeks, en (A_{20}), (A_{23}), (A_{26}) en (A_{29}) bij omkeering, wanneer men in deze zes formulen respectieve $p = -p$, $= -p$, $= 2-p$, $= 4-p$, $= 2-p$, en $= 4-p$ stelt,

$$\int \frac{\sin x}{\cos^p x} \frac{dx}{\Delta^{2n+1}} = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)} \Big\{ \frac{1}{\cos^{p-1} x . \Delta^{2n-1}} - 1 - (p+2n-2) k^2 \int \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x} \frac{dx}{\Delta^{2n+1}} \Big\}, . \; (A_{31})$$

$$= \frac{1}{(2n-1)(1-k^2)} \Big\{ 1 - \frac{1}{\cos^{p-1} x . \Delta^{2n-1}} + (p+2n-2) \int \frac{\sin x}{\cos^p x} \frac{dx}{\Delta^{2n-1}} \Big\}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (B_{31})$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^p \frac{1}{2} x} \frac{dx}{\Delta^{2n+1}} = \frac{1}{p-1} \Big\{ \frac{2}{\cos^{p-1} \frac{1}{2} x \,.\, \Delta^{2n-1}} - 2 + (p+2n-2)\, 4k^2 \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-2} \frac{1}{2} x} \frac{dx}{\Delta^{2n+1}} -$$
$$- (p+4n-3)\, 4k^2 \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-4} \frac{1}{2} x} \frac{dx}{\Delta^{2n+1}} \Big\}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (A_{32})$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^p x} \Delta^{2n-1} dx = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)} \Big\{ \frac{\Delta^{2n+1}}{\cos^{p-1} x} - 1 - (p-2n-2)\, k^2 \int \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x} \Delta^{2n-1} dx \Big\}, . \; (A_{33})$$

$$= \frac{1}{p-2n} \Big\{ \frac{\Delta^{2n-1}}{\cos^{p-1} x} - 1 - (2n-1)(1-k^2) \int \frac{\sin x}{\cos^p x} \Delta^{2n-3}\, dx \Big\}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (B_{33})$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^p \frac{1}{2} x} \Delta^{2n-1}\, dx = \frac{1}{p-1} \Big\{ 2 \frac{\Delta^{2n-1}}{\cos^{p-1} \frac{1}{2} x} - 2 + (p-2n-2)\, 4k^2 \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-2} \frac{1}{2} x} \Delta^{2n-1}\, dx -$$
$$- (p-4n-3)\, 4k^2 \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-4} \frac{1}{2} x} \Delta^{2n-1}\, dx \Big\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (A_{34})$$

12. Even als in § 6 kan men nu uit deze algemeene herleidingsformulen andere afleiden, waarin de Δ, hetzij in den noemer, hetzij in den teller, maar slechts tot de eerste macht voorkomt; en op deze uitkomsten komt het bij ons volgend onderzoek wel in de eerste plaats aan. Hierbij vervalt het doel der herleidingsformulen (B), en heeft men in de andere (A_{19}) tot (A_{24}), (A_{31}) en (A_{32}) [of evenzeer in de overige vergelijkingen (A)] $n = 0$ te nemen. Op die wijze ontstaat het volgend stel.

$$\int \sin^p x \, . \cos x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{p k^2} \left\{ - \sin^{p-1} x \, . \Delta + (p-1) \int \sin^{p-2} x \, . \cos x \frac{dx}{\Delta} \right\}, \dots \dots \quad (E_1)$$

$$\int \sin x \, . \cos^p x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{p k^2} \left\{ 1 - \cos^{p-1} x \, . \Delta - (p-1)(1-k^2) \int \sin x \, . \cos^{p-2} x \frac{dx}{\Delta} \right\}, \dots \quad (E_2)$$

$$\int tang^p x \, . \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-3)(1-k^2)} \left\{ tang^{p-3} x \, . \Delta - [2(p-3)-(p-2)k^2] \int tang^{p-2} x \, . \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} - \right.$$
$$\left. - (p-3) \int tang^{p-4} x \, . \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} \right\}, \dots \dots \quad (E_3)$$

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2} x \, . \cos \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-1) 4k^2} \left\{ 2 \sin^{p-3} \tfrac{1}{2} x \, . \Delta + (p-2) 4k^2 \int \sin^{p-2} \tfrac{1}{2} x \, . \cos \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} - \right.$$
$$\left. - (p-3) \int \sin^{p-4} \tfrac{1}{2} x \, . \cos \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} \right\}, \dots \dots \quad (E_4)$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x \, . \cos^p \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-1) 4k^2} \left\{ 2 - 2 \cos^{p-3} \tfrac{1}{2} x \, . \Delta + (p-2) 4k^2 \int \sin \tfrac{1}{2} x \, . \cos^{p-2} \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} - \right.$$
$$\left. - (p-3) \int \sin \tfrac{1}{2} x \, . \cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} \right\}, \dots \dots \quad (E_5)$$

$$\int tang^p \tfrac{1}{2} x \, . \cos^4 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{p-5} \left\{ 2 tang^{p-5} \tfrac{1}{2} x \, . \Delta - [3(p-5)-(p-6)4k^2] \int tang^{p-2} \tfrac{1}{2} x \, . \cos^4 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} - \right.$$
$$\left. - [3(p-5)-(p-4)4k^2] \int tang^{p-4} \tfrac{1}{2} x \, . \cos^4 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} - (p-5) \int tang^{p-6} \tfrac{1}{2} x \, . \cos^4 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} \right\}, . \quad (E_6)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^p x} \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)} \left\{ \frac{\Delta}{\cos^{p-1} x} - 1 - (p-2) k^2 \int \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x} \frac{dx}{\Delta} \right\}, \dots \quad (E_7)$$

$$\int \frac{\sin \tfrac{1}{2} x}{\cos^p \tfrac{1}{2} x} \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{p-1} \left\{ \frac{2\Delta}{\cos^{p-1} \tfrac{1}{2} x} - 2 + (p-2) 4k^2 \int \frac{\sin \tfrac{1}{2} x}{\cos^{p-2} \tfrac{1}{2} x} \frac{dx}{\Delta} - (p-3) 4k^2 \int \frac{\sin \tfrac{1}{2} x}{\cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x} \frac{dx}{\Delta} \right\} .. \quad (E_8)$$

De herleidingsformulen, waarbij de Δ in den noemer voorkomt, worden op dezelfde wijze afgeleid, wanneer men in de algemeene herleidingsformulen (A_{25}) tot (A_{30}), (A_{33}) en (A_{34}) de $n = 1$ stelt. Alzoo vindt men

$$\int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{(p+2)k^2}\left\{ -\sin^{p-1} x \,.\, \Delta^3 + (p-1)\int \sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\, dx \right\}, \ldots \quad (F_1)$$

$$\int \sin x . \cos^p x . \Delta\, dx = \frac{1}{(p+2)k^2}\left\{ 1 - \cos^{p-1} x . \Delta^3 - (p-1)(1-k^2)\int \sin x . \cos^{p-2} x . \Delta\, dx \right\}, \ldots \quad (F_2)$$

$$\int \mathrm{tang}^p x . \cos^2 x . \Delta\, dx = \frac{1}{(p-3)(1-k^2)}\left\{ \mathrm{tang}^{p-3} x . \Delta^3 - [2(p-3) - pk^2]\int \mathrm{tang}^{p-2} x . \cos^2 x . \Delta\, dx - \right.$$
$$\left. - (p-3)\int \mathrm{tang}^{p-4} x \,.\, \cos^2 x \,.\, \Delta\, dx \right\}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (F_3)$$

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{(p+3)4k^2}\left\{ 2 \sin^{p-3} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta^3 + 4pk^2 \int \sin^{p-2} \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx - \right.$$
$$\left. - (p-3)\int \sin^{p-4} \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx \right\}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (F_4)$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^p \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{(p+3)4k^2}\left\{ 2 - 2\cos^{p-3} \tfrac{1}{2} x . \Delta^3 + 4pk^2 \int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^{p-2} \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx - \right.$$
$$\left. - (p-3)\int \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx \right\}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (F_5)$$

$$\int \mathrm{tang}^p \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx = \frac{1}{p-5}\left\{ 2\,\mathrm{tang}^{p-5} \tfrac{1}{2} x . \Delta^3 - [3(p-5) - (p-8)4k^2]\int \mathrm{tang}^{p-2} \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx - \right.$$
$$\left. - [3(p-5) - (p-2)4k^2]\int \mathrm{tang}^{p-4} \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx - (p-5)\int \mathrm{tang}^{p-6} \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx \right\}, \ldots \quad (F_6)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^p x}\Delta\, dx = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)}\left\{ \frac{\Delta^3}{\cos^{p-1} x} - 1 - (p-4)k^2 \int \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x}\Delta\, dx \right\}, \ldots \quad (F_7)$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^p \frac{1}{2} x}\Delta\, dx = \frac{1}{p-1}\left\{ \frac{2\Delta^3}{\cos^{p-1} \frac{1}{2} x} - 2 + (p-4)4k^2 \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-2} \frac{1}{2} x}\Delta\, dx - (p-7)4k^2 \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-4} \frac{1}{2} x}\Delta\, dx \right\} \ldots \quad (F_8)$$

13. Zoodra men nu deze herleidingsformulen gebruiken wil, hetzij rechtstreeks, hetzij bij de toepassing in de volgende hoofdstukken, tot welk doel zij eigenlijk hier werden afgeleid, heeft men de eindintegralen noodig; dat is die bijzondere gevallen, welke om de een of andere reden niet uit de herleidingsformulen zelve kunnen worden afgeleid, of ook zulke, die de eerste gevallen bij de toepassing

uitmaken. Daar de exponent p hier, evenals overal vroeger, telkens met twee vermindert, heeft men ook hier weder onderscheid te maken tusschen de gevallen, dat p even of oneven is. Onder de eindintegralen echter, die hier noodig zijn, bevinden zich onderscheidene, die reeds vroeger in § 7 en 8 zijn afgeleid, en die derhalve hier niet op nieuw behoeven te worden opgesteld.

Zoo kan men bij de herleidingsformulen (E) gebruiken de (γ_9), (γ_{13}), (γ_8), (γ_{10}), (γ_2), (γ_3), (γ_{24}), (γ_{32}), (γ_{23}), (γ_{29}), (γ_{18}), (γ_{17}), terwijl er behalve deze, nog de volgende noodig zijn.

$$\int \sin x \cdot \cos x \frac{dx}{\Delta} = \frac{-1}{2k^2}\int \frac{dx}{\Delta}\frac{d}{dx}.(1-k^2\sin^2 x) = \frac{1}{k^2}(1-\Delta)\,, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\varepsilon_1)$$

$$\int \sin^3 x.\cos x\frac{dx}{\Delta} = \frac{-1}{2k^2}\int\frac{1-\Delta^2}{k^2}\frac{dx}{\Delta}\frac{d}{dx}.(1-k^2\sin^2 x) = \frac{-1}{3k^4}\{-2+3\Delta-\Delta^3\} = \frac{1}{3k^4}(1-\Delta)^2(2+\Delta),\ .\ (\varepsilon_2)$$

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x\frac{dx}{\Delta} = \int\frac{1-\Delta^2}{k^2}\cos x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k^3}\{Bg\sin(k\sin x) - k\sin x\,.\,\Delta\}\,, \quad \ldots \ldots \quad (\varepsilon_3)$$

naar (γ_9) en (δ_9);

$$\int \sin x.\cos^3 x\frac{dx}{\Delta} = \frac{-1}{2k^2}\int\frac{\Delta^2-(1-k^2)}{k^2}\frac{dx}{\Delta}\frac{d}{dx}.(1-k^2\sin^2 x) = \frac{-1}{3k^4}\{(2-3k^2)-3(1-k^2)\Delta+\Delta^3\} =$$
$$= \frac{1}{3k^4}(1-\Delta)(3k^2+\Delta-2)\,, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\varepsilon_4)$$

$$\int \sin x.\cos^2 x\frac{dx}{\Delta} = \int\frac{\Delta^2-(1-k^2)}{k^2}\sin x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k^3}\left\{(1-k^2)L\frac{\Delta+k\cos x}{1+k} + k - k\cos x.\Delta\right\},\ .\ (\varepsilon_5)$$

volgens (γ_8) en (δ_8);

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos x}\frac{dx}{\Delta} = \int\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\sin x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}L\frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x} - \frac{1}{k^2}(1-\Delta)\,,\ .\ (\varepsilon_6)$$

met gebruik van (γ_{10}) en (ε_1);

$$\int\frac{\cos^3 x}{\sin x}\frac{dx}{\Delta} = \int\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\cos x\frac{dx}{\Delta} = L\frac{2\sin x}{1+\Delta} - \frac{1}{k^2}(1-\Delta)\,, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\varepsilon_7)$$

naar (γ_{13}) en (ε_1);

$$\int \sin^2\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \int\frac{1-\cos^2\frac{1}{2}x}{\Delta}\cos\tfrac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2k\sqrt{2k}}\left\{F(l,z)-2E(l,z)+\frac{2\sin\frac{1}{2}x.\sqrt{2k}}{1+k-k\cos x}\Delta\right\},\ .\ (\varepsilon_8)$$

volgens (γ_{32}), (γ_{33}); en evenzoo naar (γ_{29}) en (γ_{30})

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^2\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\int\frac{1-\sin^2\frac{1}{2}x}{\Delta}\sin\tfrac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{2k\sqrt{2k}}\left\{2E(l,y)-F(l,y)-\frac{2\cos\frac{1}{2}x.\sqrt{2k}}{1+k+k\cos x}\Delta\right\}\ldots(\varepsilon_9)$$

Verder, als men (γ_8) en (ε_1) invoert,

$$\int \sin^3\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{4}\int(1-\cos x)\sin x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{4k^2}\left\{kL\frac{1+k}{k\cos x+\Delta}-1+\Delta\right\},\ldots(\varepsilon_{10})$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^3\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{4}\int(1+\cos x)\sin x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{4k^2}\left\{kL\frac{1+k}{k\cos x+\Delta}-\Delta+1\right\}.\ldots(\varepsilon_{11})$$

Stel nu in de herleidingsformulen (E_4) en (E_5) $p=4$; en gebruik bij de eerste uitkomst (ε_8) en (γ_{32}), bij de tweede (ε_9) en (γ_{29}); dan komt er

$$\int \sin^4\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{12k^2}\left\{2\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta+8k^2\int\sin^2\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}-\int\cos\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}\right\}=$$

$$=\frac{-1}{12k^2\sqrt{2k}}\left\{(1-4k)F(l,z)+8kE(l,z)-\frac{1+5k-k\cos x}{1+k-k\cos x}2\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\right\},\ldots(\varepsilon_{12})$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{12k^2}\left\{2-2\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta+8k^2\int\sin\tfrac{1}{2}x.\cos^2\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}-\int\sin\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}\right\}=$$

$$=\frac{1}{12k^2\sqrt{2k}}\left\{(1-4k)F(l,y)+8kE(l,y)-\frac{1+5k+k\cos x}{1+k+k\cos x}2\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}+2\sqrt{2k}\right\}..(\varepsilon_{13})$$

Ten slotte heeft men met behulp van (γ_{11}), (γ_{13}), (γ_8) en (ε_1)

$$\int\frac{\cos^5\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{4}\int\frac{(1+\cos x)^3}{\sin x}\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{4}\int\frac{4+4\cos x-3\sin^2x-\sin^2x.\cos x}{\sin x}\frac{dx}{\Delta}=$$

$$=L\frac{2(\Delta-\cos x)}{1+\Delta}-\frac{3}{4k}L\frac{1+k}{k\cos x+\Delta}-\frac{1}{4k^2}(1-\Delta),\ldots\ldots\ldots\ldots(\varepsilon_{14})$$

$$\int\frac{\sin^5\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x}\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{4}\int\frac{(1-\cos x)^3}{\sin x}\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{4}\int\frac{4-4\cos x-3\sin^2x+\sin^2x.\cos x}{\sin x}\frac{dx}{\Delta}=$$

$$=L\frac{(\Delta-\cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2x}-\frac{3}{4k}L\frac{1+k}{k\cos x+\Delta}+\frac{1}{4k^2}(1-\Delta).\ldots\ldots\ldots(\varepsilon_{15})$$

14. Gaan wij over tot de herleidingsformulen (F), dan behouden de vroeger

gevonden integralen (δ_9), (δ_{13}), (δ_8), (δ_{10}), (δ_{22}), (δ_{34}), (δ_{24}), (δ_{33}), (δ_{23}), (δ_{30}), (δ_{18}) en (δ_{17}) ook hier hare toepassing. Bovendien is nog de bepaling van de volgende integralen hier noodzakelijk.

$$\int \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\, dx = -\frac{1}{2k^2}\int \Delta\, dx \frac{d}{dx}.(1-k^2 \sin^2 x) = \frac{1}{3k^2}(1-\Delta^3), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\xi_1)$$

$$\int \sin^3 x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\, dx = \frac{-1}{2k^2}\int \frac{1-\Delta^2}{k^2}\,\Delta\, dx \frac{d}{dx}.(1-k^2 \sin^2 x) = \frac{-1}{15k^4}(-2+5\Delta^3-3\Delta^5) =$$
$$= \frac{1}{15k^4}(1-\Delta)^2(2+4\Delta+6\Delta^2+3\Delta^3). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\xi_2)$$

Wanneer men de herleidingsformule (B_{25}) toepast voor $n = 1$, $p = 2$, en daarna de (ϵ_3) gebruikt, zoo wordt

$$\int \sin^2 x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{4}\left\{\sin^3 x \,.\, \Delta + \int \sin^2 x \,.\, \cos x \frac{dx}{\Delta}\right\} =$$
$$= \frac{1}{8k^3}\{Bg \sin (k \sin x) + (1-2\Delta^2)\, k \sin x \,.\, \Delta\}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\xi_3)$$

$$\int \sin x \,.\, \cos^3 x \,.\, \Delta\, dx = \frac{-1}{2k^2}\int \frac{\Delta^2-(1-k^2)}{k^2}\,\Delta\, dx \frac{d}{dx}.(1-k^2 \sin^2 x) =$$
$$= \frac{1}{15k^4}\{-(2-5k^2)+5(1-k^2)\Delta^3-3\Delta^5\}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\xi_4)$$

Past men nu de vroegere herleidingsformule (B_{26}) hier toe voor $p = 2$ en $n = 1$, dan moet men naderhand (ϵ_5) substitueeren, en verkrijgt alzoo

$$\int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{4}\left\{1 - \cos^3 x \,.\, \Delta + (1-k^2)\int \sin x \,.\, \cos^2 x \frac{dx}{\Delta}\right\} =$$
$$= \frac{1}{8k^3}\left\{(1-k^2)^2 L\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + k(1+k^2) + [(1-k^2)-2\Delta^2]\, k\cos x \,.\, \Delta\right\}; \ldots \quad (\xi_5)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\Delta\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\sin x \,.\, \Delta\, dx = \sqrt{1-k^2}\, L\frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x} -$$
$$-\frac{1}{3k^2}(1-\Delta)\{(1-3k^2)+\Delta+\Delta^2\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\xi_6)$$

B 5

naar (δ_{10}) en (ξ_1);

$$\int\frac{\cos^3 x}{\sin x}\Delta dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\cos x.\Delta dx=L\frac{2\sin x}{1+\Delta}-\frac{1}{3k^2}(1-\Delta)[(1+3k^2)+\Delta+\Delta^2]\,,\,.\,(\xi_7)$$

volgens (δ_{13}) en (ξ_1);

$$\int\sin^2\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta dx=\int(1-\cos^2\tfrac{1}{2}x)\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta dx=\frac{1}{15k\sqrt{2k}}\Big\{(3+4k)(1-k)F(l,z)-(3-4k^2)2E(l,z)-$$
$$-\Big[(1+2k)^2-4(1+k)k\cos x-\frac{2(4+5k)-(1+4k)\Delta^2}{1+k-k\cos x}\Big]\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\},\,..\,(\xi_8)$$

na substitutie van (δ_{33}) en (δ_{34});

$$\int\sin\tfrac{1}{2}x.\cos^2\tfrac{1}{2}x.\Delta dx=\int(1-\sin^2\tfrac{1}{2}x)\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta dx=\frac{1}{15k\sqrt{2k}}\Big\{(3-4k^2)2E(l,y)-(3+4k)(1-k)F(l,y)+$$
$$+\Big[(1+2k)^2-4(1+k)k\cos x-\frac{2(4+5k)-(1+4k)\Delta^2}{1+k+k\cos x}\Big]\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\},\,..\,(\xi_9)$$

met gebruik van (δ_{30}) en (δ_{31}). Vervolgens, wanneer men (δ_8) en (ξ_1) invoert,

$$\int\sin^3\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta dx=\frac{1}{4}\int(1-\cos x)\sin x.\Delta dx=\frac{1}{24k^2}\Big\{3k(1-k^2)L\frac{1+k}{\Delta+k\cos x}-$$
$$-2+3k^2-3k^2\cos x.\Delta+2\Delta^3\Big\},\,\dots\dots\dots\,(\xi_{10})$$

$$\int\sin\tfrac{1}{2}x.\cos^3\tfrac{1}{2}x.\Delta dx=\frac{1}{4}\int(1+\cos x)\sin x.\Delta dx=\frac{1}{24k^2}\Big\{3k(1-k^2)L\frac{1+k}{\Delta+k\cos x}+$$
$$+2+3k^2-3k^2\cos x.\Delta-2\Delta^3\Big\}.\,\dots\dots\dots\,(\xi_{11})$$

Neemt men $p=4$ in de herleidingsformulen (F_4) en (F_5), en voert men daarop, of de integralen (ξ_8) en (δ_{33}), of de andere (ξ_9) en (δ_{30}) in, dan verkrijgt men

$$\int\sin^4\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta dx=\frac{1}{28k^2}\Big\{2\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta^3+16k^2\int\sin^2\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta dx-\int\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta dx\Big\}=$$
$$=\frac{1}{210k^2\sqrt{2k}}\Big\{-(5-24k-32k^2)(1-k)F(l,z)-(29-32k^2)2kE(l,z)-\Big[5-15\Delta^2+8k(1+2k)^2-$$
$$-32(1+k)k^2\cos x-2k\,\frac{37+40k-(1+4k)\Delta^2}{1+k-k\cos x}\Big]\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\},\,\dots\,(\xi_{12})$$

$$\int sin\tfrac{1}{2}x.cos^4\tfrac{1}{2}x.\Delta dx = \frac{1}{28k^2}\Big\{2 - 2cos\tfrac{1}{2}x.\Delta^3 + 16k^2\int sin\tfrac{1}{2}x.cos^2\tfrac{1}{2}x.\Delta dx - \int sin\tfrac{1}{2}x.\Delta dx\Big\} =$$

$$= \frac{1}{210k^3\sqrt{2k}}\Big\{(5-24k-32k^2)(1-k)F(l,y)+(29-32k^2)2kE(l,y)+15+\Big[5-15\Delta^2+8k(1+2k)^2 -$$

$$- 32(1+k)k^2 cos\,x - 2k\frac{37+40k-(1+4k)\Delta^2}{1+k+k\,cos\,x}\Big]cos\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\} \ldots\ldots (\xi_{13})$$

Ten slotte vindt men na invoering in beide integralen van (δ_{11}), (δ_{13}), (δ_8) en (ξ_1)

$$\int\frac{cos^5\tfrac{1}{2}x}{sin\tfrac{1}{2}x}\Delta dx = \frac{1}{4}\int\frac{(1+cos\,x)^3}{sin\,x}\Delta dx = \frac{1}{4}\int\frac{4+4\,cos\,x-3\,sin^2x - sin^2x\,.\,cos\,x}{sin\,x}\Delta dx =$$

$$= L\frac{2(\Delta - cos x)}{1+\Delta} + \frac{1}{8k}(3+5k^2)L\frac{\Delta + k cos x}{1+k} + \frac{1}{24k^2}\{-(2+33k^2)+(8+3cos x)3k^2\Delta+2\Delta^3\}, \ldots (\xi_{14})$$

$$\int\frac{sin^5\tfrac{1}{2}x}{cos\tfrac{1}{2}x}\Delta dx = \frac{1}{4}\int\frac{(1-cos\,x)^3}{sin\,x}\Delta dx = \frac{1}{4}\int\frac{4-4\,cos\,x-3\,sin^2x + sin^2x\,.\,cos\,x}{sin\,x}\Delta dx =$$

$$= L\frac{(\Delta - cos x)(1+\Delta)}{2\,sin^2x} + \frac{1}{8k}(3+5k^2)L\frac{\Delta + k cos x}{1+k} - \frac{1}{24k^2}\{-(2+15k^2)+(8-3cos x)3k^2\Delta+2\Delta^3\}. . (\xi_{15})$$

15. Voor het gebruik is het noodig de voorgaande uitkomsten in tafels te vereenigen: zoo ontstonden de Tafels 1—32; terwijl voor de regelmaat hierbij gevoegd zijn de Tafels 33 en 34, die eerst in de volgende Hoofdstukken te voorschijn treden, zoodat men dan ook aldaar de eindintegralen bepaald vindt.

TAFELS 1—34.

AANMERKINGEN.

De integralen zijn genomen tusschen de grenzen 0 en x.

$$\Delta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}, \qquad F = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}, \qquad E = \int_0^x dx \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}.$$

Verder is bij

$$\Delta(l, y), \quad F(l, y), \quad E(l, y), \quad \Pi(-r, l, y),$$

$$\Delta(l, z), \quad F(l, z), \quad E(l, z), \quad \Pi(-r, l, z),$$

$$\tang \tfrac{1}{2} y = \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, \sqrt{2k}, \qquad l^2 = \tfrac{1}{2}(1 + k),$$

$$\tang \tfrac{1}{2} z = \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \sqrt{2k}, \qquad r = \frac{1}{8k}(1 + 2k)^2.$$

TAFEL 1.

$$\int \sin^p x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-1)k^2}\left\{\sin^{p-3}x \,.\, \cos x \,.\, \Delta + (p-2)(1+k^2)\int \sin^{p-2}x \frac{dx}{\Delta} - (p-3)\int \sin^{p-4}x \frac{dx}{\Delta}\right\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \,.\, \Delta} = L\frac{\Delta - \cos x}{\sin x}. \qquad \int \frac{dx}{\Delta} = F. \qquad \int \sin x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k} L \frac{1+k}{k\cos x + \Delta}. \qquad \int \sin^2 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k^2}(F - E).$$

$$\int \sin^3 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k^2}\left\{\cos x \,.\, \Delta - 1 + \frac{1}{k}(1+k^2)\, L \frac{1+k}{k\cos x + \Delta}\right\}.$$

$$\int \sin^4 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{3k^4}\left\{(2+k^2)\,F - (1+k^2)\, 2\, E + k^2 \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\right\}.$$

TAFEL 2.

$$\int \sin^p x \,.\, \cos x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{p k^2}\left\{- \sin^{p-1} x \,.\, \Delta + (p-1)\int \sin^{p-2} x \,.\, \cos x \frac{dx}{\Delta}\right\}.$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\frac{dx}{\Delta} = L\frac{2\sin x}{1+\Delta}. \qquad \int \cos x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k} Bg \sin(k \sin x). \qquad \int \sin x \,.\, \cos x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k^2}(1 - \Delta).$$

$$\int \sin^2 x \,.\, \cos x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k^3}\left\{Bg \sin(k \sin x) - k \sin x \,.\, \Delta\right\}. \qquad \int \sin^3 x \,.\, \cos x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{3k^4}(1-\Delta)^2(2+\Delta).$$

TAFEL 3.

$$\int \cos^p x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-1)k^2}\left\{\sin x \,.\, \cos^{p-3} x \,.\, \Delta - (p-2)(1-2k^2)\int \cos^{p-2} x \frac{dx}{\Delta} + (p-3)(1-k^2)\int \cos^{p-4} x \frac{dx}{\Delta}\right\}.$$

$$\int \frac{dx}{\cos x \,.\, \Delta} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{\sqrt{1-k^2}\sin x + \Delta}{\cos x}. \qquad \int \frac{dx}{\Delta} = F.$$

$$\int \cos x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k} Bg \sin(k \sin x). \qquad \int \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k^2}\left\{E - (1-k^2)\,F\right\}.$$

$$\int \cos^3 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k^2}\left\{\sin x \,.\, \Delta - \frac{1}{k}(1-2k^2)\, Bg \sin(k \sin x)\right\}.$$

$$\int \cos^4 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{3k^4}\left\{(2-3k^2)(1-k^2)\,F - (1-2k^2)\, 2\, E + k^2 \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\right\}.$$

TAFEL 4.

$$\int \sin x \, . \cos^p x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{p k^2} \left\{ 1 - \cos^{p-1} x \, . \Delta - (p-1)(1-k^2) \int \sin x \, . \cos^{p-2} x \frac{dx}{\Delta} \right\}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x}. \quad \int \sin x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k} L \frac{1+k}{k\cos x + \Delta}. \quad \int \sin x . \cos x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k^2}(1-\Delta).$$

$$\int \sin x \, . \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k^3} \left\{ (1-k^2) L \frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + k - k\cos x \, . \Delta \right\}.$$

$$\int \sin x \, . \cos^3 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{3k^4} \{(1-\Delta)(3k^2+\Delta-2)\}.$$

TAFEL 5.

$$\int tang^p x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)} \left\{ \frac{tang^{p-2} x}{\sin x . \cos x} \Delta - (p-2)(2-k^2) \int tang^{p-2} x \frac{dx}{\Delta} - (p-3) \int tang^{p-4} x \frac{dx}{\Delta} \right\}.$$

$$\int \frac{dx}{tang\, x \, . \Delta} = L \frac{2 \sin x}{1+\Delta}. \quad \int \frac{dx}{\Delta} = F. \quad \int tang\, x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{\sqrt{1+k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x}.$$

$$\int tang^2 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{1-k^2}(tang\, x \, . \Delta - E).$$

$$\int tang^4 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{3(1-k^2)^2} \{ (2-k^2)\, 2E - (1-k^2) F + [(1-k^2)\, tang^2 x - (3-k^2)]\, tang\, x \, . \Delta \}.$$

TAFEL 6.

$$\int tang^p x . \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-3)(1-k^2)} \left\{ tang^{p-3} x . \Delta - [2(p-3)-(p-2)k^2] \int tang^{p-2} x . \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} - \right.$$
$$\left. - (p-3) \int tang^{p-4} x \, . \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} \right\}.$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{tang\, x} \frac{dx}{\Delta} = L \frac{2 \sin x}{1+\Delta} - \frac{1}{k^2}(1-\Delta). \quad \int \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k^2} \{E - (1-k^2) F\}.$$

$$\int tang\, x \, . \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k^2}(1-\Delta). \quad \int tang^2 x \, . \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k^2}(F-E).$$

$$\int tang^3 x \, . \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x} - \frac{1}{k^2}(1-\Delta).$$

TAFEL 7.

$$\int\frac{dx}{\cos^p x.\Delta}=\frac{1}{(p-1)(1-k^2)}\left\{\frac{\sin x}{\cos^{p-1}x}\Delta+(p-2)(1-2k^2)\int\frac{dx}{\cos^{p-2}x.\Delta}+(p-3)k^2\int\frac{dx}{\cos^{p-4}x.\Delta}\right\}.$$

$$\int\cos x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{k}Bg\sin(k\sin x).\qquad\int\frac{dx}{\Delta}=F.\qquad\int\frac{dx}{\cos x.\Delta}=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}L\frac{\sqrt{1-k^2}\sin x+\Delta}{\cos x}.$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x.\Delta}=\frac{1}{1-k^2}\{(1-k^2)F-E+\operatorname{tang}x.\Delta\}.$$

$$\int\frac{dx}{\cos^4 x.\Delta}=\frac{1}{3(1-k^2)^2}\left\{(2-3k^2)(1-k^2)F-(1-2k^2)2E+[(1-k^2)+(1-2k^2)2\cos^2 x]\frac{\sin x}{\cos^3 x}\Delta\right\}.$$

TAFEL 8.

$$\int\frac{\sin x}{\cos^p x}\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{(p-1)(1-k^2)}\left\{\frac{\Delta}{\cos^{p-1}x}-1-(p-2)k^2\int\frac{\sin x}{\cos^{p-2}x}\frac{dx}{\Delta}\right\}.$$

$$\int\sin x.\cos^3 x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{3k^4}(1-\Delta)(3k^2+\Delta-2).$$

$$\int\sin x.\cos^2 x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{2k^3}\left\{(1-k^2)L\frac{\Delta+k\cos x}{1+k}+k-k\cos x.\Delta\right\}.$$

$$\int\sin x.\cos x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{k^2}(1-\Delta).\qquad\int\sin x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{k}L\frac{1+k}{k\cos x+\Delta}.\qquad\int\frac{\sin x}{\cos x}\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}L\frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x}.$$

TAFEL 9.

$$\int\sin^p\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{(p-2)4k^2}\left\{-\sin x.\sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\Delta+(p-3)8k^2\int\sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}-\right.$$

$$\left.-(p-4)(1+4k^2)\int\sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}+(p-5)\int\sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}\right\}.$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2\frac{1}{2}x.\Delta}=2\{F-E-\cot\tfrac{1}{2}x.\Delta\}.$$

$$\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\Delta}=-\frac{\sqrt{2k}}{1+2k}\left\{F(l,y)+\frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,y)\right\}-\frac{1}{2}L\frac{(\Delta+\cos\frac{1}{2}x)^2}{(1+k^2-2r)2k(1+\cos x)+\Delta^2}.$$

$$\int\frac{dx}{\Delta}=F.\qquad\int\sin\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=-\frac{1}{\sqrt{2k}}F(l,y).\qquad\int\sin^2\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{2}\left\{F-\frac{1}{k}Bg\sin(k\sin x)\right\}.$$

$$\int\sin^3\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{2k\sqrt{2k}}\left\{(1-2k)F(l,y)-2E(l,y)+\frac{2\cos\frac{1}{2}x.\sqrt{2k}}{1+k+k\cos x}\Delta\right\}.$$

$$\int\sin^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{4k^2}\{E-(1-2k^2)F-2k\,Bg\sin(k\sin x)\}.$$

TAFEL 10.

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2}x \,.\, \cos\tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-1)\,4k^2}\left\{2\sin^{p-3}\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta + (p-2)\,4k^2 \int \sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos\tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta} - \right.$$

$$\left. - (p-3)\int \sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos\tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta}\right\}.$$

$$\int \frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\frac{dx}{\Delta} = L\frac{2(\Delta - \cos x)}{1+\Delta}. \quad \int \cos\tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2k}}F(l,z). \quad \int \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos\tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k}L\frac{1+k}{k\cos x + \Delta}.$$

$$\int \sin^2\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos\tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k\sqrt{2k}}\left\{F(l,z) - 2E(l,z) + \frac{2\sin\frac{1}{2}x \,.\, \sqrt{2k}}{1+k-k\cos x}\Delta\right\}.$$

$$\int \sin^3\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos\tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{4k^2}\left\{kL\frac{1+k}{k\cos x + \Delta} - 1 + \Delta\right\}.$$

$$\int \sin^4\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos\tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{12k^2\sqrt{2k}}\left\{-(1-4k)F(l,z) - 8kE(l,z) + \frac{1+5k-k\cos x}{1+k-k\cos x}2\sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\sqrt{2k}\right\}.$$

TAFEL 11.

$$\int \cos^p \tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{(p-2)\,4k^2}\left\{\sin x \,.\, \cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta + (p-3)\,8k^2 \int \cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta} - \right.$$

$$\left. - (p-4)(1+4k^2)\int \cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta} + (p-5)\int \cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta}\right\}.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2\frac{1}{2}x \,.\, \Delta} = 2\left\{F - E + \tan\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\right\}.$$

$$\int \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x \,.\, \Delta} = \frac{\sqrt{2k}}{1+2k}\left\{F(l,z) + \frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,z)\right\} + \frac{1}{2}L\frac{(\Delta + \sin\frac{1}{2}x)^2}{(1+k-2r)2k(1-\cos x)+\Delta^2}. \quad \int \frac{dx}{\Delta} = F.$$

$$\int \cos\tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2k}}F(l,z). \qquad \int \cos^2\tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2}\left\{F + \frac{1}{k}Bg\sin(k\sin x)\right\}.$$

$$\int \cos^3\tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k\sqrt{2k}}\left\{2E(l,z) - (1-2k)F(l,z) - \frac{2\sin\frac{1}{2}x \,.\, \sqrt{2k}}{1+k-k\cos x}\Delta\right\}.$$

$$\int \cos^4\tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{4k^2}\left\{E - (1-2k^2)F + 2k\,Bg\sin(k\sin x)\right\}.$$

TAFEL 12.

$$\int sin\,\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^p\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{(p-1)\,4k^2}\left\{2-2\,cos^{p-3}\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta+(p-2)4\,k^2\int sin\,\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}-\right.$$

$$\left.-(p-3)\int sin\,\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}\right\}.$$

$$\int\frac{sin\frac{1}{2}x}{cos\frac{1}{2}x}\frac{dx}{\Delta}=L\frac{(1+\Delta)(\Delta-cosx)}{2\,sin^2x}.\quad\int sin\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=-\frac{1}{\sqrt{2k}}F(l,y).\quad\int sin\tfrac{1}{2}x.cos\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{2k}L\frac{1+k}{kcosx+\Delta}.$$

$$\int sin\,\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^2\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{2\,k\sqrt{2k}}\left\{2\,E(l,y)-F(l,y)-\frac{2\,cos\,\frac{1}{2}x\,.\sqrt{2k}}{1+k+k\,cos\,x}\Delta\right\}.$$

$$\int sin\,\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^3\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{4\,k^2}\left\{k\,L\frac{1+k}{k\,cos\,x+\Delta}+1-\Delta\right\}.$$

$$\int sin\tfrac{1}{2}x.cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{12k^2\sqrt{2k}}\left\{(1-4k)F(l,y)+8kE(l,y)-\frac{1+5k+kcosx}{1+k+k\,cosx}2\,cos\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}+2\sqrt{2k}\right\}.$$

TAFEL 13.

$$\int tang^p\,\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{p-1}\left\{\frac{8\,tang^{p-3}\frac{1}{2}x}{sin^2x}\Delta-[(3\,p-7)-(p-2)\,4\,k^2]\int tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}-\right.$$

$$\left.-[(3\,p-11)-(p-4)\,4\,k^2]\int tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}-(p-5)\int tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}\right\}.$$

$$\int\frac{dx}{tang^2\frac{1}{2}x\,.\,\Delta}=F-2\,E-2\,cot\,\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta.\quad\int\frac{dx}{tang\,\frac{1}{2}x\,.\,\Delta}=L\frac{2\,(\Delta-cos\,x)}{1+\Delta}.\quad\int\frac{dx}{\Delta}=F.$$

$$\int tang\,\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=L\frac{(1+\Delta)\,(\Delta-cos\,x)}{2\,sin^2x}.$$

$$\int tang^2\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=F-2\,E+2tang\tfrac{1}{2}x.\Delta.\quad\int tang^3\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{cos^2\frac{1}{2}x}\Delta-(1-2k^2)L\frac{(1+\Delta)(\Delta-cosx)}{2\,sin^2x}-1.$$

$$\int tang^4\,\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{3}\left\{(1-2\,k^2)8\,E-(5-8\,k^2)F-\frac{2\,tang\,\frac{1}{2}x}{cos^2\,\frac{1}{2}x}[(1-4\,k^2)+(1-2\,k^2)2\,cos\,x]\,\Delta\right\}.$$

---

*

TAFEL 14.

$$\int tang^p \tfrac{1}{2}x \cdot \cos^4 \tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{p-5}\Big\{ 2\,tang^{p-5}\tfrac{1}{2}x.\Delta - [3(p-5)-(p-6)4k^2]\int tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} -$$

$$- [3(p-5)-(p-4)4k^2]\int tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} - (p-5)\int tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}\Big\}.$$

$$\int \frac{1}{tang\,\tfrac{1}{2}x}\cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = L\frac{2(\Delta-\cos x)}{1+\Delta} - \frac{3}{4k}L\frac{1+k}{k\cos x+\Delta} - \frac{1}{4k^2}(1-\Delta).$$

$$\int \cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{4k^2}\{E-(1-2k^2)F + 2k\,Bg\sin(k\sin x)\}.$$

$$\int tang\,\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{4k^2}\Big\{kL\frac{1+k}{k\cos x+\Delta}+1-\Delta\Big\}.$$

$$\int tang^2\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{4k^2}(F-E). \qquad \int tang^3\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{4k^2}\Big\{kL\frac{1+k}{k\cos x+\Delta}-1+\Delta\Big\}.$$

$$\int tang^4\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{4k^2}\{E-(1-2k^2)F-2k\,Bg\sin(k\sin x)\}.$$

$$\int tang^5\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = L\frac{(\Delta-\cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x} - \frac{3}{4k}L\frac{1+k}{k\cos x+\Delta} + \frac{1}{4k^2}(1-\Delta).$$

TAFEL 15.

$$\int\frac{dx}{\cos^p\tfrac{1}{2}x.\Delta} = \frac{1}{p-1}\Big\{\frac{\sin x}{\cos^p\tfrac{1}{2}x}\Delta + (p-2)(1+4k^2)\int\frac{dx}{\cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x.\Delta} - (p-3)8k^2\int\frac{dx}{\cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x.\Delta} +$$

$$+ (p-4)4k^2\int\frac{dx}{\cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\Delta}\Big\}.$$

$$\int\cos^3\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k\sqrt{2k}}\Big\{2E(l,z)-(1-2k)F(l,z) - \frac{2\sin\tfrac{1}{2}x.\sqrt{2k}}{1+k-k\cos x}\Delta\Big\}.$$

$$\int\cos^2\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2}\Big\{F+\frac{1}{k}Bg\sin(k\sin x)\Big\}.$$

$$\int\cos\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2k}}F(l,z). \qquad \int\frac{dx}{\Delta} = F.$$

$$\int\frac{dx}{\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta} = \frac{\sqrt{2k}}{1+2k}\Big\{F(l,z)+\frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,z)\Big\} + \frac{1}{2}L\frac{(\Delta+\sin\tfrac{1}{2}x)^2}{(1+k-2r)2k(1-\cos x)+\Delta^2}.$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2\tfrac{1}{2}x.\Delta} = 2.\{F-E+tang\,\tfrac{1}{2}x.\Delta\}.$$

$$\int\frac{dx}{\cos^4\tfrac{1}{2}x.\Delta} = \frac{2}{3}\Big\{(1+2k^2)2F-(1+4k^2)2E+4[2(1+2k^2)+(1+4k^2)\cos x]\frac{tang\,\tfrac{1}{2}x}{\cos^2\tfrac{1}{2}x}\Delta\Big\};$$

TAFEL 16.

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^p \frac{1}{2} x} \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{p-1} \left\{ \frac{2\Delta}{\cos^{p-1} \frac{1}{2} x} - 2 + (p-2) 4 k^2 \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-2} \frac{1}{2} x} \frac{dx}{\Delta} - (p-3) 4 k^2 \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-4} \frac{1}{2} x} \frac{dx}{\Delta} \right\}.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{12 k^2 \sqrt{2k}} \left\{ (1-4k) F(l,y) + 8k E(l,y) - \frac{1+5k+k\cos x}{1+k+k\cos x} 2 \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} + 2\sqrt{2k} \right\}.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^3 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{4 k^2} \left\{ k L \frac{1+k}{k \cos x + \Delta} + 1 - \Delta \right\}.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^2 \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k\sqrt{2k}} \left\{ 2 E(l,y) - F(l,y) - \frac{2 \cos \frac{1}{2} x . \sqrt{2k}}{1+k+k\cos x} \Delta \right\}.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k} L \frac{1+k}{k\cos x + \Delta}. \qquad \int \sin \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta} = -\frac{1}{\sqrt{2k}} F(l,y). \qquad \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} \frac{dx}{\Delta} = L \frac{(1+\Delta)(\Delta - \cos x)}{2 \sin^2 x}.$$

TAFEL 17.

$$\int \sin^p x . \Delta dx = \frac{1}{(p+1)k^2} \left\{ \sin^{p-3} x . \cos x . \Delta^3 + [(p-2) + pk^2] \int \sin^{p-2} x . \Delta dx - (p-3) \int \sin^{p-4} x . \Delta dx \right\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} \Delta = L \frac{\Delta - \cos x}{\sin x} + k L \frac{\Delta + k \cos x}{1+k}. \qquad \int \Delta dx = E.$$

$$\int \sin x . \Delta dx = \frac{1}{2k} (1-k^2) L \frac{1+k}{\Delta + k \cos x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x . \Delta.$$

$$\int \sin^2 x . \Delta dx = \frac{1}{3k^2} \{ (1-k^2) F - (1-2k^2) E - k^2 \sin x . \cos x . \Delta \}.$$

$$\int \sin^4 x . \Delta dx = \frac{1}{15 k^4} \{ (1-k^2)(1+2k^2) 2F - (2+3k^2-8k^4) E + [2(1+2k^2) - 3\Delta^2] k^2 \sin x . \cos x . \Delta \}.$$

TAFEL 18.

$$\int \sin^p x . \cos x . \Delta dx = \frac{1}{(p+2) k^2} \left\{ -\sin^{p-1} x . \Delta^3 + (p-1) \int \sin^{p-2} x . \cos x . \Delta dx \right\}.$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} \Delta dx = L \frac{2 \sin x}{1+\Delta} + \Delta - 1. \qquad \int \cos x . \Delta dx = \frac{1}{2k} Bg \sin (k \sin x) + \frac{1}{2} \sin x . \Delta.$$

$$\int \sin x . \cos x . \Delta dx = \frac{1}{3k^2} (1 - \Delta^3). \qquad \int \sin^2 x . \cos x . \Delta dx = \frac{1}{8k^3} \{ Bg \sin (k \sin x) + (1 - 2\Delta^2) k \sin x . \Delta \}.$$

$$\int \sin^3 x . \cos x . \Delta dx = \frac{1}{15 k^4} (1-\Delta)^2 (2 + 4\Delta + 6\Delta^2 + 3\Delta^3).$$

TAFEL 19.

$$\int \cos^p x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{(p+1)k^2}\Big\{ \sin x \,.\, \cos^{p-3} x \,.\, \Delta^3 - [(p-2)-(p-1)\,2\,k^2] \int \cos^{p-2} x \,.\, \Delta\, dx +$$

$$+ (p-3)(1-k^2) \int \cos^{p-4} x \,.\, \Delta\, dx \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\cos x}\Delta = k\, Bg\sin(k \sin x) + \sqrt{1-k^2}\, L \frac{\sin x \,.\, \sqrt{1-k^2}+\Delta}{\cos x}. \qquad \int \Delta\, dx = E.$$

$$\int \cos x.\Delta dx = \frac{1}{2k} Bg\sin(k\sin x) + \frac{1}{2}\sin x.\Delta. \quad \int \cos^2 x.\Delta dx = \frac{1}{3k^2}\{(1+k^2)E-(1-k^2)F+k^2\sin x.\cos x.\Delta\}.$$

$$\int \cos^4 x.\Delta dx = \frac{1}{15k^4}\{(1-k^2)(1-3k^2)2F-(2-7k^2-3k^4)E-[2(1-3k^2)-3\Delta^2]k^2\sin x.\cos x.\Delta\}.$$

TAFEL 20.

$$\int \sin x \,.\, \cos^p x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{(p+2)k^2}\Big\{1 - \cos^{p-1} x \,.\, \Delta^3 - (p-1)(1-k^2) \int \sin x \,.\, \cos^{p-2} x \,.\, \Delta\, dx \Big\}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\Delta dx = \sqrt{1-k^2} L \frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x} + 1 - \Delta. \quad \int \sin x.\Delta dx = \frac{1}{2k}(1-k^2) L \frac{1+k}{\Delta + k\cos x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x.\Delta.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{3k^2}(1-\Delta^3).$$

$$\int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{8k^3}\Big\{(1-k^2)^2 L \frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + k(1+k^2) + [(1-k^2)-2\Delta^2]k\cos x.\Delta\Big\}.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos^3 x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{15k^4}\{-(2-5k^2)+5(1-k^2)\Delta^3 - 3\Delta^5\}.$$

TAFEL 21.

$$\int \mathrm{tang}^p x.\Delta dx = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)}\Big\{\frac{\mathrm{tang}^{p-2} x}{\sin x.\cos x}\Delta^3 - [(p-2)2-pk^2]\int \mathrm{tang}^{p-3}x.\Delta dx - (p-3)\int \mathrm{tang}^{p-4}x.\Delta dx\Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{tang} x}\Delta = L\frac{2\sin x}{1+\Delta}+\Delta-1. \quad \int \Delta dx = E. \quad \int \mathrm{tang} x.\Delta dx = \sqrt{1-k^2} L \frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x} + 1 - \Delta.$$

$$\int \mathrm{tang}^2 x \,.\, \Delta\, dx = F - 2E + \mathrm{tang}\, x \,.\, \Delta.$$

$$\int \mathrm{tang}^4 x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{3(1-k^2)}\Big\{(7-8k^2)E - (1-k^2)4F - [4(1-k^2)+4\cos^2 x - 5\Delta^2]\frac{\sin x}{\cos^3 x}\Delta\Big\}.$$

TAFEL 22.

$$\int tang^p x \,.\, cos^2 x \,.\, \Delta \, dx = \frac{1}{(p-3)(1-k^2)} \Big\{ tang^{p-3} x \,.\, \Delta^3 -$$

$$- [2(p-3) - p k^2] \int tang^{p-2} x \,.\, cos^2 x \,.\, \Delta \, dx - (p-3) \int tang^{p-4} x \,.\, cos^2 x \,.\, \Delta \, dx \Big\}.$$

$$\int \frac{cos^2 x}{tang\, x} \Delta \, dx = L \frac{2 \sin x}{1+\Delta} - \frac{1}{3k^2}(1-\Delta)\,\{(1+3k^2)+\Delta+\Delta^2\}.$$

$$\int cos^2 x \,.\, \Delta \, dx = \frac{1}{3k^2}\{(1+k^2)E - (1-k^2)F + k^2 \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\}.$$

$$\int tang\, x \,.\, cos^2 x \,.\, \Delta \, dx = \frac{1}{3k^2}(1-\Delta^3).$$

$$\int tang^2 x \,.\, cos^2 x \,.\, \Delta \, dx = \frac{1}{3k^2}\{(1-k^2)F - (1-2k^2)E - k^2 \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\}.$$

$$\int tang^3 x . cos^2 x . \Delta dx = \sqrt{1-k^2}\, L \frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x} - \frac{1}{3k^2}(1-\Delta)[(1-3k^2)+\Delta+\Delta^2].$$

TAFEL 23.

$$\int \frac{dx}{cos^p x}\Delta = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)} \Big\{ \frac{\sin x}{cos^{p-1} x}\Delta^3 + [(p-2)-(p-3)2k^2] \int \frac{dx}{cos^{p-2} x}\Delta + (p-5)k^2 \int \frac{dx}{cos^{p-4} x}\Delta \Big\}.$$

$$\int \cos x \,.\, \Delta \, dx = \frac{1}{2k} Bg \sin(k \sin x) + \frac{1}{2} \sin x \,.\, \Delta. \qquad \int \Delta \, dx = E,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x}\Delta = k\, Bg \sin(k \sin x) + \sqrt{1-k^2}\, L \frac{\sin x . \sqrt{1-k^2}+\Delta}{\cos x}. \qquad \int \frac{dx}{cos^2 x}\Delta = F - E + tang\, x \,.\, \Delta.$$

$$\int \frac{dx}{cos^4 x}\Delta = \frac{1}{3(1-k^2)} \Big\{ (1-k^2)\,2F - (2-k^2)E + [(3-2k^2)-(2-k^2)\sin^2 x] \frac{\sin x}{cos^3 x}\Delta \Big\}.$$

TAFEL 24.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^p x} \Delta\, dx = \frac{1}{(p-1)(1-k^2)} \left\{ \frac{\Delta^3}{\cos^{p-1} x} - 1 - (p-4) k^2 \int \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x} \Delta\, dx \right\}.$$

$$\int \sin x . \cos^3 x . \Delta\, dx = \frac{1}{15 k^4} \{ -(2-5k^2) + 5(1-k^2)\Delta^3 - 3\Delta^5 \}.$$

$$\int \sin x . \cos^2 x . \Delta\, dx = \frac{1}{8k^3} \left\{ (1-k^2)^2 L \frac{\Delta + k \cos x}{1+\Delta} + k(1+k^2) + [(1-k^2) - 2\Delta^2] k \cos x . \Delta \right\}.$$

$$\int \sin x . \cos x . \Delta\, dx = \frac{1}{3k^2}(1-\Delta^3). \quad \int \sin x . \Delta\, dx = \frac{1}{2k}(1-k^2) L \frac{1+k}{\Delta + k \cos x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x . \Delta.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} \Delta\, dx = \sqrt{1-k^2}\, L \frac{\sqrt{1-k^2} + \Delta}{(1+\sqrt{1-k^2}) \cos x} + 1 - \Delta.$$

TAFEL 25.

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx = \frac{1}{(p+2) 4k^2} \left\{ -\sin x . \sin^{p-6} \tfrac{1}{2} x . \Delta^3 + 8pk^2 \int \sin^{p-2} \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx - \right.$$
$$\left. - [(p-4) + (p-2) 4k^2] \int \sin^{p-4} \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx + (p-5) \int \sin^{p-6} \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx \right\}.$$

$$\int \frac{\Delta}{\sin^2 \frac{1}{2} x} dx = 2(1-k^2) F - 2E - 2k\, Bg \sin(k \sin x) - 2 \cot \tfrac{1}{2} x . \Delta.$$

$$\int \frac{\Delta}{\sin \frac{1}{2} x} dx = \frac{\sqrt{2k}}{1+2k} \left\{ 2k F(l,y) - 2(1+2k) E(l,y) - \frac{1}{4k}(1-2k) \Pi(-r,l,y) \right\} -$$
$$- \frac{1}{2} L \frac{(\Delta + \cos \frac{1}{2} x)^2}{(1+k-2r) 2k (1+\cos x) + \Delta^2} + \frac{4k \cos \frac{1}{2} x}{1+k+k \cos x} \Delta.$$

$$\int \Delta\, dx = E. \quad \int \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx = \frac{-2}{3\sqrt{2k}} \left\{ 2k E(l,y) + (1-k) F(l,y) + \frac{1-k+k \cos x}{1+k+k \cos x} \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \right\}.$$

$$\int \sin^2 \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx = \frac{1}{4} \{ 2E - \frac{1}{k} Bg \sin(k \sin x) - \sin x . \Delta \}.$$

$$\int \sin^3 \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx = \frac{1}{15 k \sqrt{2k}} \left\{ (1-k)(1-2k) 3 F(l,y) - (1+2k^2) 6 E(l,y) - \right.$$
$$\left. - \left[(1+14k+4k^2) - 4(1+k) k \cos x - \frac{2(4+5k+10k^2) - (1+4k^2)\Delta^2}{1+k+k \cos x} \right] \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \right\}.$$

$$\int \sin^4 \tfrac{1}{2} x . \Delta\, dx = \frac{1}{12k^2} \{ (1+4k^2) E - (1-k^2) F - 3k\, Bg \sin(k \sin x) - (3-\cos x) k^2 \sin x . \Delta \}.$$

TAFEL 26.

$$\int sin^p \tfrac{1}{2} x \,.\, cos \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta \, dx = \frac{1}{(p+3)\,4\,k^2} \Big\{ 2\, sin^{p-3} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta^3 + 4\,p\,k^2 \int sin^{p-2} \tfrac{1}{2} x \,.\, cos \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta \, dx \,-$$

$$- (p-3) \int sin^{p-4} \tfrac{1}{2} x \,.\, cos \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta \, dx \Big\}.$$

$$\int \frac{cos \tfrac{1}{2} x}{sin \tfrac{1}{2} x} \Delta \, dx = k L \frac{\Delta + k \cos x}{1 + k} + L \frac{2(\Delta - \cos x)}{1 + \Delta} + \Delta - 1.$$

$$\int cos \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta \, dx = \frac{2}{3\sqrt{2k}} \Big\{ 2\,k\,E(l,z) + (1-k)\,F(l,z) + \frac{1 - k - k \cos x}{1 + k - k \cos x} \, sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta \sqrt{2k} \Big\}.$$

$$\int sin \tfrac{1}{2} x \,.\, cos \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta \, dx = \frac{1}{4k} (1 - k^2)\, L \frac{1 + k}{\Delta + k \cos x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos x \,.\, \Delta.$$

$$\int sin^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, cos \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta \, dx = \frac{1}{15\,k\sqrt{2k}} \Big\{ (3 + 4k)(1 - k)\, F(l,z) - (3 - 4k^2)\, 2\, E(l,z) \,-$$

$$- \Big[(1 + 2k)^2 - 4\,(1 + k)\, k \cos x - \frac{2\,(4 + 5k) - (1 + 4k)\Delta^2}{1 + k - k \cos x} \Big] \, sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta \sqrt{2k} \Big\}.$$

$$\int sin^3 \tfrac{1}{2} x \,.\, cos \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta \, dx = \frac{1}{24\,k^2} \Big\{ 3\,k(1-k^2)\, L \frac{1 + k}{\Delta + k \cos x} - 2 + 3k^2 - 3\,k^2 \cos x \,.\, \Delta + 2\,\Delta^3 \Big\}.$$

$$\int sin^4 \tfrac{1}{2} x . cos \tfrac{1}{2} x . \Delta dx = \frac{1}{210 k^2 \sqrt{2k}} \Big\{ -(5 - 24k - 32k^2)(1-k) F(l,z) - (29 - 32\,k^2)\, 2\,k\,E(l,z) \,-$$

$$- \Big[5 - 15\Delta^2 + 8k(1+2k)^2 - 32(1+k)k^2 \cos x - 2k \frac{37 + 40k - (1+4k)\Delta^2}{1 + k - k \cos x} \Big] sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big\}.$$

TAFEL 27.

$$\int \cos^p \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{(p+2)\,4k^2} \Big\{ \sin x \,.\, \cos^{p-6} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta^3 + 8pk^2 \int \cos^{p-2} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx -$$

$$- [(p-4) + (p-2)\,4k^2] \int \cos^{p-4} \tfrac{1}{2} \,.\, \Delta\, dx + (p-5) \int \cos^{p-6} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx \Big\}.$$

$$\int \frac{\Delta}{\cos^2 \frac{1}{2} x}\, dx = 2(1-k^2)F - 2E + 2k\, Bg\sin(k \sin x) + 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta.$$

$$\int \frac{\Delta}{\cos \frac{1}{2} x}\, dx = \frac{\sqrt{2k}}{1+2k} \Big\{ (1+2k)\,2E(l,z) - 2kF(l,z) + \frac{1-2k}{4k}\, \Pi(-r,l,z) \Big\} +$$

$$+ \frac{1}{2} L \frac{(\sin \frac{1}{2} x + \Delta)^2}{(1+k-2r)\,2k(1-\cos x) + \Delta^2} - \frac{4k \sin \frac{1}{2} x}{1+k-k\cos x}\, \Delta.$$

$$\int \Delta\, dx = E. \quad \int \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx = \frac{2}{3\sqrt{2k}} \Big\{ 2kE(l,z) + (1-k)F(l,z) + \frac{1-k-k\cos x}{1+k-k\cos x} \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta \sqrt{2k} \Big\}.$$

$$\int \cos^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{4} \Big\{ 2E + \frac{1}{k} Bg\sin(k \sin x) + \sin x \,.\, \Delta \Big\}.$$

$$\int \cos^3 \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{15k\sqrt{2k}} \Big\{ (1+2k^2)\,6E(l,z) - (1-k)(1-2k)\,3F(l,z) +$$

$$+ \Big[(1+14k+4k^2) - 4(1+k)k\cos x - \frac{2(4+5k+10k^2) - (1+4k)\Delta^2}{1+k-k\cos x} \Big] \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta \sqrt{2k} \Big\}.$$

$$\int \cos^4 \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{12k^2} \{ (1+4k^2)E - (1-k^2)F + 3k\, Bg\sin(k \sin x) + (3+\cos x)\,k^2 \sin x \,.\, \Delta \}.$$

TAFEL 28.

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^p\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{(p+3)4k^2}\Big\{2 - 2\cos^{p-3}\tfrac{1}{2}x.\Delta^3 + 4pk^2\int \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\, dx -$$

$$-(p-3)\int \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\, dx\Big\}.$$

$$\int \frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x}\Delta\, dx = k\,L\,\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + L\,\frac{(\Delta - \cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x} + 1 - \Delta.$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\, dx = \frac{-2}{3\sqrt{2k}}\Big\{(1-k)\,F(l,y) + 2k\,E(l,y) + \frac{1-k+k\cos x}{1+k+k\cos x}\cos\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{4k}(1-k^2)\,L\,\frac{1+k}{\Delta + k\cos x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos x \,.\, \Delta.$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^2\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{15k\sqrt{2k}}\Big\{(3-4k^2)\,2\,E(l,y) - (3+4k)(1-k)\,F(l,y) +$$

$$+\Big[(1+2k)^2 - 4(1+k)\,k\cos x - \frac{2(4+5k)-(1+4k)\Delta^2}{1+k+k\cos x}\Big]\cos\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^3\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{24k^2}\Big\{3k(1-k^2)\,L\,\frac{1+k}{\Delta + k\cos x} + 2 + 3k^2 - 3k^2\cos x \,.\, \Delta - 2\Delta^3\Big\}.$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x.\Delta\, dx = \frac{1}{210k^2\sqrt{2k}}\Big\{(5-24k-32k^2)(1-k)F(l,y) + (29-32k^2)2kE(l,y) +$$

$$+15+\Big[5-15\Delta^2+8k(1+2k)^2-32(1+k)k^2\cos x-2k\,\frac{37+40k-(1+4k)\Delta^2}{1+k+k\cos x}\Big]\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

---

*

TAFEL 29.

$$\int tang^p \tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{p-1}\left\{\frac{2\, tang^{p-4}\frac{1}{2}x}{sin\frac{1}{2}x \,.\, cos^3\frac{1}{2}x}\Delta^3 - [(3p-7)-(p-4)4k^2]\int tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\, dx - \right.$$

$$\left. -[(3p-11)-(p-2)4k^2]\int tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\, dx - (p-5)\int tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\, dx\right\}.$$

$$\int \frac{\Delta}{tang^2\frac{1}{2}x}dx = 2(1-k^2)F - 3E - 2k\, Bg\, sin(k\, sin\, x) - 2\, cot\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta.$$

$$\int \frac{\Delta}{tang\frac{1}{2}x}dx = k\, L\frac{\Delta + k\, cos\, x}{1+k} + L\frac{2(\Delta - cos\, x)}{1+\Delta} + \Delta - 1.$$

$$\int \Delta\, dx = E. \qquad \int tang\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\, dx = k\, L\frac{\Delta + k\, cos\, x}{1+k} + L\frac{(\Delta - cos\, x)(1+\Delta)}{2\, sin^2 x} + 1 - \Delta.$$

$$\int tang^2\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\, dx = 2(1-k^2)F - 3E + 2k\, Bg\, sin(k\, sin\, x) + 2\, tang\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta.$$

$$\int tang^3\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\, dx = 3k\, L\frac{1+k}{\Delta + k\, cos\, x} - (1+2k^2)L\frac{(\Delta - cos\, x)(1+\Delta)}{2\, sin^2 x} + (1+cos^2\tfrac{1}{2}x)\frac{\Delta}{cos^2\frac{1}{2}x} - 2.$$

$$\int tang^4\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{3}\left\{(11+8k^2)E - (1-k^2)8F - 12k\, Bg\, sin(k\, sin\, x) - \right.$$

$$\left. -[(1+2k^2)+(1+k^2)2\, cos\, x]\frac{sin\, x}{cos^4\frac{1}{2}x}\Delta\right\}.$$

TAFEL 30.

$$\int tang^p \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . \Delta dx = \frac{1}{p+5}\Big\{ 2\, tang^{p-5} \tfrac{1}{2}x . \Delta^3 - [3(p-5)-(p-8)4k^2] \int tang^{p-2} \tfrac{1}{2}x\, cos^4 \tfrac{1}{2}x . \Delta dx -$$

$$- [3(p-5)-(p-2)4k^2] \int tang^{p-4} \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . \Delta dx - (p-5) \int tang^{p-6} \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . \Delta dx \Big\}.$$

$$\int \frac{cos^4 \tfrac{1}{2}x}{tg \tfrac{1}{2}x} \Delta dx = L \frac{2(\Delta - cos x)}{1+\Delta} + \frac{1}{8k}(3+5k^2) L \frac{\Delta + k cos x}{1+k} + \frac{1}{24k^2}[-(2+33k^2)+(8+3 cos x)3k^2\Delta + 2\Delta^3].$$

$$\int cos^4 \tfrac{1}{2}x . \Delta dx = \frac{1}{12k^2}\{(1+4k^2)E - (1-k^2)F + 3k\, Bg\, sin\,(k\, sin\, x) + (3+cos\, x)k^2 sin\, x . \Delta\}.$$

$$\int tg \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . \Delta dx = \frac{1}{24k^2}\Big\{3k(1-k^2) L \frac{1+k}{\Delta + k cos x} + 2 + 3k^2 - 3k^2 cos x . \Delta - 2\Delta^3\Big\}.$$

$$\int tg^2 \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . \Delta dx = \frac{1}{12k^2}\{(1-k^2)F - (1-2k^2)E - k^2 sin\, x . cos\, x . \Delta\}.$$

$$\int tg^3 \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . \Delta dx = \frac{1}{24k^2}\Big\{3k(1-k^2) L \frac{1+k}{\Delta + k cos x} - 2 + 3k^2 - 3k^2 cos x . \Delta + 2\Delta^3\Big\}.$$

$$\int tg^4 \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . \Delta dx = \frac{1}{12k^2}\{(1+4k^2)E - (1-k^2)F - 3k\, Bg\, sin\,(k\, sin\, x) - (3-cos x)k^2 sin x . \Delta\}.$$

$$\int tg^5 \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . \Delta dx = L \frac{(\Delta - cos x)(1+\Delta)}{2\, sin^2 x} + \frac{1}{8k}(3+5k^2) L \frac{\Delta + k cos x}{1+k} -$$

$$- \frac{1}{24k^2}[-(2+15k^2) + (8-3 cos x)3k^2\Delta + 2\Delta^3].$$

TAFEL 31.

$$\int\frac{\Delta\,dx}{\cos^p\frac{1}{2}x}=\frac{1}{p-1}\left\{\frac{\sin x}{\cos^p\frac{1}{2}x}\Delta^3+[(p-2)+(p-4)4k^2]\int\frac{\Delta\,dx}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}-(p-6)8k^2\int\frac{\Delta\,dx}{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}+\right.$$
$$\left.+(p-8)4k^2\int\frac{\Delta\,dx}{\cos^{p-6}\frac{1}{2}x}\right\}.$$

$$\int\cos^3\tfrac{1}{2}x.\Delta\,dx=\frac{1}{15k\sqrt{2k}}\left\{(1+2k^2)6E(l,z)-(1-k)(1-2k)3F(l,z)+\right.$$
$$\left.+\left[(1+14k+4k^2)-4(1+k)k\cos x-\frac{2(4+5k+10k^2)-(1+4k)\Delta^2}{1+k-k\cos x}\right]\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\right\}.$$

$$\int\cos^2\tfrac{1}{2}x.\Delta\,dx=\frac{1}{4}\left\{2E+\frac{1}{k}Bg\sin(k\sin x)+\sin x.\Delta\right\}.$$

$$\int\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta\,dx=\frac{2}{3\sqrt{2k}}\left\{2kE(l,z)+(1-k)F(l,z)+\frac{1-k-k\cos x}{1+k-k\cos x}\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\right\}.$$

$$\int\Delta\,dx=E.\quad\int\frac{\Delta\,dx}{\cos\frac{1}{2}x}=\frac{\sqrt{2k}}{1+2k}\left\{(1+2k)2E(l,z)-2kF(l,z)+\frac{1}{4k}(1-2k)\Pi(-r,l,z)\right\}+$$
$$+\frac{1}{2}L\frac{(\Delta+\sin\frac{1}{2}x)^2}{(1+k-2r)2k(1-\cos x)+\Delta^2}-\frac{4k\sin\frac{1}{2}x.\Delta}{1+k-k\cos x}.$$

$$\int\frac{\Delta\,dx}{\cos^2\frac{1}{2}x}=2(1-k^2)F-2E+2kBg\sin(k\sin x)+2\,tang\,\tfrac{1}{2}x.\Delta.$$

$$\int\frac{\Delta\,dx}{\cos^4\frac{1}{2}x}=\frac{1}{3}\left\{(1-k^2)4F-(1-2k^2)4E+[2(1-k^2)+(1-2k^2)\cos x]\frac{\sin x}{\cos^4\frac{1}{2}x}\Delta\right\}.$$

$$\int\frac{\Delta\,dx}{\cos^6\frac{1}{2}x}=\frac{1}{15}\left\{(1+2k^2)(1-k^2)16F-(2+3k^2-8k^4)8E+\right.$$
$$\left.+[4(1-k^2)(1+4k^2)+(1+2k^2)(3-4k^2)2\cos x+2\cos^2x+(3-8k^2)\Delta^2]\frac{\sin x}{\cos^6\frac{1}{2}x}\Delta\right\}.$$

TAFEL 32.

$$\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^p\frac{1}{2}x}\Delta dx=\frac{1}{p-1}\left\{\frac{2\Delta^3}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}-2+(p-4)4k^2\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}\Delta dx-(p-7)4k^2\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}\Delta dx\right\}.$$

$$\int\cos^4\tfrac{1}{2}x.\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta dx=\frac{1}{210k^2\sqrt{2k}}\Big\{(5-24k-32k^2)(1-k)F(l,y)+(29-32k^2)2kE(l,y)+15+$$
$$+\left[5-15\Delta^2+8k(1+2k)^2-32(1+k)k^2\cos x-2k\frac{37+40k-(1+4k)\Delta^2}{1+k+k\cos x}\right]\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int\cos^3\tfrac{1}{2}x.\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta dx=\frac{1}{24k^3}\left\{3k(1-k^2)L\frac{1+k}{\Delta+k\cos x}+2+3k^2-3k^2\cos x.\Delta-2\Delta^3\right\}.$$

$$\int\cos^2\tfrac{1}{2}x.\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta dx=\frac{1}{15k\sqrt{2k}}\Big\{(3-4k^2)2E(l,y)-(3+4k)(1-k)F(l,y)+$$
$$+\left[(1+2k)^2-4(1+k)k\cos x-\frac{2(4+5k)-(1+4k)\Delta^2}{1+k+k\cos x}\right]\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int\cos\tfrac{1}{2}x.\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta dx=\frac{1}{4k}(1-k^2)L\frac{1+k}{\Delta+k\cos x}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos x.\Delta.$$

$$\int\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta dx=\frac{-2}{3\sqrt{2k}}\left\{2kE(l,y)+(1-k)F(l,y)+\frac{1-k+k\cos x}{1+k+k\cos x}\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\right\}.$$

$$\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x}\Delta dx=kL\frac{\Delta+k\cos x}{1+k}+L\frac{(\Delta-\cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x}+1-\Delta.$$

TAFEL 33.

$$\int \sin^p x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{(p-3)k^2} \left\{ \frac{\sin^{p-3} x . \cos x}{\Delta} + [(p-2)+(p-4)k^2] \int \sin^{p-2} x \frac{dx}{\Delta^3} - (p-3) \int \sin^{p-4} x \frac{dx}{\Delta^3} \right\}.$$

$$\int \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{1-k^2} \left\{ E - \frac{k^2 \sin x . \cos x}{\Delta} \right\}. \qquad \int \sin x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{\Delta - \cos x}{(1-k^2)\Delta}.$$

$$\int \sin^2 x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2(1-k^2)} \left\{ E - (1-k^2) F - \frac{k^2 \sin x . \cos x}{\Delta} \right\}.$$

$$\int \sin^3 x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \left\{ \frac{\Delta - \cos x}{(1-k^2)\Delta} + \frac{1}{k} L \frac{\Delta + k \cos x}{1+k} \right\}.$$

$$\int \sin^4 x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^4(1-k^2)} \left\{ (2-k^2) E - (1-k^2) 2 F - \frac{k^2 \sin x . \cos x}{\Delta} \right\}.$$

TAFEL 34.

$$\int \cos^p x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{(p-3)k^2} \left\{ \frac{\sin x . \cos^{p-3} x}{\Delta} - [(p-2)-(p-3)2k^2] \int \cos^{p-2} x \frac{dx}{\Delta^3} + \right.$$
$$\left. + (p-3)(1-k^2) \int \cos^{p-4} x \frac{dx}{\Delta^3} \right\}.$$

$$\int \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{1-k^2} \left\{ E - \frac{k^2 \sin x . \cos x}{\Delta} \right\}. \qquad \int \cos x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{\sin x}{\Delta}.$$

$$\int \cos^2 x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \left\{ F - E \right\} + \frac{\sin x . \cos x}{\Delta}.$$

$$\int \cos^3 x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \left\{ \frac{1}{k} Bg \sin (k \sin x) - (1-k^2) \frac{\sin x}{\Delta} \right\}.$$

$$\int \cos^4 x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^4} \left\{ (2-k^2) E - (1-k^2) 2 F - \frac{(1-k^2) k^2 \sin x . \cos x}{\Delta} \right\}.$$

HOOFDSTUK II.

ONDERZOEK VAN INTEGRALEN, DIE BEHALVE GONIOMETRISCHE FUNCTIËN NOG DE ELLIPTISCHE INTEGRAAL DER EERSTE SOORT, F, BEVATTEN.

1. Nu alzoo het materiaal gereed is, kunnen wij overgaan tot de afleiding van ons herleidingstheorema. Wanneer men zich herinnert, dat men eene integraal naar een parameter kan differentieeren, ook wanneer die parameter niet in de te integreeren functie, maar alleen in eene van de grenzen der integratie, voorkomt; dat is hier

$$\frac{d}{da}\int_0^a f(x)\,dx = f(a);$$

— zoo is klaarblijkelijk

$$\frac{d}{dx}.\left[\varphi(x)\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 y}}\right] = \frac{d\varphi(x)}{dx}\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 y}} + \varphi(x)\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}.$$

dat is

$$\frac{d}{dx}[\varphi(x).F] = F\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{\varphi(x)}{\Delta}.$$

Wanneer men deze integreert, zoo komt er

$$\varphi(x).F = \int\frac{\varphi(x)\,dx}{\Delta} + \int F\frac{d\varphi(x)}{dx}dx,$$

derhalve

$$\int F\frac{d\varphi(x)}{dx}dx = \varphi(x).F - \int\frac{\varphi(x)\,dx}{\Delta}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Dewijl deze integralen hier, evenzeer als al onze integralen, tusschen de grenzen 0 en x moeten genomen worden, is dit dus ook bij de geïntegreerde functie $\varphi(x).F$ het geval. Bij de grens $x=0$ wordt ook F gelijk nul; maar nu mag

$\varphi(x)$ natuurlijk niet oneindig worden. Vandaar dat bij de voorgaande herleidingsformulen (zie Hoofdstuk I) de factoren $\frac{1}{sin^p x}$ en $\frac{1}{tang^p x}$ onder het integraalteeken werden uitgesloten, maar de factor $\frac{1}{cos^p x}$ daarentegen is opgenomen.

Wij kunnen nu derhalve gerustelijk overgaan tot het toepassen van het theorema ($\boldsymbol{a}$) en zullen een aanvang maken met de integralen (γ_1) tot (γ_{34}); deze leveren ons

$$\int sin\,x\,.\,cos\,x\,.\,F\,dx = \frac{1}{2k^2}\{E - F\,.\,\Delta^2\}, \quad (1)$$

$$\int \frac{sin\,x}{cos^3 x} F\,dx = \frac{1}{2(1-k^2)}\{E + (1-k^2)\,tang\,x\,.\,F - tang^2 x\,.\,\Delta\}, \quad (2)$$

$$\int sin^3 x\,.\,cos\,x\,.\,F\,dx = \frac{1}{12k^4}\{(1+k^2)\,2E - (2+k^2-3k^4 sin^4 x)\,F - k^2 sin\,x\,.\,cos\,x\,.\,\Delta\}, \quad (3)$$

$$\int sin\,x\,.\,cos^3 x\,.\,F\,dx = \frac{1}{12k^4}\{[(2-5k^2)+3k^4 sin^2 x\,.(1+cos^2 x)]\,F - (1-2k^2)\,2E + k^2 sin\,x\,.\,cos\,x\,.\,\Delta\}, \quad (4)$$

$$\int \frac{sin^3 x}{cos^5 x} F\,dx = \frac{1}{12(1-k^2)^2}\{[1 + 3(1-k^2)\,tang^4 x]\,(1-k^2)\,F - (2-k^2)\,2E + $$
$$+ [(3-k^2) - (1-k^2)\,tang^2 x]\,tang\,x\,.\,\Delta\}, \quad (5)$$

$$\int cos\,x\,.\,F\,dx = sin\,x\,.\,F + \frac{1}{k} L \frac{k\,cos\,x + \Delta}{1+k}, \quad (6)$$

$$\int sin\,x\,.\,F\,dx = -cos\,x\,.\,F + \frac{1}{k} Bg\,sin\,(k\,sin\,x), \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{cos^2 x} F = tang\,x\,.\,F + \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{(1+\sqrt{1-k^2})\,cos\,x}{\sqrt{1-k^2}+\Delta}, \quad (8)$$

$$\int \frac{cos\,x}{sin^2 x} F\,dx = -\frac{1}{sin\,x} F + L \frac{\Delta - cos\,x}{sin\,x}, \quad (9)$$

$$\int \frac{sin\,x}{cos^2 x} F\,dx = \frac{1}{cos\,x} F - \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{\sqrt{1-k^2}\,sin\,x + \Delta}{cos\,x}, \quad (10)$$

$$\int \frac{dx}{sin^2 x} F = -\frac{1}{tang\,x} F + L \frac{2\,sin\,x}{1+\Delta}, \quad (11)$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^3 \frac{1}{2} x} F\, dx = -\frac{\cos x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F + 2E - 2 \tang \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta, \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

$$\int \frac{\cos \frac{1}{2} x}{\sin^3 \frac{1}{2} x} F\, dx = -\frac{\cos x}{\sin^2 \frac{1}{2} x} F - 2E - 2 \cot \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta, \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

$$\int \sin^3 \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, F\, dx = \frac{1}{8k^2} \left\{ (1 - 2k^2 + 4k^2 \sin^4 \tfrac{1}{2} x) F - E + 2k\, Bg \sin (k \sin x) \right\}, \quad \ldots \quad (14)$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^3 \tfrac{1}{2} x \,.\, F\, dx = \frac{1}{8k^2} \left\{ E - (1 - 2k^2 + 4k^2 \cos^4 \tfrac{1}{2} x) F + 2k\, Bg \sin (k \sin x) \right\}, \quad \ldots \quad (15)$$

$$\int \frac{\sin^3 \frac{1}{2} x}{\cos^5 \frac{1}{2} x} F dx = \frac{1}{6} \left\{ (5 - 8k^2 + 3 \tang^4 \tfrac{1}{2} x) F - (1 - 2k^2) 8E + \frac{2 \tang \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} [(1 - 4k^2) + (1 - 2k^2) 2 \cos x] \Delta \right\}, \ldots (16)$$

$$\int \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, F\, dx = 2 \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, F + \frac{2}{\sqrt{2k}} F(l, y), \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, F\, dx = -2 \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, F + \frac{2}{\sqrt{2k}} F(l, z), \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F = 2 \tang \tfrac{1}{2} x \,.\, F + 2L \frac{2 \sin^2 x}{(1 + \Delta)(\cos x + \Delta)}, \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

$$\int \frac{\cos \frac{1}{2} x}{\sin^2 \frac{1}{2} x} F dx = -\frac{2}{\sin \frac{1}{2} x} F - \frac{2\sqrt{2k}}{1 + 2k} \left\{ F(l, y) + \frac{1 - 2k}{4k} \Pi(-r, l, y) \right\} - \frac{1}{2} L \frac{(\Delta + \cos \frac{1}{2} x)^2}{(1 + k - 2r) 2k (1 + \cos x) + \Delta^2}, \ldots (20)$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F dx = \frac{2}{\cos \frac{1}{2} x} F - \frac{2\sqrt{2k}}{1 + 2k} \left\{ F(l, z) + \frac{1 - 2k}{4k} \Pi(-r, l, z) \right\} - \frac{1}{2} L \frac{(\Delta + \sin \frac{1}{2} x)^2}{(1 + k - 2r) 2k (1 - \cos x) + \Delta^2}, \ldots (21)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{1}{2} x} F = -\frac{2}{\tang \frac{1}{2} x} F + 2L \frac{2(\Delta - \cos x)}{1 + \Delta}, \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

$$\int \sin^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, F dx = \frac{2}{3} \sin^3 \tfrac{1}{2} x \,.\, F + \frac{1}{3k\sqrt{2k}} \left\{ 2E(l, y) - (1 - 2k) F(l, y) - \frac{2 \cos \frac{1}{2} x \,.\, \sqrt{2k}}{1 + k + k \cos x} \Delta \right\}, \ldots (23)$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, F dx = -\frac{2}{3} \cos^3 \tfrac{1}{2} x \,.\, F + \frac{1}{3k\sqrt{2k}} \left\{ 2E(l, z) - (1 - 2k) F(l, z) - \frac{2 \sin \ \ x \,.\, \sqrt{2k}}{1 + k - k \cos x} \Delta \right\}, \ldots (24)$$

$$\int \frac{\sin^2 \frac{1}{2} x}{\cos^4 \frac{1}{2} x} F\, dx = \frac{2}{3} \left\{ tg^3 \tfrac{1}{2} x \,.\, F - \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} x} \Delta + 1 + (1 - 2k^2) L \frac{(\Delta - \cos x)(1 + \Delta)}{2 \sin^2 x} \right\}, \ldots (25)$$

*

$$\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} F\,dx = \frac{1}{12(1-k^2)^2} \Big\{ (1-2k^2)\,2E + [1+6(1-k^2)\,tg^2 x + 3(1-k^2)\,tang^4 x](1-k^2)\,F -$$

$$- [(1-k^2) + (1-2k^2)\,2\cos^2 x] \frac{\sin x}{\cos^3 x} \Delta \Big\}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (26)$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^5 \frac{1}{2} x} F\,dx = \frac{1}{6} \Big\{ (1+4k^2)\,4E - [(1+8k^2) - 6\,tang^2 \tfrac{1}{2} x - 3\,tang^4 \tfrac{1}{2} x]\,F -$$

$$- [2(1+2k^2) + (1+4k^2)\cos x] \frac{2\,tang \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} \Delta \Big\}. \quad \ldots \ldots \ldots (27)$$

2. Ten einde op de algemeene herleidingsformulen (C_1) tot (C_8) ons theorema toe te passen, zullen wij het liever eerst omkeeren

$$\int \varphi(x) \frac{dx}{\Delta} = \varphi(x)\,F - \int F \frac{d\varphi(x)}{dx}\,dx. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (\alpha_1)$$

Nu kunnen wij toch dit theorema op elke der integralen toepassen, die in elke formule (C) voorkomen, en vinden dan weder eene herleidingsformule tusschen integralen van denzelfden vorm als de boven beschouwde.

Langs dien weg vindt men naar (C_1)

$$(p-1)k^2 \Big\{ \sin^p x.F - p\int \sin^{p-1} x.\cos x.F\,dx \Big\} = \cos x\ \sin^{p-3} x.\Delta + (p-2)(1+k^2) \Big\{ \sin^{p-2} x.F -$$

$$-(p-2)\int \sin^{p-3} x.\cos x.F\,dx \Big\} - (p-3) \Big\{ \sin^{p-4} x.F - (p-4)\int \sin^{p-5} x.\cos x.F\,dx \Big\}.$$

Wanneer men eerst p vervangt door $p+1$, dan vindt men na herleiding

$$\int \sin^p x.\cos x.F\,dx = \frac{1}{p(p+1)k^2} \Big\{ (p-1)^2(1+k^2) \int \sin^{p-2} x.\cos x.F\,dx -$$

$$-(p-2)(p-3)\int \sin^{p-4} x.\cos x.F\,dx - [\cos^2 x + (1-p\cos^2 x)\Delta^2] \sin^{p-3} x.F - \sin^{p-2} x.\cos x.\Delta \Big\} .. (I)$$

Voor p even zijn de eindintegralen voor $p=2$ de integralen (6) en (9); welke laatste echter verdwijnt, wegens den factor ($p-2$). Voor p oneven zijn de eindintegralen voor $p=5$ de integralen (3) en (1).

De formule (C_2) levert evenzoo

$$(p-1)k^2 \Big\{ \cos^p x.F + p\int \cos^{p-1} x.\sin x.F\,dx \Big\} = \sin x.\cos^{p-3} x.\Delta - (p-2)(1-2k^2) \Big\{ \cos^{p-2} x.F +$$

$$+(p-2)\int \cos^{p-3} x.\sin x.F\,dx \Big\} + (p-3)(1-k^2) \Big\{ \cos^{p-4} x.F + (p-4)\int \cos^{p-5} x.\sin x.F\,dx \Big\}.$$

Om den verlangden vorm te verkrijgen moet men ook hier $p+1$ stellen voor p, en verder herleiden; dan komt er

$$\int sin\,x\,.\,cos^p x\,.\,F\,d\,x = \frac{1}{p(p+1)k^2}\Big\{-(p-1)^2(1-2\,k^2)\int sin\,x\,.\,cos^{p-2}x\,.\,F\,d\,x +$$

$$+(p-2)(p-3)(1-k^2)\int sin x.cos^{p-4}x.Fdx+[cos^2x-(2-p\,sin^2x)\Delta^2]cos^{p-3}x.F+sin x\,cos^{p-2}x.\Delta\Big\}\,..\,(II)$$

Voor evene p zal men als eindintegralen hebben de integralen (7) en (10), hoewel deze laatste voor $p=2$ uit de herleidingsformule verdwijnt. Voor onevene p zal men voor $p=5$ de integralen (4) en (1) als eindintegralen vinden.

Nog geeft ons de herleidingsformule (C_3)

$$(p-1)(1-k^2)\Big\{tang^p x\,.\,F-p\int\frac{tang^{p-1}x}{cos^2 x}F\,d\,x\Big\}=\frac{tang^{p-2}x}{sin x.\,cos x}\Delta-(p-2)(2-k^2)\Big\{tang^{p-2}x.F-$$

$$-(p-2)\int\frac{tang^{p-3}x}{cos^2 x}F\,d\,x\Big\}-(p-3)\Big\{tang^{p-4}x\,.\,F-(p-4)\int\frac{tang^{p-5}x}{cos^2 x}F\,d\,x\Big\}.$$

Ook hier moet men p door $p+1$ vervangen; eene verdere herleiding geeft dan

$$\int\frac{tang^p x}{cos^2 x}F\,d\,x=\frac{1}{p(p+1)(1-k^2)}\Big\{-(p-1)^2(2-k^2)\int\frac{tang^{p-2}x}{cos^2 x}F\,d\,x-$$

$$-(p-2)(p-3)\int\frac{tang^{p-4}x}{cos^2 x}F\,d\,x-[cos^2x-(p-cos^2 x)\Delta^2]\frac{tang^{p-3}x}{cos^4 x}F-\frac{tang^p x}{sin^2 x}\Delta\Big\}\,..\,(III)$$

Hier worden voor p even de eindintegralen voor $p=2$ gegeven door de integralen (8) en (11), waarbij echter wederom de laatste wegens den factor $(p-2)$ uit de herleidingsformule (III) wegvalt. Voor p oneven vindt men voor $p=5$ als eindintegralen de integralen (5) en (2).

3. Verder kan men de formule (C_4) evenzoo behandelen.

$$(p-2)\,4\,k^2\Big\{sin^p\tfrac{1}{2}x\,.\,F-\frac{1}{2}p\int sin^{p-1}\tfrac{1}{2}x\,.\,cos\tfrac{1}{2}x\,.\,F\,d\,x\Big\}=-sin\,x\,.\,sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta+$$

$$+(p-3)8k^2\Big\{sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x.F-\frac{1}{2}(p-2)\int sin^{p-3}\tfrac{1}{2}x.cos\tfrac{1}{2}x.Fdx\Big\}-(p-4)(1+4k^2)\Big\{sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x.F-$$

$$-\frac{1}{2}(p-4)\int sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x.cos\tfrac{1}{2}x.Fdx\Big\}+(p-5)\Big\{sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x.F-\frac{1}{2}(p-6)\int sin^{p-7}\tfrac{1}{2}x.cos\tfrac{1}{2}x.Fdx\Big\},$$

dat is na behoorlijke herleiding, en wanneer men eerst voor de regelmaat $p+1$ in de plaats van p heeft gesteld,

$$\int sin^p \tfrac{1}{2}x \,.\, cos \tfrac{1}{2}x \,.\, F dx = \frac{1}{(p^2-1)\,4k^2}\Big\{(p-1)(p-2)\,8k^2 \int sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x \,.\, cos\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx -$$

$$-(p-3)^2(1+4k^2)\int sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x \,.\, cos\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx + (p-4)(p-5)\int sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x \,.\, cos\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx +$$

$$+[2\cos x - \{(p-5)+(p-1)\cos x\}\Delta^2]\sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x \,.\, F + 2\sin x \,.\, \sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\Big\} \quad \ldots (IV)$$

Hier zijn voor evene p, als men $p=4$ stelt, de integralen (23), (17) en (20) en eindintegralen; waarbij is op te merken, dat de laatste wegens den factor $(p-4)$ in de herleidingsformule (IV) niet voorkomt. Als p oneven is, stelle men om de eindintegralen te vinden $p=5$, dan verdwijnt uit de herleidingsformule, wegens den factor $(p-5)$, de hier vreemde, onbekende integraal $\int \frac{cos\frac{1}{2}x}{sin\frac{1}{2}x} F dx$; terwijl er nog overblijven als eindintegralen de gevonden integralen (14) en (7).

De herleidingsformule (C_5) leert evenzoo

$$(p-2)\,4k^2\Big\{cos^p\tfrac{1}{2}x \,.\, F + \frac{1}{2}p\int cos^{p-1}\tfrac{1}{2}x \,.\, sin\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx\Big\} = sin\,x \,.\, cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta +$$

$$+(p-3)\,8k^2\Big\{cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x \,.\, F + \frac{1}{2}(p-2)\int cos^{p-3}\tfrac{1}{2}x \,.\, sin\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx\Big\} -$$

$$-(p-4)(1+4k^2)\Big\{cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x \,.\, F + \frac{1}{2}(p-4)\int cos^{p-5}\tfrac{1}{2}x \,.\, sin\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx\Big\} +$$

$$+(p-5)\Big\{cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x \,.\, F + \frac{1}{2}(p-6)\int cos^{p-7}\tfrac{1}{2}x \,.\, sin\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx\Big\}.$$

Wanneer men hierin vooreerst p door $p+1$ vervangt, en daarna behoorlijk herleidt, verkrijgt men de gezochte herleidingsformule,

$$\int sin\tfrac{1}{2}x \,.\, cos^p\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx = \frac{1}{(p^2-1)\,4k^2}\Big\{(p-1)(p-2)\,8k^2\int sin\tfrac{1}{2}x \,.\, cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx -$$

$$-(p-3)^2(1+4k^2)\int sin\tfrac{1}{2}x \,.\, cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx + (p-4)(p-5)\int sin\tfrac{1}{2}x \,.\, cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx +$$

$$+[2\cos x + \{(p-5)-(p-1)\cos x\}\Delta^2]\cos^{p-5}\tfrac{1}{2}x \,.\, F + 2\sin x \,.\, \cos^{p-5}\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\Big\} \quad \ldots (V)$$

Zoolang p even is, vindt men hier voor $p=4$ als eindintegralen de integra-

len (24), (18) en (21), waarvan de laatste bij het gebruik der herleidingsvergelijking onnoodig is, omdat de factor $(p-4)$ haar doet verdwijnen; wordt p oneven, dan komen er voor $p=5$ de integralen (15) en (7) als eindintegralen, terwijl de hier vreemde, onbekende integraal $\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} F dx$, wegens den factor $(p-5)$ niet in rekening komt.

Door middel van de herleidingsformule (C_6) komt er

$$(p-1)\left\{ tang^p \tfrac{1}{2} x \,.\, F - \frac{1}{2} p \int \frac{tang^{p-1} \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F dx \right\} = \frac{2\, tang^{p-4} \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x \,.\, \cos^3 \frac{1}{2} x} \Delta -$$

$$- [(3p-7)-(p-2)\, 4k^2] \left\{ tang^{p-2} \tfrac{1}{2} x \,.\, F - \frac{1}{2}(p-2) \int \frac{tang^{p-8} \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F dx \right\} -$$

$$- [(3p-11)-(p-4)\, 4k^2] \left\{ tang^{p-4} \tfrac{1}{2} x \,.\, F - \frac{1}{2}(p-4) \int \frac{tang^{p-5} \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F dx \right\} -$$

$$- (p-5) \left\{ tang^{p-6} \tfrac{1}{2} x \,.\, F - \frac{1}{2}(p-6) \int \frac{tang^{p-7} \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F dx \right\}.$$

Deze geeft nu, na vervanging van p door $p+1$, en verdere herleiding,

$$\int \frac{tang^p \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F dx = \frac{1}{p(p+1)} \left\{ - [(3p-4)-(p-1)\, 4k^2](p-1) \int \frac{tang^{p-2} \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F dx - \right.$$

$$- [(3p-8)-(p-3)4k^2](p-3) \int \frac{tang^{p-4} \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F dx - (p-4)(p-5) \int \frac{tang^{p-6} \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F dx -$$

$$\left. - [\cos x - (p-2-\cos x)\Delta^2] \frac{2\, tang^{p-5} \frac{1}{2} x}{\cos^6 \frac{1}{2} x} F - \frac{4\, tang^{p-3} \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x \,.\, \cos^3 \frac{1}{2} x} \Delta \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(VI)}$$

Voor p even, worden de integralen (25), (19) en (22) de eindintegralen voor $p=4$, waarbij echter de laatste integraal wegvalt, omdat de factor $(p-4)$ haar doet verdwijnen. Daarentegen vindt men voor p oneven als eindintegralen, voor $p=5$, de integralen (16) en (12), terwijl de hier onbekende integraal $\int \frac{dx}{\sin x} F$, wegens den factor $(p-5)$ niet in aanmerking komt.

4. Vervolgens verkrijgt men door de herleidingsformule (C_7)

$$(p-1)(1-k^2)\left\{ \frac{1}{\cos^p x} F + p \int \frac{\sin x}{\cos^{p+1} x} F dx \right\} = \frac{\sin x}{\cos^{p-1} x} \Delta + (p-2)(1-2k^2) \left\{ \frac{1}{\cos^{p-2} x} F + \right.$$

$$\left. + (p-2) \int \frac{\sin x}{\cos^{p-1} x} F dx \right\} + (p-3)k^2 \left\{ \frac{1}{\cos^{p-4} x} F + (p-4) \int \frac{\sin x}{\cos^{p-3} x} F dx \right\}.$$

Vervangt men hierin p door $p-1$, en herleidt men, zoo komt er

$$\int \frac{\sin x}{\cos^p x} F dx = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)} \Big\{ (p-3)^2(1-2k^2) \int \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x} F dx + (p-4)(p-5)k^2 \int \frac{\sin x}{\cos^{p-4} x} F dx -$$

$$- \left[\cos^2 x - \{2 + (p-4)\sin^2 x\}\Delta^2\right] \frac{1}{\cos^{p-1} x} F - \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x}\Delta \Big\} \quad \text{(VII)}$$

Indien wij eerst p even onderstellen, worden voor $p=4$ de eindintegralen onze integralen (7) en (10); deze eerste echter komt in de formule (VII) niet voor, omdat de factor $(p-4)$ de integraal doet verdwijnen. Neemt men daarentegen p oneven, zoo komen er als eindintegralen voor $p=7$ de integralen (26) en (2).

Eindelijk geeft de herleidingsformule (C_8)

$$(p-1)\left\{\frac{1}{\cos^p \frac{1}{2} x} F + \frac{1}{2} p \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p+1} \frac{1}{2} x} F dx \right\} = \frac{\sin x}{\cos^p \frac{1}{2} x}\Delta + (p-2)(1+4k^2)\left\{\frac{1}{\cos^{p-2} \frac{1}{2} x} F + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(p-2)\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-1} \frac{1}{2} x} F dx \right\} - (p-3)8k^2 \left\{\frac{1}{\cos^{p-4} \frac{1}{2} x} F + \frac{1}{2}(p-4)\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-3} \frac{1}{2} x} F dx \right\} +$$

$$+ (p-4)4k^3 \left\{\frac{1}{\cos^{p-6} \frac{1}{2} x} F + \frac{1}{2}(p-6)\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-5} \frac{1}{2} x} F dx \right\}.$$

Ook in deze moet men $p-1$ voor p in de plaats stellen en vervolgens de noodige herleidingen doen plaats hebben, om ten slotte te verkrijgen

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^p \frac{1}{2} x} F dx = \frac{1}{(p-1)(p-2)} \Big\{ (p-3)^2 (1+4k^2) \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-2} \frac{1}{2} x} F dx -$$

$$- (p-4)(p-5) 8k^2 \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-4} \frac{1}{2} x} F dx + (p-5)(p-7) 4k^3 \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-6} \frac{1}{2} x} F dx +$$

$$+ \left[2\cos x - \{(p-1)-(p-5)\cos x\}\Delta^2\right] \frac{1}{\cos^{p-1} \frac{1}{2} x} F - \frac{2\sin x}{\cos^{p-1} \frac{1}{2} x}\Delta \Big\} \quad \text{(VIII)}$$

Neemt men eerst p even aan, dan worden de eindintegralen voor $p=4$ de integralen (24), (18) en (21). Neemt men daarentegen p oneven, dan komen er als eindintegralen voor $p=7$ de integralen (27) en (12), terwijl daarbij wegens den factor $(p-7)$ de onbekende integraal $\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} F dx$ toch van zelve verdwijnt.

5. Uit deze acht algemeene herleidingsformulen, kan men door eenvoudige herleiding, nog een nieuw, oogenschijnlijk eenvoudiger, stel afleiden.

Ten aanzien van de vergelijking (I), neme men den niet herleiden vorm, zoo als men dien uit de herleidingsformule (C_1) dadelijk vond, en stelle daarin overal de goniometrische herleiding

$$\sin^l x \,.\, \cos x = \frac{\sin^l x}{\cos x}\cos^2 x = \frac{\sin^l x}{\cos x}(1 - \sin^2 x) = \frac{1}{\cos x}(\sin^l x - \sin^{l+2} x);$$

zoo komt er

$$(p-1)\,k^2 \left\{ \sin^p x \,.\, F - p \int (\sin^{p-1} x - \sin^{p+1} x)\frac{F}{\cos x}\,dx \right\} = \cos x \,.\, \sin^{p-3} x \,.\, \Delta +$$

$$+ (p-2)(1+k^2)\left\{ \sin^{p-2} x \,.\, F - (p-2)\int (\sin^{p-3} x - \sin^{p-1} x)\frac{F}{\cos x}\,dx \right\} -$$

$$-(p-3)\left\{ \sin^{p-4} x \,.\, F - (p-4)\int (\sin^{p-5} - \sin^{p-3} x)\frac{F}{\cos x}\,dx \right\}.$$

Daar hier de hoogste macht van sinus onder het integraalteeken $\sin^{p+1} x$ is, moet men p door $p-1$ vervangen, en dan die integraal oplossen.

$$\int \sin^p x \,.\, F\frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{(p-1)(p-2)k^2}\left\{ [(p-3)^2 + (2p^2 - 9p + 11)k^2]\int \sin^{p-2} x \,.\, F\frac{dx}{\cos x} - \right.$$

$$- [(2p^2 - 15p + 29) + (p-3)^2 k^2]\int \sin^{p-4} x \,.\, F\frac{dx}{\cos x} + (p-4)(p-5)\int \sin^{p-6} x \,.\, F\frac{dx}{\cos x} +$$

$$\left. + [\cos^2 x + \{1 - (p-2)\cos^2 x\}\Delta^2]\sin^{p-5} x \,.\, F + \sin^{p-4} x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \right\} \quad \ldots . \text{(IX)}$$

Geen der integralen (1) tot (27) kan hier als eindintegralen dienen; daarover zal straks afzonderlijk worden gehandeld.

Op dezelfde wijze kan men den niet herleiden vorm van de herleidingsformule (II) behandelen, aanmerkende dat $\sin x \,.\, \cos^l x = \frac{\cos^l x}{\sin x}\sin^2 x = \frac{1}{\sin x}(\cos^l x - \cos^{l+2} x)$.

$$(p-1)\,k^2 \left\{ \cos^p x \,.\, F + p\int (\cos^{p-1} x - \cos^{p+1} x)\frac{F}{\sin x}\,dx \right\} = \sin x \,.\, \cos^{p-3} x \,.\, \Delta -$$

$$-(p-2)(1-2k^2)\left\{ \cos^{p-2} x \,.\, F + (p-2)\int (\cos^{p-3} x - \cos^{p-1} x)\frac{F}{\sin x}\,dx \right\} +$$

$$+ (p-3)(1-k^2)\left\{ \cos^{p-4} x \,.\, F + (p-4)\int (\cos^{p-5} x - \cos^{p-3} x)\frac{F}{\sin x}\,dx \right\}.$$

B 9

Ook hier moet men $p-1$ voor p in de plaats stellen; dan geeft eene verdere herleiding

$$\int cos^p x \, . \, F \frac{dx}{sin\, x} = \frac{1}{(p-1)(p-2)k^2} \Big\{ - [(p-3)^2 + (3p^2-15p+20)k^2] \int cos^{p-2} x \, . \, F \frac{dx}{sin\, x} -$$

$$- [(2p^2-15p+29) - (3p^2-21p+38)k^2] \int cos^{p-4} x \, . \, F \frac{dx}{sin\, x} -$$

$$-(p-4)(p-5)(1-k^2) \int cos^{p-6} x . F \frac{dx}{sin x} - [cos^2 x - \{2-(p-2) sin^2 x\} \Delta^2] cos^{p-5} x . F - sin x . cos^{p-4} x . \Delta \Big\} \ldots (X)$$

Nog kan men den niet herleiden vorm van de herleidingsformule (III) op dergelijke wijze behandelen, dewijl hier

$$\frac{tang^l x}{cos^2 x} = tang^l x \, . \, (1 + tang^2 x) = tang^l x + tang^{l+2} x$$

is; dit levert hier

$$(p-1)(1-k^2) \Big\{ tang^p x \, . \, F - p \int (tang^{p-1} x + tang^{p+1} x) \, F dx \Big\} = \frac{tang^{p-2} x}{sin\, x \, . \, cos\, x} \Delta -$$

$$- (p-2)(2-k^2) \Big\{ tang^{p-2} x \, . \, F - (p-2) \int (tang^{p-3} x + tang^{p-1} x) \, F dx \Big\} -$$

$$- (p-3) \Big\{ tang^{p-4} x \, . \, F - (p-4) \int (tang^{p-5} x + tang^{p-3} x) \, F dx \Big\}.$$

Wanneer men hier p door $p-1$ vervangt, en verder herleidt, zoo verkrijgt men

$$\int tang^p x . F dx = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)} \Big\{ -[(2p^2-15p+20)-(2p^2-15p+12)k^2] \int tang^{p-2} x . F dx -$$

$$- [(3p^2-21p+38)-(p-3)^2 k^2] \int tang^{p-4} x \, . \, F dx - (p-4)(p-5) \int tang^{p-6} x \, . \, F dx -$$

$$- [cos^2 x - (p - 2 - cos^2 x) \Delta^2] \frac{tang^{p-5} x}{cos^4 x} F - \frac{tang^{p-4} x}{cos^2 x} \Delta \Big\} \ldots\ldots\ldots\ldots (XI)$$

Zoo als wij reeds boven zagen, treden hier als eindintegralen enkele nieuwe onbekende integralen op, waarbij ook de reeds vroeger vermelde voorkomen. Wanneer wij deze hier opnemen, en door grieksche letters aanduiden,

$$\int \frac{dx}{\cos x} F = \alpha, \quad \int \frac{dx}{\sin x} F = \beta, \quad \int \frac{\sin x}{\cos x} F\,dx = \gamma, \quad \int \frac{\cos x}{\sin x} F\,dx = \delta,$$

$$\text{dus} \int \frac{dx}{\sin x \,.\, \cos x} F = \gamma + \delta, \quad \int F\,dx = \varepsilon \;, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

dan kunnen wij alle eindintegralen uitdrukken.

Bij de herleidingsformule (IX) worden zij voor evene p, dus voor $p = 6$,

$$\int \frac{dx}{\cos x} F = \alpha \;, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} F\,dx = \alpha - \int \cos x \,.\, F\,dx = \alpha - \sin x \,.\, F - \frac{1}{k} L \frac{k \cos x + \Delta}{1 + k} \;, \ldots\ldots \quad (29)$$

naar de integraal (6);

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos x} F\,dx = \alpha - \int \cos x \,.\, F\,dx - \int \sin^2 x \,.\, \cos x \,.\, F\,dx.$$

Deze laatste kan voor $p = 2$ uit de herleidingsformule (I) worden gevonden.

$$\int \sin^2 x \,.\, \cos x \,.\, F\,dx = \frac{1}{6k^2} \left\{ (1+k^2) \int \cos x \,.\, F\,dx - [\cos^2 x + (1 - 2\cos^2 x)\Delta^2] \frac{F}{\sin x} - \cos x \,.\, \Delta + 1 \right\},$$

dus naar de integraal (6)

$$= \frac{1}{6k^2} \left\{ 2k^2 \sin^3 x \,.\, F + \frac{1}{k}(1+k^2) L \frac{k \cos x + \Delta}{1 + k} - \cos x \,.\, \Delta + 1 \right\} ; \ldots \quad (30)$$

derhalve

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos x} F\,dx = \alpha - \frac{1}{6k^2} \left\{ (3 + \sin^2 x) 2k^2 \sin x \,.\, F + \frac{1}{k}(1 + 7k^2) L \frac{k \cos x + \Delta}{1 + k} - \cos x \,.\, \Delta + 1 \right\} \ldots (31)$$

Daarentegen voor onevene p, voor $p = 5$,

$$\int \frac{dx}{\sin x \,.\, \cos x} F = \gamma + \delta \;, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} F\,dx = \gamma \;, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

*

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} F\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} F\,dx - \int \sin x \,.\, \cos x \,.\, F\,dx = \gamma - \frac{1}{2\,k^2} \{E - F\,.\,\Delta^2\}\,, \quad \ldots \quad (34)$$

naar de integraal (1).

Op dergelijke wijze vindt men als eindintegralen bij de herleidingsformule (X), eerst voor evene p, als men $p = 6$ stelt,

$$\int \frac{dx}{\sin x} F = \beta\,, \quad \ldots \ldots \quad (35)$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} F\,dx = \beta - \int \sin x \,.\, F\,dx = \beta + \cos x \,.\, F - \frac{1}{k} Bg\sin(k\sin x)\,, \quad \ldots \quad (36)$$

bij gebruik van de integraal (7);

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin x} F\,dx = \beta - \int \sin x \,.\, F\,dx - \int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, F\,dx.$$

Wanneer men eerst de laatste integraal voor $p = 2$ uit de herleidingsformule (II) zoekt, komt er

$$\int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, F\,dx = \frac{1}{6\,k^2} \left\{ -(1-2k^2) \int \sin x \,.\, F\,dx + [\cos^2 x - 2\cos^2 x \,.\, \Delta^2] \frac{F}{\cos x} + \sin x . \Delta \right\},$$

dus, bij gebruik van de integraal (7),

$$= \frac{1}{6\,k^2} \left\{ -2\,k^2 \cos^3 x \,.\, F - \frac{1}{k}(1 - 2\,k^2)\, Bg\sin(k\sin x) + \sin x \,.\, \Delta \right\}; \quad \ldots \quad (37)$$

waardoor de vorige wordt

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin x} F\,dx = \beta + \frac{1}{6\,k^2} \{(3 + \cos^2 x)\, 2\,k^2 \cos x \,.\, F + \frac{1}{k}(1 - 8\,k^2) Bg\sin(k\sin x) - \sin x \,.\, \Delta\}. \quad (38)$$

Neemt men echter p oneven, dan worden voor $p = 5$ de eindintegralen

$$\int \frac{dx}{\sin x \,.\, \cos x} F = \gamma + \delta\,, \quad \ldots \ldots \quad (32)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} F\,dx = \delta\,, \quad \ldots \ldots \quad (39)$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} F\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} F\,dx - \int \sin x . \cos x . F\,dx = \delta - \frac{1}{2\,k^2}\{E - F.\Delta^2\}, \;.\;.\;.\; (40)$$

naar de integraal (1).

Ten slotte kan men voor de eindintegralen der herleidingsformule (XI), indien men vooreerst p even stelt, voor $p = 6$ de volgende formulen vinden.

$$\int F\,dx = \varepsilon\;, \;.\; (41)$$

$$\int tang^2 x . F dx = -\int F\,dx + \int \frac{dx}{\cos^2 x} F = -\varepsilon + tang\, x . F + \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x}{\sqrt{1-k^2}+\Delta}, \;.\; (42)$$

volgens de integraal (8);

$$\int tang^4 x . F\,dx = + \int F\,dx - \int F \frac{dx}{\cos^2 x} + \int F \frac{tang^2 x}{\cos^2 x}\,dx.$$

Uit de herleidingsformule (III) zelve kan men deze laatste integraal afleiden, als men $p = 2$ stelt.

$$\int \frac{tang^2 x}{\cos^2 x} F\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} F\,dx = \frac{1}{6\,(1-k^2)} \Big\{ -(2-k^2) \int \frac{dx}{\cos^2 x} F -$$

$$- [\cos^2 x - (2 - \cos^2 x)\,\Delta^2]\, \frac{1}{\sin x . \cos^3 x} F - \frac{1}{\cos^2 x}\Delta + 1 \Big\} =$$

$$= \frac{1}{6(1-k^2)} \Big\{ 2(1-k^2) tang^3 x . F - \frac{2-k^2}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x}{\sqrt{1-k^2}+\Delta} - \frac{1}{\cos^2 x}\Delta + 1 \Big\}, \;.\; (43)$$

waarbij van de vroeger geworden integraal (8) gebruik gemaakt is. Derhalve volgt nu hier

$$\int tang^4 x . F\,dx = \varepsilon - \frac{1}{6\,(1-k^2)} \Big\{ (3 - tang^2 x)\, 2\,(1-k^2)\, tang\, x . F +$$

$$+ \frac{8-7\,k^2}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x}{\sqrt{1-k^2}+\Delta} + \frac{1}{\cos^2 x}\Delta - 1 \Big\}. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (44)$$

Neemt men daarentegen p oneven, zoo worden de eindintegralen voor $p = 5$

$$\int cot\,x\,.\,F\,dx = \delta\;, \quad \ldots \quad (45)$$

$$\int tang\,x\,.\,F\,dx = \gamma\;, \quad \ldots \quad (46)$$

$$\int tang^3 x\,.\,F\,dx = \int (sec^2 x - 1)\,tang\,x\,.\,F\,dx = \int \frac{sin\,x}{cos^3 x}\,F\,dx - \int tang\,x\,.\,F\,dx =$$

$$= -\gamma + \frac{1}{2\,(1-k^2)}\left\{E + (1-k^2)\,tang\,x\,.\,F - tang^2 x\,.\,\Delta\right\}, \quad \ldots \quad (47)$$

naar (2).

Uit de hier gebruikte integralen (30), (37), (43) kan men nog gereedelijk de volgende afleiden met behulp der integralen (6), (7), (8).

$$\int cos^3 x\,.\,F\,dx = \int cos\,x\,.\,F\,dx - \int sin^2 x\,.\,cos\,x\,.\,F\,dx = \frac{1}{6\,k^2}\left\{(3 - sin^2 x)\,2\,k^2\,sin\,x\,.\,F - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{k}(1 - 5\,k^2)\,L\frac{k\,cos\,x + \Delta}{1 + k} + cos\,x\,.\,\Delta - 1\right\}, \quad \ldots \quad (48)$$

$$\int sin^3 x\,.\,F\,dx = \int sin\,x\,.\,F\,dx - \int sin\,x\,.\,cos^2 x\,.\,F\,dx = \frac{1}{6\,k^2}\left\{-(3 - cos^2 x)\,2\,k^2\,cos\,x\,.\,F + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k}(1 + 4\,k^2)\,Bg\,sin\,(k\,sin\,x) - sin\,x\,.\,\Delta\right\}, \quad \ldots \quad (49)$$

$$\int \frac{dx}{cos^4 x}\,F = \int \frac{dx}{cos^2 x}\,F + \int \frac{tang^2 x}{cos^2 x}\,F\,dx = \frac{1}{6\,(1-k^2)}\left\{(3 + tang^2 x)\,(1-k^2)\,2\,tang\,x\,.\,F + \right.$$

$$\left. + \frac{4 - 5\,k^2}{\sqrt{1-k^2}}\,L\frac{(1 + \sqrt{1-k^2})\,cos\,x}{\sqrt{1+k^2} + \Delta} - \frac{1}{cos^2 x}\,\Delta + 1\right\}. \quad \ldots \quad (50)$$

5. Keeren wij terug tot de herleidingsformulen, en wel tot (IV) in den nog niet herleiden vorm, en stelt men daarin

$$sin^l\,\tfrac{1}{2}x\,.\,cos\,\tfrac{1}{2}x = \frac{sin^l\,\tfrac{1}{2}x\,.\,cos^2\,\tfrac{1}{2}x}{cos\,\tfrac{1}{2}x} = \frac{1}{cos\,\tfrac{1}{2}x}\,sin^l\,\tfrac{1}{2}x\,.\,(1 - sin^2\,\tfrac{1}{2}x) = \frac{sin^l\,\tfrac{1}{2}x - sin^{l+2}\,\tfrac{1}{2}x}{cos\,\tfrac{1}{2}x},$$

zoo komt er

$$(p-2)\,4k^2 \left\{ \sin^p \tfrac{1}{2}x \,.\, F - \frac{1}{2}p \int (\sin^{p-1}\tfrac{1}{2}x - \sin^{p+1}\tfrac{1}{2}x) \frac{F}{\cos\frac{1}{2}x} dx \right\} = -\sin x \,.\, \sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta +$$

$$+ (p-3)\,8k^2 \left\{ \sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x \,.\, F - \frac{1}{2}(p-2) \int (\sin^{p-3}\tfrac{1}{2}x - \sin^{p-1}\tfrac{1}{2}x) \frac{F}{\cos\frac{1}{2}x} dx \right\} -$$

$$- (p-4)(1+4k^2) \left\{ \sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x \,.\, F - \frac{1}{2}(p-4) \int (\sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x - \sin^{p-3}\tfrac{1}{2}x) \frac{F}{\cos\frac{1}{2}x} dx \right\} +$$

$$+ (p-5) \left\{ \sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x \,.\, F - \frac{1}{2}(p-6) \int (\sin^{p-7}\tfrac{1}{2}x - \sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x) \frac{F}{\cos\frac{1}{2}x} dx \right\};$$

en deze levert, nadat men eerst p door $p-1$ heeft vervangen,

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2}x \,.\, F \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} = \frac{1}{(p-1)(p-3)\,4k^2} \left\{ (p-3)^2\, 12k^2 \int \sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x \,.\, F \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} - \right.$$

$$- \left[(p-5)^2 + (3p^2 - 24p + 49)k^2 \right] \int \sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x \,.\, F \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} +$$

$$+ \left[(2p^2 - 23p + 67) + (p-5)^2 4k^2 \right] \int \sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x \,.\, F \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} - (p-6)(p-7) \int \sin^{p-8}\tfrac{1}{2}x \,.\, F \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} -$$

$$\left. - \left[2\cos x - \{ (p-7) + (p-3)\cos x \} \Delta^2 \right] \sin^{p-7}\tfrac{1}{2}x \,.\, F - 2\sin x \,.\, \sin^{p-7}\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta \right\} \;.\,.\; \text{(XII)}$$

Evenzoo kan men in de niet herleide formule (V) de volgende goniometrische vervorming

$$\sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^l \tfrac{1}{2}x = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}x} (1 - \cos^2\tfrac{1}{2}x) \cos^l\tfrac{1}{2}x = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}x} (\cos^l\tfrac{1}{2}x - \cos^{l+2}\tfrac{1}{2}x)$$

invoeren en verkrijgt alzoo

$$(p-2)\,4k^2 \left\{ \cos^p\tfrac{1}{2}x \,.\, F + \frac{1}{2}p \int (\cos^{p-1}\tfrac{1}{2}x - \cos^{p+1}\tfrac{1}{2}x) \frac{F}{\sin\frac{1}{2}x} dx \right\} = \sin x \,.\, \cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta +$$

$$+ (p-3)\,8k^2 \left\{ \cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x \,.\, F + \frac{1}{2}(p-2) \int (\cos^{p-3}\tfrac{1}{2}x - \cos^{p-1}\tfrac{1}{2}x) \frac{F}{\sin\frac{1}{2}x} dx \right\} -$$

$$- (p-4)(1+4k^2) \left\{ \cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x \,.\, F + \frac{1}{2}(p-4) \int (\cos^{p-5}\tfrac{1}{2}x - \cos^{p-3}\tfrac{1}{2}x) \frac{F}{\sin\frac{1}{2}x} dx + \right.$$

$$+ (p-5) \left\{ \cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x \,.\, F + \frac{1}{2}(p-6) \int (\cos^{p-7}\tfrac{1}{2}x - \cos^{p-5}\tfrac{1}{2}x) \frac{F}{\sin\frac{1}{2}x} dx \right\}.$$

In deze formule verandere men eerst p in $p-1$, dan geeft eene verdere herleiding

$$\int \cos^p \tfrac{1}{2}x \,.\, F \frac{dx}{\sin \frac{1}{2}x} = \frac{1}{(p-1)(p-3)\,4k^2} \Big\{ (p-3)^2\, 12\, k^2 \int \cos^{p-2} \tfrac{1}{2}x \,.\, F \frac{dx}{\sin \frac{1}{2}x} -$$

$$-\left[(p-5)^2 - (3p^2 - 24p + 49)\, 4k^2\right] \int \cos^{p-4} \tfrac{1}{2}x \,.\, F \frac{dx}{\sin \frac{1}{2}x} +$$

$$+\left[(2p^2 - 23p + 67) + (p-5)^2 4k^2\right] \int \cos^{p-6} \tfrac{1}{2}x . F \frac{dx}{\sin \frac{1}{2}x} - (p-6)(p-7) \int \cos^{p-8} \tfrac{1}{2}x . F \frac{dx}{\sin \frac{1}{2}x} +$$

$$+\left[2\cos x - \{(p-7) - (p-3)\cos x\}\, \Delta^2\right] \cos^{p-7} \tfrac{1}{2}x \,.\, F - 2 \sin x \,.\, \cos^{p-7} \tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta \Big\} \;.\,.\; \text{(XIII)}$$

Eindelijk kan men ook de herleidingsformule (VI) veranderen; daartoe stelle men in den niet herleiden vorm

$$\frac{\operatorname{tang}^l \frac{1}{2}x}{\cos^2 \frac{1}{2}x} = \operatorname{tang}^l \tfrac{1}{2}x \,.\, (1 + \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}x) = \operatorname{tang}^l \tfrac{1}{2}x + \operatorname{tang}^{l+2} \tfrac{1}{2}x,$$

waardoor er komt

$$(p-1) \left\{ \operatorname{tang}^p \tfrac{1}{2}x \,.\, F - \frac{1}{2} p \int (\operatorname{tang}^{p-1} \tfrac{1}{2}x + tg^{p+1} \tfrac{1}{2}x)\, F\, dx \right\} = \frac{2 \operatorname{tang}^{p-4} \frac{1}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x \,.\, \cos^3 \frac{1}{2}x} \Delta -$$

$$-\left[(3p-7) - (p-2)\, 4k^2\right] \left\{ \operatorname{tang}^{p-2} x \,.\, F - \frac{1}{2}(p-2) \int (\operatorname{tang}^{p-3} \tfrac{1}{2}x + \operatorname{tang}^{p-1} \tfrac{1}{2}x)\, F\, dx \right\} -$$

$$-\left[(3p-11) - (p-4)\, 4k^2\right] \left\{ tg^{p-4} \tfrac{1}{2}x . F - \frac{1}{2}(p-4) \int (\operatorname{tang}^{p-5} \tfrac{1}{2}x + \operatorname{tang}^{p-3} \tfrac{1}{2}x)\, F\, dx \right\} -$$

$$-(p-5) \left\{ \operatorname{tang}^{p-6} \tfrac{1}{2}x \,.\, F - \frac{1}{2}(p-6) \int (\operatorname{tang}^{p-7} \tfrac{1}{2}x + \operatorname{tang}^{p-5} \tfrac{1}{2}x)\, F\, dx \right\}.$$

Om hieruit tot eene herleidingsformule te geraken, moet men eerst p door $p-1$ vervangen; dan geeft de verdere herleiding

$$\int \operatorname{tang}^p \tfrac{1}{2}x \,.\, F dx = \frac{1}{(p-1)(p-2)} \Big\{ -\left[(2p^2 - 11p + 16) - (p-3)^2\, 2k^2\right] 2 \int \operatorname{tang}^{p-2} \tfrac{1}{2}x . F dx -$$

$$-\left[(3p^2 - 24p + 50) - (p^2 - 8p + 17)\, 4k^2\right] 2 \int \operatorname{tang}^{p-4} \tfrac{1}{2}x \,.\, F dx -$$

$$-\left[(2p^2 - 21p + 56) - (p-5)^2\, 2k^2\right] 2 \int \operatorname{tang}^{p-6} \tfrac{1}{2}x . F dx - (p-6)(p-7) \int \operatorname{tang}^{p-8} \tfrac{1}{2}x . F dx +$$

$$+\left[-\cos x + (p - 4 - \cos x)\, \Delta^2\right] 2 \frac{\operatorname{tang}^{p-7} \frac{1}{2}x}{\cos^6 \frac{1}{2}x} - 4 \frac{\operatorname{tang}^{p-5} \frac{1}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x \,.\, \cos^3 \frac{1}{2}x} \Delta \Big\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \text{(XIV)}$$

Ook hier treden nieuwe integralen als eindintegralen op. Neem daartoe

$$\int \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} F = \zeta, \quad \int \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x} F = \eta, \quad \int \frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} F dx = \beta - \delta, \quad \int \frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x} F dx = \beta + \delta,$$

$$\int \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x \,.\, \cos\frac{1}{2}x} F = 2\beta \;, \ldots\ldots \quad (\beta)$$

dan kan men, met de herleidingsformule (XII) beginnende, en daarin vooreerst p even nemende, $p = 8$ stellen, zoodat er als eindintegralen voorkomen

$$\int \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} F = \zeta \;, \ldots\ldots \quad (51)$$

$$\int \frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} F dx = \int \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} F - \int \cos\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx = \zeta - 2\sin\tfrac{1}{2}x \,.\, F - \frac{2}{\sqrt{2k}} F(l,y) \;, \ldots \quad (52)$$

met behulp van de integraal (17);

$$\int \frac{\sin^4\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} F dx = \int \frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} F dx - \int \sin^2\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx = \zeta - \frac{1}{3}(7 - \cos x)\sin\tfrac{1}{2}x \,.\, F -$$

$$- \frac{1}{3k\sqrt{2k}} \left\{ 2E(l,y) - (1 - 8k) F(l,y) + \frac{2\cos\frac{1}{2}x \,.\, \sqrt{2k}}{1 + k + k\cos x} \Delta \right\} , \ldots\ldots \quad (53)$$

wanneer men daarbij de integraal (23) gebruikt; vervolgens

$$\int \frac{\sin^6\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} F dx = \int \frac{\sin^4\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} F dx - \int \sin^4\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx.$$

Deze laatste integraal nu kan men door middel van de herleidingsformule (IV) voor $p = 4$ rechtstreeks afleiden

$$\int \sin^4\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx = \frac{1}{60k^2} \left\{ 48k^2 \int \sin^2\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx - (1 + 4k^2) \int \cos\tfrac{1}{2}x \,.\, F dx + \right.$$

$$\left. + [2\cos x - (-1 + 3\cos x)\Delta^2] \frac{F}{\sin\frac{1}{2}x} + \frac{2\sin x}{\sin\frac{1}{2}x} \Delta - 4 \right\} ,$$

dat is door gebruik te maken van de integralen (23) en (17),

$$= \frac{1}{30k^2} \left\{ 12k^2 \sin^5\tfrac{1}{2}x \,.\, F + \frac{1}{\sqrt{2k}} [16kE(l,y) - (1 + 8k - 12k^2) F(l,y)] - \right.$$

$$\left. - 16k \frac{\cos\frac{1}{2}x}{1 + k + k\cos x} \Delta + 2\cos\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta - 2 \right\} ; \ldots\ldots \quad (54)$$

B 10

en hiermede wordt dan

$$\int \frac{\sin^6 \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} F dx = \zeta - \frac{1}{30 k^2} \Big\{ (73 - 16 \cos x + 3 \cos^2 x) k^2 \sin \tfrac{1}{2} x . F +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2k}} [36 k E(l,y) - (1 + 18 k - 92 k^2) F(l,y)] - 36 k \frac{\cos \frac{1}{2} x}{1 + k + k \cos x} \Delta + 2 \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta - 2 \Big\} \, . \, . \, (55)$$

Bij onevene p daarentegen kan men $p = 7$ stellen, en verkrijgt dan de eindintegralen

$$\int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x . \cos \frac{1}{2} x} F = 2 \beta \, , \ldots \ldots \ldots (56)$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} F dx = \beta - \delta \, , \ldots \ldots \ldots (57)$$

$$\int \frac{\sin^3 \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} F dx = \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} F dx - \int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x . F dx = \beta - \delta + \frac{1}{2} \cos x . F - \frac{1}{2k} Bg \sin (k \sin x) \, , \, . \, (58)$$

na toepassing van de integraal (7);

$$\int \frac{\sin^5 \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} F dx = \int \frac{\sin^3 \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} F dx - \int \sin^3 \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x . F dx = \beta - \delta -$$

$$- \frac{1}{8 k^2} \{ [1 - (1 + 6 \cos x - \cos^2 x) k^2] F - E + 6 k Bg \sin (k \sin x) \} \, , \ldots \ldots (59)$$

volgens de integraal (14).

Evenzoo bij de herleidingsformule (XIV) neme men vooreerst $p = 8$, om de eindintegralen voor evene p te vinden; deze zijn

$$\int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} F = \eta \, , \ldots \ldots \ldots (60)$$

$$\int \frac{\cos^2 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F dx = \int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} F - \int \sin \tfrac{1}{2} x . F dx = \eta + 2 \cos \tfrac{1}{2} x . F - \frac{2}{\sqrt{2k}} F(l,z) \, , \, . \, (61)$$

na invoering der integraal (18); en evenzoo door middel van de integraal (24)

$$\int \frac{\cos^4 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F dx = \int \frac{\cos^2 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F dx - \int \cos^2 \tfrac{1}{2} x . \sin \tfrac{1}{2} x . F dx = \eta + \frac{1}{3} (7 + \cos x) \cos \tfrac{1}{2} x . F -$$

$$- \frac{1}{3 k \sqrt{2k}} \Big\{ 2 E(l,z) - (1 - 8k) F(l,z) + \frac{2 \sin \frac{1}{2} x . \sqrt{2k}}{1 + k - k \cos x} \Delta \Big\} \, , \ldots \ldots (62)$$

$$\int \frac{\cos^6 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F\,dx = \int \frac{\cos^4 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F\,dx - \int \cos^4 \tfrac{1}{2} x . \sin \tfrac{1}{2} x . F\,dx.$$

Vooreerst berekene men deze laatste integraal uit de herleidingsformule (V) voor $p = 4$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x . F\,dx = \frac{1}{60\,k^2} \Big\{ 48\,k^2 \int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^2 \tfrac{1}{2} x . F\,dx - (1 + 4\,k^2) \int \sin \tfrac{1}{2} x . F\,dx +$$

$$+ \left[2 \cos x + (-1 - 3 \cos x)\,\Delta^2 \right] \frac{F}{\cos \frac{1}{2} x} + \frac{2 \sin x}{\cos \frac{1}{2} x} \Delta \Big\},$$

of wanneer men hierin de waarde der integralen (24) en (18) overbrengt,

$$= \frac{1}{30\,k^2} \Big\{ -12\,k^2 \cos^5 \tfrac{1}{2} x . F + \frac{1}{\sqrt{2\,k}} \left[16\,k\,E(l, z) - (1 + 8\,k - 12 k^2)\,F(l, z) \right] -$$

$$- 16\,k \frac{\sin \frac{1}{2} x}{1 + k - k \cos x} \Delta + 2 \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \Big\} \quad \ldots \ldots \quad (63)$$

Men kan dus thans de waarde der vorige bepalen

$$\int \frac{\cos^6 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F\,dx = \eta + \frac{1}{30\,k^2} \Big\{ (73 + 16 \cos x + 3 \cos^2 x)\,k^2 \cos \tfrac{1}{2} x . F - \frac{1}{\sqrt{2\,k}} [36\,k\,E(l, z) -$$

$$- (1 + 18\,k - 92\,k^2)\,F(l, z)] - 36\,k \frac{\sin \frac{1}{2} x}{1 + k + k \cos x} \Delta - 2 \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \Big\} \quad \ldots \ldots \quad (64)$$

Vervolgens neme men $p = 7$ voor de eindintegralen, in het geval van p oneven,

$$\int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x . \cos \frac{1}{2} x} F = 2\beta \,, \quad \ldots \ldots \quad (56)$$

$$\int \frac{\cos \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F\,dx = \beta + \delta \,, \quad \ldots \ldots \quad (65)$$

$$\int \frac{\cos^3 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F dx = \int \frac{\cos \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F dx - \int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x . F dx = \beta + \delta + \frac{1}{2} \cos x . F - \frac{1}{2k} Bg \sin(k \sin x), \quad \ldots \quad (66)$$

met gebruik van de integraal (7). Deze en de integraal (15) invoerende, heeft men verder

*

$$\int \frac{\cos^5 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F\,dx = \int \frac{\cos^3 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F\,dx - \int \cos^3 \tfrac{1}{2} x \,.\, \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, F\,dx = \beta + \delta +$$

$$+ \frac{1}{8\,k^2} \{[1 - (1 - 6 \cos x - \cos^2 x)\,k^2]\,F - E - 6\,k\,Bg \sin(k \sin x)\}, \quad \ldots\ldots \quad (67)$$

naar de integraal (15).

Bij de herleidingsformule (XIV) zal men voor evene p bij de onderstelling $p = 8$ de eindintegralen verkrijgen

$$\int F\,dx = \varepsilon\,, \quad \ldots\ldots \quad (41)$$

$$\int tang^2 \tfrac{1}{2} x . F dx = -\int F dx + \int F \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2} x} = -\varepsilon + 2 tang \tfrac{1}{2} x . F - 2L \frac{(\Delta - \cos x)(1 + \Delta)}{2 \sin^2 x}\,, \quad \ldots \quad (68)$$

wanneer men de integraal (19) invoert. En daarop, de integraal (25) gebruikende,

$$\int tang^4 \tfrac{1}{2} x \,.\, F\,dx = -\int tang^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, F\,dx + \int \frac{\sin^2 \frac{1}{2} x}{\cos^4 \frac{1}{2} x} F\,dx = \varepsilon + \frac{2}{3} \Big\{ -(1 + 2 \cos x) \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^3 \frac{1}{2} x} F +$$

$$+ (2 - k^2)\, 2\, L \frac{(\Delta - \cos x)(1 + \Delta)}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} x} \Delta + 1 \Big\} \quad \ldots\ldots \quad (69)$$

Verder is nog

$$\int tang^6 \tfrac{1}{2} x \,.\, F\,dx = -\int tang^4 \tfrac{1}{2} x \,.\, F\,dx + \int \frac{tang^4 \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F\,dx.$$

Deze laatste integraal bepale men uit de algemeene herleidingsformule (VI) voor $p = 4$, en gebruike later de integralen (25) en (19);

$$\int \frac{tang^4 \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F\,dx = \frac{1}{20} \Big\{ -(8 - 12\,k^2)\, 3 \int \frac{tang^2 \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F\,dx - (4 - 4\,k^2) \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F +$$

$$- [\cos x - (2 - \cos x)\,\Delta^2] \frac{2}{\cos^5 \frac{1}{2} x \,.\, \sin \frac{1}{2} x} F - \frac{4}{\cos^4 \frac{1}{2} x} \Delta + 4 \Big\}\,;$$

na herleiding, invoering der integralen, en herleiding komt er dan

$$\int \frac{tang^4 \frac{1}{2} x}{cos^2 \frac{1}{2} x} F dx = \frac{1}{5} \Big\{ 2\, tang^5 \tfrac{1}{2} x \,.\, F - 2 (1 - 6 k^2 + 6 k^4)\, L \frac{(\Delta - cos\, x)(1 + \Delta)}{2\, sin^2 x} +$$

$$+ [(1 - 3 k^2) + (2 - 3 k^2) cos\, x] \frac{\Delta}{cos^4 \frac{1}{2} x} - 3 (1 - 2 k^2) \Big\}, \dots \dots \dots \dots (70)$$

en daarmede wordt de vorige

$$\int tang^6 \tfrac{1}{2} x . F dx = -\varepsilon + \frac{1}{15} \Big\{ (13 + 24 cos x + 23 cos^2 x) \frac{sin \frac{1}{2} x}{2 cos^5 \frac{1}{2} x} F - (23 - 28 k^2 + 18 k^4) 2 L \frac{(\Delta - cos x)(1 + \Delta)}{2\, sin^2 x} +$$

$$+ [(8 - 9 k^2) + (11 - 9 k^2) cos\, x] \frac{\Delta}{cos^4 \frac{1}{2} x} - (19 - 18 k^2) \Big\} \dots \dots \dots \dots (71)$$

Terwijl voor onevene p de onderstelling $p = 7$ als eindintegralen levert

$$\int cot \tfrac{1}{2} x . F dx = \beta + \delta, \dots \dots \dots \dots (65)$$

$$\int tang \tfrac{1}{2} x . F dx = \beta - \delta, \dots \dots \dots \dots (57)$$

$$\int tang^3 \tfrac{1}{2} x . F dx = -\int \frac{sin \frac{1}{2} x}{cos \frac{1}{2} x} F dx + \int sin \tfrac{1}{2} x . cos \tfrac{1}{2} x . F dx = \delta - \beta + \frac{1}{2} cos x . F + \frac{1}{2k} Bg sin (k sin x), \dots (72)$$

als men daarbij de integraal (7) gebruikt; deze en de integraal (16) geven verder

$$\int tang^5 \tfrac{1}{2} x . F dx = -\int tang^3 \tfrac{1}{2} x . F dx + \int \frac{sin^3 \frac{1}{2} x}{cos^5 \frac{1}{2} x} F dx = \beta - \delta + \frac{1}{6} \Big\{ (5 - 8 k^2 - 3 cos x + 3 tg^4 \tfrac{1}{2} x) F -$$

$$- (1 - 2 k^2)\, 8 E - \frac{3}{k} Bg\, sin (k\, sin\, x) + [(1 - 4 k^2) + (1 - 2 k^2) 2\, cos\, x] \frac{2\, tang \frac{1}{2} x}{cos^2 \frac{1}{2} x} \Delta \Big\} \dots (73)$$

7. Ten slotte kan men nog eene dergelijke herleiding als vroeger aan de algemeene formulen (VII) en (VIII) doen ondergaan.

Vooreerst voere men in de niet-herleide vergelijking (VII) de identiteit in

$$\frac{sin\, x}{cos^l x} = \frac{sin^2 x}{sin\, x . cos^l x} = \frac{1 - cos^2 x}{sin\, x . cos^l x} = \frac{1}{sin\, x . cos^l x} - \frac{1}{sin\, x . cos^{l-2} x},$$

zoo verkrijgt men

$$(p-1)(1-k^2)\left\{\frac{1}{\cos^p x}F - p\left(\int\frac{dx}{\sin x \,.\cos^{p+1}x}F - \int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^{p-1}x}F\right)\right\} =$$

$$=\frac{\sin x}{\cos^{p-1}x}\Delta+(p-2)(1-2k^2)\left\{\frac{1}{\cos^{p-2}x}F-(p-2)\left(\int\frac{dx}{\sin x.\cos^{p-1}x}F-\int\frac{dx}{\sin x.\cos^{p-3}x}F\right)\right\}+$$

$$+(p-3)k^2\left\{\frac{1}{\cos^{p-4}x}F-(p-4)\left(\int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^{p-3}x}F-\int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^{p-5}x}F\right)\right\}.$$

Bij deze uitkomst moet men $p-1$ voor p in de plaats stellen, en erlangt dan ten slotte

$$\int\frac{dx}{\sin x.\cos^p x}F=\frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)}\left\{-[(2p^2-9p+11)-(3p^2-15p+20)k^2]\int\frac{dx}{\sin x.\cos^{p-2}x}F-\right.$$

$$-[(p-3)^2-(3p^2-21p+38)k^2]\int\frac{dx}{\sin x.\cos^{p-4}x}F-(p-4)(p-5)k^2\int\frac{dx}{\sin x.\cos^{p-6}x}F-$$

$$\left.-[\cos^2 x+\{2+(p-4)\sin^2 x\}\Delta^2]\frac{1}{\cos^{p-1}x}F-\frac{\sin x}{\cos^{p-2}x}\Delta\right\}. \qquad \text{(XV)}$$

De eindintegralen, die bij deze herleidingsformule behooren, zijn reeds vroeger gevonden. Deze zijn bij onevene p, voor $p=3$, de integralen (32), (39) en (40); bij evene p, voor $p=4$, de integralen (35), (36) en (38); benevens de volgende

$$\int\frac{dx}{\sin x.\cos^2 x}F=\int\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)F\,dx=\beta+\frac{1}{\cos x}F-\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}L\frac{\sqrt{1-k^2}\sin x+\Delta}{\cos x} \qquad (74)$$

Verder gebruike men de identieke herleiding

$$\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^l\frac{1}{2}x}=\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^l\frac{1}{2}x}=\frac{1-\cos^2\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^l\frac{1}{2}x}=\frac{1}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^l\frac{1}{2}x}-\frac{1}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{l-2}\frac{1}{2}x}$$

bij de herleidingsformule (VIII), immers voor dat deze tot haar eindvorm was teruggebracht, dan komt er

$$(p-1)\left\{\frac{1}{\cos^p\frac{1}{2}x}F-\frac{1}{2}p\left(\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p+1}\frac{1}{2}x}F-\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}F\right)\right\}=\frac{\sin x}{\cos^p\frac{1}{2}x}\Delta+$$

$$+(p-2)(1+4k^2)\left\{\frac{1}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}F-\frac{1}{2}(p-2)\left(\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}F-\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-3}\frac{1}{2}x}F\right)\right\}-$$

$$-(p-3)8k^2\left\{\frac{1}{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}F-\frac{1}{2}(p-4)\left(\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p-3}\frac{1}{2}x}F-\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p-5}\frac{1}{2}x}F\right)\right\}+$$

$$+(p-4)4k^2\left\{\frac{1}{\cos^{p-6}\frac{1}{2}x}F-\frac{1}{2}(p-6)\left(\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p-5}\frac{1}{2}x}F-\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p-7}\frac{1}{2}x}F\right)\right\}.$$

Ook hier moet men weder p door $p-1$ vervangen, en men zal vinden

$$\int \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^p\frac{1}{2}x}F = \frac{1}{(p-1)(p-2)}\Big\{[(2p^2-9p+11)+(p-3)^2 4k^2]\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}F -$$

$$-[(p-3)^2-(3p^2-24p+49)4k^2]\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}F+(p-5)^2 12k^2\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-6}\frac{1}{2}x}F-$$

$$-(p-5)(p-7)4k^2\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-8}\frac{1}{2}x}F+[2\cos x+\{(p-1)-(p-5)\cos x\}\Delta^2]\frac{1}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}F-$$

$$-\frac{2\sin x}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}\Delta\Big\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(XVI)}$$

De eindintegralen, behoorende bij deze herleidingsformulen, zijn evenzeer reeds vroeger gevonden. Zij worden, als p even is, voor $p=3$, gegeven door de integralen (56), (65), (66) en (67); en bijaldien p oneven is, voor $p=4$, door de integralen (60), (61), (62) en (64), waarbij nog behoort

$$\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^2\frac{1}{2}x}F=\int\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}x}+\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}x}\right)F\,dx=\eta+\frac{2}{\cos\frac{1}{2}x}F-\frac{2\sqrt{2k}}{1+2k}\Big\{F(l,z)-$$

$$+\frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,z)\Big\}-\frac{1}{2}L\frac{(\Delta+\sin\frac{1}{2}x)^2}{(1+k-2r)2k(1-\cos x)+\Delta^2}\ldots\ldots\ldots (75)$$

8. Voordat wij verder gaan, willen wij eerst de gebezigde nieuwe transcendenten iets nader beschouwen. Men kan op alle de methode van het gedeeltelijk integreeren toepassen, en daarna nog somtijds die van het ontwikkelen van een of anderen factor onder het integraal teeken in eene reeks.

$$\alpha=\int\frac{dx}{\cos x}F=\int F\,dx\frac{d}{dx}.L\,tang\left(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x\right)=F.\,L\,tg\left(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x\right)-\int L\,tang\left(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x\right)\frac{dx}{\Delta}=$$

$$=F.\,L\,tang\left(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x\right)-2\sum_0^\infty\frac{(-1)^n}{2n+1}\int\sin(2n+1)x\frac{dx}{\Delta},\ldots\ldots\ldots (28)$$

$$\beta=\int\frac{dx}{\sin x}F=\int F\,dx\frac{d}{dx}.L\,tang\,\tfrac{1}{2}x=F.\,L\,tang\,\tfrac{1}{2}x-\int L\,tang\,\tfrac{1}{2}x\frac{dx}{\Delta}=$$

$$=F.\,L\,tang\,\tfrac{1}{2}x+2\sum_0^\infty\frac{1}{2n+1}\int\cos(2n+1)x\frac{dx}{\Delta},\ldots\ldots\ldots (35)$$

$$\gamma=\int\frac{\sin x}{\cos x}F\,dx=-\int F\,dx\frac{d}{dx}.L\cos x=-F.\,L\cos x+\int L\cos x\frac{dx}{\Delta}=-F.\,L\cos x-$$

$$-\int\frac{dx}{\Delta}\Big\{L2+\sum_1^\infty(-1)^n\frac{\cos 2nx}{n}\Big\}=-F.\,L\,2\cos x-\sum_1^\infty\frac{(-1)^n}{n}\int\cos 2nx\frac{dx}{\Delta},\ldots (33)$$

$$\delta=\int\frac{cosx}{sinx}Fdx=\int Fdx\frac{d}{dx}.Lsinx=F.Lsinx-\int Lsinx\frac{dx}{\Delta}=F.Lsinx+\int\frac{dx}{\Delta}\left\{L2+\sum_{1}^{\infty}\frac{cos2nx}{n}\right\}=$$

$$=F.L\,2\,sin\,x+\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}\int cos\,2\,n\,x\frac{d\,x}{\Delta}, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (39)$$

$$\varepsilon=\int F\,d\,x=x\,.\,F-\int\frac{x\,d\,x}{\Delta}, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (41)$$

$$\zeta=\int\frac{dx}{cos\frac{1}{2}x}F=2\int F\,dx\frac{d}{dx}.L\,tang(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{4}x)=2\,F.\,L\,tang\tfrac{1}{4}(\pi+x)-2\int L\,tang\tfrac{1}{4}(\pi+x)\frac{dx}{\Delta}=$$

$$=2\,F.\,L\,tang\,\tfrac{1}{4}(\pi+x)-4\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\,n+1}\int sin\,(2\,n+1)\,\tfrac{1}{2}\,x\frac{d\,x}{\Delta}, \ldots \ldots \ldots (51)$$

$$\eta=\int\frac{d\,x}{sin\,\frac{1}{2}\,x}\,F=2\int F\,d\,x\frac{d}{d\,x}.L\,tang\,\tfrac{1}{4}\,x=2\,F.\,L\,tang\,\tfrac{1}{4}\,x-2\int L\,tang\,\tfrac{1}{4}\,x\frac{d\,x}{\Delta}=$$

$$=2\,F.\,L\,tang\,\tfrac{1}{4}\,x+4\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{2\,n+1}\int cos\,(2\,n+1)\,\tfrac{1}{2}\,x\frac{d\,x}{\Delta}. \ldots \ldots \ldots \ldots (60)$$

Uit deze uitkomsten blijkt echter duidelijk, dat men hier werkelijk met nieuwe afzonderlijke transcendenten te doen heeft.

9. Beproeven wij nu, wat er te vinden zij omtrent die integralen, waarbij nog eene macht van Δ als factor voorkomt, hetzij eene onevene, zoodat de integraal eene irrationeele wordt, hetzij eene evene, wanneer zij derhalve rationeel blijft. Men vindt, altijd weder door de methode van gedeeltelijk integreeren,

$$\int\varphi(x)\frac{dx}{\Delta^{n-1}}=\frac{\varphi(x)}{\Delta^{n-2}}F-\int F\,d\,x\left\{\frac{1}{\Delta^{n-2}}\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x}-\varphi(x)\frac{n-2}{2}\frac{2\,k^2\,sin\,x\,.\,cos\,x}{\Delta^n}\right\}=$$

$$=\frac{\varphi(x)}{\Delta^{n-2}}F-\int\frac{F\,d\,x}{\Delta^n}\left\{\Delta^2\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x}+(n-2)\,k^2\,sin\,x\,.\,cos\,x.\,\varphi(x)\right\}. \ldots \ldots \ldots (\boldsymbol{b})$$

Alles hangt nu af van den vorm, dien de factor tusschen { } onder het laatste integraalteeken verkrijgen zal, en deze hangt wederom te zamen met den vorm van de $\varphi(x)$ zelve.

Stellen wij dus vooreerst $\varphi(x)=sin^{p+1}x$, dan wordt die herleidingsformule $(\boldsymbol{b})$

$$\int sin^{p+1}x\frac{d\,x}{\Delta^{n-1}}=\frac{sin^{p+1}x}{\Delta^{n-2}}F-\int F\frac{d\,x}{\Delta^n}\{\Delta^2(p+1)\,sin^p\,x\,.\,cos\,x+(n-2)\,k^2\,sin^{p+2}\,x\,.\,cos\,x\}=$$

$$=\frac{sin^{p+1}x}{\Delta^{n-2}}F-\int F\frac{d\,x}{\Delta^n}sin^p\,x\,.\,cos\,x\,\{(p+1)+(n-p-3)\,k^2\,sin^2x\}, \ldots (G_1)$$

$$= \frac{\sin^{p+1} x}{\Delta^{n-2}} F - \int F \frac{dx}{\Delta^n} \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, \{(n-2) - (n-p-3)\Delta^2\}, \quad \ldots \quad (G_2)$$

waarbij in de eerste (G_1) de exponent n standvastig blijft, en de p verandert, terwijl daarentegen in de andere (G_2) de exponent p standvastig blijft, maar de n verandert. Beide vergelijkingen worden zeer vereenvoudigd door de onderstelling $p = n - 3$, en leveren ons dan, na oplossing der eenige in het tweede lid overgebleven integraal,

$$(n-2) \int \sin^{n-3} x \,.\, \cos x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^n} = \frac{\sin^{n-2} x}{\Delta^{n-2}} F - \int \sin^{n-2} x \frac{dx}{\Delta^{n-1}}. \quad \ldots \quad (G_3)$$

Maar ook in het algemeen kan men de vergelijkingen (G_2) en (G_1) oplossen, waarbij in deze laatste eerst p door $p-2$ moet vervangen worden.

$$\int \sin^p x . \cos x . F \frac{dx}{\Delta^n} = \frac{1}{n-2} \left\{ \frac{\sin^{p+1} x}{\Delta^{n-2}} F - \int \sin^{p+1} x \frac{dx}{\Delta^{n-1}} + (n-p-3) \int \sin^p x . \cos x . F \frac{dx}{\Delta^{n-2}} \right\}, \ldots (G_4)$$

$$= \frac{1}{(n-p-1)k^2} \left\{ \frac{\sin^{p-1} x}{\Delta^{n-2}} F - \int \sin^{p-1} x \frac{dx}{\Delta^{n-1}} - (p-1) \int \sin^{p-2} x . \cos x . F \frac{dx}{\Delta^n} \right\} \ldots (XVII)$$

Nu kan men den zamenhang tusschen onze integralen beter overzien. Vooreerst stelle men in de bijzondere vergelijking (G_3) $n = 3$, $= 1$ en $= -1$, dan komt er achtereenvolgens

$$\int \cos x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{\sin x}{\Delta} F - \int \sin x \frac{dx}{\Delta^2} = \frac{\sin x}{\Delta} F + \frac{1}{k\sqrt{1-k^2}} \left(Bg\,tg \frac{k \cos x}{\sqrt{1-k^2}} - Bg\,tg \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \right) =$$

$$= \frac{\sin x}{\Delta} F - \frac{1}{k\sqrt{1-k^2}} Bg\cos \frac{1 - k^2(1-\cos x)}{\Delta}, \quad \ldots \quad (76)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} F \frac{dx}{\Delta} = - \frac{\Delta}{\sin x} F + \int \frac{dx}{\sin x} = - \frac{\Delta}{\sin x} F + L\,tang\,\tfrac{1}{2} x, \quad \ldots \quad (77)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} \Delta \,.\, F dx = \frac{1}{3} \left\{ - \frac{\Delta^3}{\sin^3 x} F + \int \frac{dx}{\sin^3 x} \Delta^2 \right\} = \frac{1}{3} \left(- \frac{\Delta^3}{\sin^3 x} F + \int \frac{dx}{\sin^3 x} - k^2 \int \frac{dx}{\sin x} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ - \frac{\Delta^3}{\sin^3 x} F - \frac{1}{2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2} (1 - 2k^2) L\,tang\,\tfrac{1}{2} x \right\}. \quad \ldots \quad (78)$$

Deze integralen zijn alleen te gebruiken bij de herleidingsformulen (G_4) in het geval, dat p even is; maar voor onevene waarden van p geeft de vergelijking

(G_3) niets, wegens den factor $n-2=p-1$, enz. In zulk geval moet men iedere integraal rechtstreeks behandelen.

$$\int \sin x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2}\int F\,dx\frac{d}{dx}\,.\,\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{k^2}\left\{\frac{F}{\Delta} - \int\frac{1}{\Delta}\frac{dx}{\Delta}\right\} =$$

$$= \frac{1}{k^2}\left\{\frac{F}{\Delta} - \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\,Bg\,tang\,(tang\,x\,.\sqrt{1-k^2})\right\}, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (79)$$

$$\int \sin x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta} = -\frac{1}{k^2}\int F\,dx\frac{d}{dx}\,.\,\Delta = -\frac{1}{k^2}\left\{\Delta\,.\,F - \int\Delta\frac{dx}{\Delta}\right\} = \frac{1}{k^2}\{x-\Delta\,.\,F\} \ldots (80)$$

Nu geeft vooreerst de vergelijking (G_4), voor $n=3$ en $n=1$,

$$\int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^3} = \sin^{p+1}x\frac{F}{\Delta} - \int \sin^{p+1}x\frac{dx}{\Delta^2} - p\int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta}, \ldots \ldots \quad (G_5)$$

$$\int \sin^p x.\cos x.F\frac{dx}{\Delta} = -\sin^{p+1}x.\Delta.F + \int \sin^{p+1}x\,dx + (p+2)\int \sin^p x.\cos x.\Delta.F dx\,; \ldots (G_6)$$

en vervolgens geeft wederom de laatste vergelijking, waarnaar men daarin $p=1$ stelt en verder gebruik maakt van de gevonden integraal (80),

$$\int \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \,.\, F\,dx = \frac{1}{3}\left\{\sin^2 x \,.\, \Delta \,.\, F - \int \sin^2 x\,dx + \int \sin x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta}\right\} =$$

$$= \frac{1}{6\,k^2}\{(2-k^2)\,x + k^2 \sin x \,.\, \cos x - 2\,\Delta^3 \,.\, F\}. \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (81)$$

En thans kan men ook in de herleidingsformule (XVII) n achtereenvolgens door 3, 1 en -1 vervangen, waardoor eindelijk het drietal vergelijkingen ontstaat.

$$\int \sin^p x.\cos x.F\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{(p-2)k^2}\left\{-\frac{\sin^{p-1}x}{\Delta}F + \int \sin^{p-1}x\frac{dx}{\Delta^2} + (p-1)\int \sin^{p-2}x.\cos x.F\frac{dx}{\Delta^3}\right\}, \ldots (XVIII)$$

$$\int \sin^p x.\cos x.F\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{pk^2}\left\{-\sin^{p-1}x.\Delta.F + \int \sin^{p-1}x\,dx + (p-1)\int \sin^{p-2}x.\cos x.F\frac{dx}{\Delta}\right\}, \ldots (XIX)$$

$$\int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \,.\, F\,dx = \frac{1}{(p+2)\,k^2}\left\{-\sin^{p-1}x \,.\, \Delta^3 \,.\, F + \int \sin^{p-1}x \,.\, \Delta^2\,dx + \right.$$

$$\left. + (p-1)\int \sin^{p-2}x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \,.\, F\,dx\right\}. \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (XX)$$

In het geval van onevene waarden van p vindt men voor de eindintegralen, als men $p = 3$ stelt, de integralen (79), (80) en (81). Indien daarentegen p evene waarden heeft, laten deze herleidingsformulen de integralen (76), (77) en (78) niet als eindintegralen toe, omdat respectieve voor $p = 2, = 0, = -2$, de noemers van de tweede leden verdwijnen, en de vergelijkingen derhalve onbruikbaar worden. Men moet daarom trachten, die drie eindintegralen rechtstreeks te bepalen.

$$\int \sin^2 x \,.\, \cos x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \int (1 - \Delta^2) \cos x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \left\{ \int \cos x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^3} - \int \cos x \,.\, F \frac{dx}{\Delta} \right\},$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \Delta \,.\, F\, dx = \int \frac{1 - k^2 \sin^2 x}{\sin^2 x} \frac{\cos x}{\Delta} F\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} F \frac{dx}{\Delta} - k^2 \int \cos x \,.\, F \frac{dx}{\Delta}.$$

Beide integralen worden dus tot de derde $\int \cos x \,.\, F \frac{dx}{\Delta}$ herleid, die voor $p = 0$ uit (XIX) ontstaat. Wel is waar kan men deze, door de methode van gedeeltelijk integreeren, nog verder transformeeren; maar men blijft toch op eene eigene transcendente stuiten.

$$\int \cos x \,.\, F \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{k} \int \frac{dx}{\Delta} F \frac{d}{dx} . (k \sin x) = \frac{1}{k} \int F\, dx \frac{d}{dx} . Bg \sin (k \sin x) =$$

$$= \frac{1}{k} \left\{ F \,.\, Bg \sin (k \sin x) - \int Bg \sin (k \sin x) \frac{dx}{\Delta} \right\} = \theta; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (82)$$

en hiermede wordt nu, met behulp trouwens van de integralen (76) en (77),

$$\int \sin^2 x \,.\, \cos x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \left\{ -\theta + \frac{\sin x}{\Delta} F - \frac{1}{k\sqrt{1-k^2}} Bg \cos \frac{1-k^2(1-\cos x)}{\Delta} \right\}, \ldots \quad (83)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \Delta \,.\, F\, dx = -k^2 \theta - \frac{\Delta}{\sin x} F + L \tang \tfrac{1}{2} x. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (84)$$

Tot dusverre hadden wij slechts met irrationeele integralen te doen, waarbij Δ^{-3}, Δ^{-1}, Δ^{+1} in den teller voorkwamen. Zoodra men daarentegen evene machten van de Δ invoert, vervallen hier de positieve exponenten, omdat men dan alleen met geheele vormen te doen heeft, zoo als in de theoremata (I) tot (XVI) werden behandeld. Wat de positieve waarden van n en dus de negatieve machten in dat geval betreft, nemen wij $n = 2$ en $n = 4$.

*

Voor $n=2$ geven de vergelijkingen (G_3) en (G_4) niets; dan heeft men echter

$$\int sin\,x\,.\,cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^2}=-\frac{1}{2\,k^2}\int F\frac{dx}{\Delta^2}\frac{d}{dx}.\Delta^2=\frac{1}{2\,k^2}\left\{-F.\,L\,\Delta^2+\int L\,\Delta^2\frac{dx}{\Delta}\right\}=\iota\,,\,..\,(85)$$

$$\int cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^2}=\frac{1}{2\,k}\int F\frac{2\,dx}{1-k^2\,sin^2 x}\frac{d}{dx}.(k\,sin x)=\frac{1}{2k}\left\{F.\,L\frac{1+k sin x}{1-k sin x}-\int L\frac{1+k sin x}{1-k sin x}\frac{dx}{\Delta}\right\}=\varkappa\,..\,(86)$$

Zoo als men echter gereedelijk ziet, zijn beide vreemde, onbekende integralen, en vormen zij trouwens een paar nieuwe transcendenten. Maar nu wordt dan ook de algemeene herleidingsformule (XVII) voor $n=2$

$$\int sin^p x.cos x.F\frac{dx}{\Delta^2}=\frac{1}{(p-1)k^2}\left\{-sin^{p-1}x.F+\int sin^{p-1}x\frac{dx}{\Delta}+(p-1)\int sin^{p-2}x.cos\,x.F\frac{dx}{\Delta^2}\right\},\,..(XXI)$$

waarbij nu de transcendenten (85) en (86) als eindintegralen behooren.

Ten einde den weg te bereiden voor het tweede geval van $n=4$, stelle men vooreerst $n=4$ in (G_3), dan komt er

$$\int sin\,x\,.\,cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^4}=\frac{1}{2}\left\{\frac{sin^2 x}{\Delta^2}F-\int sin^2 x\frac{dx}{\Delta^3}\right\}=\frac{1}{2k^2(1-k^2)}\left\{\frac{1-k^2}{\Delta^2}F-E+\frac{k^2}{\Delta}sin x.cos x\right\}..\,(87)$$

Vervolgens neme men ook $n=4$ in (G_4), dan is

$$\int sin^p x\,.\,cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^4}=\frac{1}{2}\left\{\frac{sin^{p+1}x}{\Delta^2}F-\int sin^{p+1}x\frac{dx}{\Delta^3}-(p-1)\int sin^p x\,.\,cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^2}\right\}.\;.\;(G_7)$$

Ten einde hierin met goeden uitslag $p=2$ te kunnen stellen, is men verplicht deze onderstelling eerst in de herleidingsformule (XXI) in te voeren, waardoor er komt, later met behulp der integralen (86) en (γ_8),

$$\int sin^2 x\,.\,cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^2}=\frac{1}{k^2}\left\{-sin\,x\,.\,F+\int sin\,x\frac{dx}{\Delta}+\int cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{k^2}\left\{\varkappa-sin\,x\,.\,F-\frac{1}{k}\,L\,\frac{\Delta+k\,cos\,x}{1+k}\right\};\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,(88)$$

en hiermede leidt men uit de herleidingsformule (G_7) voor $p=2$ af

$$\int sin^2 x\,.\,cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^4}=\frac{1}{2}\left\{\frac{sin^3 x}{\Delta^2}F-\int sin^3 x\frac{dx}{\Delta^3}-\int sin^2 x\,.\,cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\,k^2}\left\{-\varkappa+\frac{sin\,x}{\Delta^2}F+\frac{cos\,x-\Delta}{(1-k^2)\,\Delta}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\,(89)$$

Evenzoo stelle men in de herleidingsformule (XXI) $p = 3$, dan is

$$\int \sin^3 x\,.\cos x\,.F\frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{2\,k^2}\left\{ -\sin^2 x\,.F + \int \sin^2 x\frac{dx}{\Delta} + 2\int \sin x\,.\cos x\,.F\frac{dx}{\Delta^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\,k^2}\left\{ -\sin^2 x\,.F + \frac{1}{k^2}(F - E) + 2\,\iota\right\} = \frac{1}{2\,k^4}\left\{ \Delta^2.F - E + 2\,k^2\,\iota\right\} \ldots . (90)$$

En nu kan men in de vergelijking (G_7) $p = 3$ stellen, en verkrijgt dan

$$\int \sin^3 x\,.\cos x\,.F\frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\sin^4 x}{\Delta^2}F - \int \sin^4 x\frac{dx}{\Delta^3} - 2\int \sin^3 x\,.\cos x\,.F\frac{dx}{\Delta^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\,k^4}\left\{ \frac{1}{\Delta^2}F - \frac{1}{1-k^2}E + \frac{k^2 \sin x\,.\cos x}{(1-k^2)\,\Delta} - 2\,k^2\,\iota\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots . (91)$$

Thans kan men eindelijk $n = 4$ stellen in de algemeene herleidingsformule (XVII) zoodat

$$\int \sin^p x.\cos x.F\frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{(p-3)k^2}\left\{ -\frac{\sin^{p-1}x}{\Delta^2}F + \int \sin^{p-1}x\frac{dx}{\Delta^3} + (p-1)\int \sin^{p-2}x.\cos x.F\frac{dx}{\Delta^4}\right\} , .\ (XXII)$$

die de integralen (87), (89) en (91) tot eindintegralen heeft.

Bij de vorige bewerkingen had men de volgende integralen noodig.

$$\int \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{1-k^2}\left\{ E - \frac{k^2 \sin x\,.\cos x}{\Delta}\right\} , \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\eta_1)$$

$$\int \sin x\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{\Delta - \cos x}{(1-k^2)\Delta} , \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\eta_2)$$

$$\int \sin^2 x\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2}\int (1-\Delta^2)\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2}\left[\int\frac{dx}{\Delta^3} - \int\frac{dx}{\Delta}\right] = \frac{1}{k^2(1-k^2)}\left\{ E - (1-k^2)F - \frac{k^2 \sin x.\cos x}{\Delta}\right\} , . . (\eta_3)$$

$$\int \sin^3 x\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2}\int \sin x\frac{dx}{\Delta^3}(1-\Delta^2) = \frac{1}{k^2}\left[\int \sin x\frac{dx}{\Delta^3} - \int \sin x\frac{dx}{\Delta}\right] = \frac{1}{k^2}\left\{ \frac{\Delta - \cos x}{(1-k^2)\Delta} + \frac{1}{k}L\frac{\Delta + k\cos x}{1+k}\right\} , . (\eta_4)$$

$$\int \sin^4 x\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^4}\int\frac{1-2\Delta^2+\Delta^4}{\Delta^3}dx = \frac{1}{k^4}\left\{ \int\frac{dx}{\Delta^3} - 2\int\frac{dx}{\Delta} + \int \Delta\,dx\right\} = \frac{1}{k^4}\left\{ \frac{1}{1-k^2}\left(E - \frac{k^2 \sin x.\cos x}{\Delta}\right) - \right.$$

$$\left. - 2\,F + E\right\} = \frac{1}{k^4\,(1-k^2)}\left\{ (2-k^2)\,E - (1-k^2)\,2\,F - \frac{k^2 \sin x\,.\cos x}{\Delta}\right\} , . . (\eta_5)$$

waar gebruik werd gemaakt van de integralen (γ_1) en (γ_8).

Wilde men in de algemeene herleidingsformule (**b**) de onderstelling $\varphi(x) = \sin^{p+1} x . \cos x$ beproeven, waartoe naar het vroeger behandelde wel aanleiding was, dan zoude men verkrijgen

$$\int \sin^{p+1} x . \cos x \frac{dx}{\Delta^{n-1}} = \frac{\sin^{p+1} x . \cos x}{\Delta^{n-2}} F - \int F \frac{dx}{\Delta^n} \{ \Delta^2 [(p+1) \sin^p x . \cos^2 x - \sin^{p+2} x] + $$
$$ + (n-2) k^2 \sin^{p+2} x . \cos^2 x \} =$$

$$= \frac{\sin^{p+1} x . \cos x}{\Delta^{n-2}} F - \int \sin^p x . F \frac{dx}{\Delta^n} \{ \Delta^2 [(p+1) - (p+2) \sin^2 x] + (n-2) k^2 \sin^2 x . (1 - \sin^2 x) \} =$$

$$= \frac{\sin^{p+1} x . \cos x}{\Delta^{n-2}} F - \int \sin^p x . F \frac{dx}{\Delta^n} \{ (p+1) - [(p+2) + (p-n+3) k^2] \sin^2 x + (p-n+4) k^2 \sin^4 x \} \quad , . (G_8)$$

$$= \frac{\sin^{p+1} x . \cos x}{\Delta^{n-2}} F - \int \sin^p x . F \frac{dx}{\Delta^n} \{ (n-2)(1 - \sin^2 x) + [(p-n+3) - (p-n+4) \sin^2 x] \Delta^2 \} =$$

$$= \frac{\sin^{p+1} x . \cos x}{\Delta^{n+2}} F - \frac{1}{k^2} \int \sin^p x . F \frac{dx}{\Delta^n} \{ -(n-2)(1-k^2) - [(p-2n+6) - (p-n+3) k^2] \Delta^2 + (p-n+4) \Delta^4 \} , . (G_9)$$

waar de (G_8) naar de machten van $\sin x$, daarentegen de (G_9) naar die van Δ is gerangschikt; maar geene van beide herleidingsformulen leveren iets bruikbaars.

10. Daarentegen zal ten derde de onderstelling $\varphi(x) = \cos^{p+1} x$ ons bij het algemeene theorema (**b**) tot de volgende bruikbare uitkomsten voeren.

$$\int \cos^{p+1} x \frac{dx}{\Delta^{n-1}} = \frac{\cos^{p+1} x}{\Delta^{n-2}} F - \int F \frac{dx}{\Delta^n} \{ -\Delta^2 (p+1) \cos^p x . \sin x + (n-2) k^2 \sin x . \cos^{p+2} x \} =$$

$$= \frac{\cos^{p+1} x}{\Delta^{n-2}} F - \int F \frac{dx}{\Delta^n} \sin x . \cos^p x . \{ -(p+1)(1-k^2) + (n-p-3) k^2 \cos^2 x \} , \ldots (H_1)$$

$$= \frac{\cos^{p+1} x}{\Delta^{n-2}} F - \int F \frac{dx}{\Delta^n} \sin x . \cos^p x . \{ -(n-2)(1-k^2) + (n-p-3) \Delta^2 \} . \quad . \; . \; . \; . \; (H_2)$$

Bij de eerste dezer herleidingen (H_1) verandert de exponent p, terwijl de exponent n standvastig blijft, maar bij de tweede (H_2) daarentegen geschiedt juist het omgekeerde. Men kan in beide eene groote vereenvoudiging aanbrengen door $p = n - 3$ te nemen, en dan de eenige integraal, die in het tweede lid overblijft, op te lossen; langs dien weg verkrijgt men uit beide

$$(n-2)(1-k^2)\int \sin x \,.\, \cos^{n-3} x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^n} = -\frac{\cos^{n-2} x}{\Delta^{n-2}} F + \int \cos^{n-2} x \frac{dx}{\Delta^{n-1}} \ldots\ldots \quad (H_3)$$

Wanneer men de algemeene vergelijkingen (H_2) en (H_1) zelve wil oplossen, waartoe men in de laatstgenoemde eerst p door $p-2$ moet vervangen, zoo verkrijgt men

$$\int \sin x \,.\, \cos^p x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^n} = \frac{1}{(n-2)(1-k^2)}\left\{-\frac{\cos^{p+1} x}{\Delta^{n-2}} F + \int \cos^{p+1} x \frac{dx}{\Delta^{n-1}} + \right.$$

$$\left. + (n-p-3)\int \sin x \,.\, \cos^p x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^{n-2}}\right\}, \ldots\ldots \quad (H_4)$$

$$= \frac{1}{(n-p-1)k^2}\left\{\frac{\cos^{p-1} x}{\Delta^{n-2}} F - \int \cos^{p-1} x \frac{dx}{\Delta^{n-1}} + (p-1)(1-k^2)\int \sin x \,.\, \cos^{p-2} x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^n}\right\} \ldots (XXIII)$$

In de vergelijking (H_3) stelle men thans $n = 3$, $= 1$, $= -1$, en er komt

$$\int \sin x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{1-k^2}\left\{-\frac{\cos x}{\Delta} F + \int \cos x \frac{dx}{\Delta^2}\right\} = \frac{1}{1-k^2}\left\{-\frac{\cos x}{\Delta} F + \frac{1}{2k} L \frac{1-k\sin x}{1+k\sin x}\right\}, \ldots (92)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} F\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{1-k^2}\left(\frac{\Delta}{\cos x} F - \int \frac{dx}{\cos x}\right) = \frac{1}{1-k^2}\left\{\frac{\Delta}{\cos x} F - L\, tg\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x\right)\right\}, \ldots (93)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}\Delta \,.\, F dx = \frac{1}{3(1-k^2)}\left\{\frac{\Delta^3}{\cos^3 x} F - \int \frac{dx}{\cos^3 x}\Delta^2\right\} = \frac{1}{3(1-k^2)}\left\{\frac{\Delta^3}{\cos^3 x} F - \frac{1-k^2}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(1+k^2)\, L\, tg\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x\right)\right\} \ldots\ldots \quad (94)$$

Deze integralen nu zijn bij de herleidingsformule (H_4) alleen van dienst, wanneer de exponent p even is. Indien echter p oneven is, kan ons de vergelijking (H_3) niet helpen, omdat de factor $n-2$ alsdan in den noemer verdwijnt; men moet dan in zulk geval iedere integraal afzonderlijk zoeken te bepalen, en komt dus van zelf terug op de vroeger gevonden integralen (79), (80) en (81). Deze laatste echter konde ook gevonden worden, als men in die herleidingsformule (H_4) $n = 3$ en $= 1$ stelt, waardoor er eerst verkregen wordt

$$\int \sin x \,.\, \cos^p x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{1-k^2}\left\{-\frac{\cos^{p+1} x}{\Delta} F + \int \cos^{p+1} x \frac{dx}{\Delta^2} - p\int \sin x \,.\, \cos^p x \,.\, F\frac{dx}{\Delta}\right\}, \ldots (H_5)$$

$$\int \sin x \,.\, \cos^p x \,.\, F\frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{1-k^2}\left\{\cos^{p+1} x \,.\, \Delta \,.\, F - \int \cos^{p+1} x\, dx + (p+2)\int \sin x \,.\, \cos^p x \,.\, \Delta \,.\, F dx\right\} \ldots (H_6)$$

Stel vervolgens in de algemeene herleidingsformule (XXIII) $n=3$, $=1$ en $=-1$, ten einde tot het volgende drietal formulen te geraken,

$$\int sin x . cos^p x . F\frac{dx}{\Delta^3}=\frac{1}{(p-2)k^2}\left\{-\frac{cos^{p-1}x}{\Delta}F+\int cos^{p-1}x\frac{dx}{\Delta^2}-(p-1)(1-k^2)\int sin x . cos^{p-2}x . F\frac{dx}{\Delta^3}\right\}, . \text{(XXIV)}$$

$$\int sin x . cos^p x . F\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{pk^2}\left\{-cos^{p-1} . \Delta . F+\int cos^{p-1}x dx-(p-1)(1-k^2)\int sin x . cos^{p-2}x . F\frac{dx}{\Delta}\right\}, . . \text{(XXV)}$$

$$\int sin\, x . cos^p\, x . \Delta . F\, dx=\frac{1}{(p+2)\,k^2}\Big\{-cos^{p-1}\,x . \Delta^3 . F+\int cos^{p-1}\,x . \Delta^2\, dx -$$

$$-(p-1)(1-k^2)\int sin\, x . cos^{p-2}x . \Delta . F\, dx\Big\}; \;. . . . . \text{(XXVI)}$$

waarbij nu de bovenvermelde integralen (79), (80) en (81) de eindintegralen worden in het bijzonder geval dat p oneven is, zoodra men $p=3$ stelt. Indien evenwel de waarde van dien exponent p even is, verdwijnen de integralen (89), (92), (93) en (94), omdat dan de noemers $p-2$, p en $p+2$ zelve verdwijnen. Men is alsdan genoodzaakt, die integralen rechtstreeks te gaan bepalen, en vindt dan ook voorloopig

$$\int sin\, x . cos^2 x . F\frac{dx}{\Delta^3}=\frac{1}{k^2}\int(\Delta^2-1+k^2) sin x . F\frac{dx}{\Delta^3}=\frac{1}{k^2}\left\{\int sin x . F\frac{dx}{\Delta}-(1-k^2)\int sin x . F\frac{dx}{\Delta^3}\right\},$$

$$\int\frac{sin\, x}{cos^2\, x}\Delta . F dx=\int\frac{1-k^2+k^2 cos^2 x}{cos^2 x}\frac{sin\, x}{\Delta}F\, dx=(1-k^2)\left\{\int\frac{sin\, x}{cos^2 x}F\frac{dx}{\Delta}+k^2\int sin x . F\frac{dx}{\Delta}\right\},$$

zoodat alle zijn teruggebracht tot de middelste integraal $\int sin\, x . F\frac{dx}{\Delta}$, die ook voor $p=0$ uit de herleidingsformule (XXV) volgt. Maar zij blijft eene vreemde integraal, dat is eene nieuwe transcendente, al is zij ook vatbaar om door gedeeltelijk integreeren herleid te worden.

$$\int sin\, x . F\frac{dx}{\Delta}=-\frac{1}{k}\int F\frac{dx}{\sqrt{1+\frac{k^2 cos^2 x}{1-k^2}}}\frac{d}{dx} . \frac{k\, cos\, x}{\sqrt{1-k^2}}=-\frac{1}{k}\int F\, dx\frac{d}{dx} . L\frac{k\, cos\, x+\Delta}{\sqrt{1-k^2}}=$$

$$=-\frac{1}{k}F . L\frac{k\, cos\, x+\Delta}{\sqrt{1-k^2}}+\frac{1}{k}\int L\frac{k\, cos\, x+\Delta}{\sqrt{1-k^2}}\frac{dx}{\Delta}=-\frac{1}{k}F . L\frac{k\, cos\, x+\Delta}{\sqrt{1-k^2}}-\frac{1}{k}L\sqrt{1-k^2} . F+$$

$$+\frac{1}{k}\int L\,(k\, cos\, x+\Delta)\frac{dx}{\Delta}=-\frac{1}{k}F . L\,(k\, cos\, x+\Delta)+\frac{1}{k}\int L\,(k\, cos\, x+\Delta)\frac{dx}{\Delta}=\lambda . . (95)$$

En hiermede worden nu, wanneer men gebruik maakt van de integralen (92) en (93), de vorige eindintegralen

$$\int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \left\{ \lambda + \frac{\cos x}{\Delta} F - \frac{1}{2k} L \frac{1 - k \sin x}{1 + k \sin x} \right\}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (96)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Delta \,.\, F dx = k^2 \lambda + \frac{\Delta}{\cos x} F - L\, tg \left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2} x\right). \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (97)$$

Stapt men van de onevene waarden van n af, en gaat men tot de evene over, dan worden de overeenkomstige integralen daardoor rationeel; en hier moet men onderscheid maken tusschen negatieve en positieve waarden van n. In het eerste dezer gevallen komt er eene macht van Δ^2 in den teller; deze kan men dus ontwikkelen, en daarbij wordt men teruggevoerd tot de integralen, die in het begin van dit Hoofdstuk zijn behandeld. In het andere geval daarentegen komen de machten van Δ^2 in den noemer; en alzoo wordt men weder tot nieuwe integralen gevoerd; men bepale zich hier tot $n = 2$ en $n = 4$.

Wanneer men in de herleidingsformulen (H_3) en (H_4) $n = 2$ wilde stellen, zouden zij niets opleveren; men moet die integralen dus rechtstreeks zoeken en komt dan eerst tot de vorige integraal (83) en daarenboven tot de volgende

$$\int \sin x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^2} = -\frac{1}{k} \int F \frac{dx}{1 - k^2 + k^2 \cos^2 x} \frac{d}{dx} . (k \cos x) = -\frac{1}{k\sqrt{1-k^2}} \left\{ Bg\, tg \frac{k \cos x}{\sqrt{1-k^2}} . F - \right.$$

$$\left. - \int Bg\, tang \frac{k \cos x}{\sqrt{1-k^2}} \frac{dx}{\Delta} \right\} = \mu, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (98)$$

die evenzeer eene nieuwe bijzondere transcendente vormt.

Nu kan men in de herleidingsformule (XXIII) $n = 2$ en $n = 4$ stellen, waardoor men verkrijgt

$$\int \sin x \,.\, \cos^p x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{(p-1) k^2} \left\{ - \cos^{p-1} x \,.\, F + \int \cos^{p-1} x \frac{dx}{\Delta} - \right.$$

$$\left. - (p-1)(1-k^2) \int \sin x \,.\, \cos^{p-2} x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^2} \right\}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(XXVII)}$$

$$\int \sin x \,.\, \cos^p x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{(p-3) k^2} \left\{ - \cos^{p-1} x \frac{F}{\Delta^2} + \int \cos^{p-1} x \frac{dx}{\Delta^3} - \right.$$

$$\left. - (p-1)(1-k^2) \int \sin x \,.\, \cos^{p-2} x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^4} \right\} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(XXVIII)}$$

Hier zijn bij de vergelijking (XXVII) de integralen (85) of (98) eindintegralen, al naarmate de exponent p oneven of even is. Bij de vergelijking (XXVIII) daarentegen is voor p oneven de eindintegraal reeds gevonden in de integraal (87); maar zoodra p even wordt, moet men de overeenkomstige eindintegraal nog zoeken. Daartoe onderstelle men eerst $n = 4$, en $p = 2$ in de herleidingsformule (H_4), dan is

$$\int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2(1-k^2)} \left\{ -\frac{\cos^3 x}{\Delta^2} F + \int \cos^3 x \frac{dx}{\Delta^3} - \int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^2} \right\};$$

om hierin de laatste integraal te bepalen, stelle men wederom $p = 2$ in de vergelijking (XXVII), zoo wordt

$$\int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{k^2} \left\{ -\cos x \,.\, F + \int \cos x \frac{dx}{\Delta} - (1-k^2) \int \sin x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{k^2} \left\{ -(1-k^2)\mu - \cos x \,.\, F + \frac{1}{k} \, Bg \sin (k \sin x) \right\}; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (99)$$

waardoor ten slotte

$$\int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2k^2} \left\{ \mu + \frac{\cos x}{\Delta^2} F - \frac{\sin x}{\Delta} \right\}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (100)$$

Nog stelle men in de herleidingsformule (XXVII) $p = 3$, dan komt er

$$\int \sin x \,.\, \cos^3 x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{2k^2} \left\{ -\cos^2 x \,.\, F + \int \cos^2 x \frac{dx}{\Delta} - 2(1-k^2) \int \sin x \,.\, \cos x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2k^2} \left\{ -\cos^2 x \,.\, F + \frac{1}{k^2} [E - (1-k^2) F] - 2(1-k^2) \iota \right\} =$$

$$= \frac{1}{2k^4} \left\{ -\Delta^2 \,.\, F + E - 2(1-k^2) k^2 \iota \right\}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (101)$$

En nu kan men ook in de algemeene herleidingsvergelijking (H_4) $n = 4$ en $p = 3$ stellen, waardoor men verkrijgt

$$\int \sin x \,.\, \cos^3 x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2(1-k^2)} \left\{ -\frac{\cos^4 x}{\Delta^2} F + \int \cos^4 x \frac{dx}{\Delta^3} - 2 \int \sin x \,.\, \cos^3 x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2k^4} \left\{ -\frac{1-k^2}{\Delta^2} F + E - \frac{k^2 \sin x \,.\, \cos x}{\Delta} + 2k^2 \iota \right\}, \quad \ldots \ldots \quad (102)$$

na invoering der vorige integraal.

Uit de herleidingen aan het slot van N^0. 9 blijkt ten duidelijkste, dat de onderstelling $\varphi(x) = sin\,x\,.\,cos^{p+1}x$ hier evenmin tot bruikbare uitkomsten zoude kunnen voeren.

Bij de vorige herleidingen heeft men, behalve de bekende integralen (η_1) en (η_4), nog gebruikt de volgende

$$\int cos\,x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{sin\,x}{\Delta}, \ldots\ldots (\eta_6)$$

$$\int cos^2 x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2}\int\frac{dx}{\Delta^3}[\Delta^2-(1-k^2)] = \frac{1}{k^2}[F-E] + \frac{sin\,x\,.\,cos\,x}{\Delta}, \ldots\ldots (\eta_7)$$

$$\int cos^3 x \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2}\int\frac{cos\,x\,dx}{\Delta^3}[\Delta^2-(1-k^2)] = \frac{1}{k^2}\left\{\int cos\,x\frac{dx}{\Delta} - (1-k^2)\int cos\,x\frac{dx}{\Delta^3}\right\} =$$
$$= \frac{1}{k^2}\left\{\frac{1}{k}Bg\,sin\,(k\,sin\,x) - (1-k^2)^2\frac{sin\,x}{\Delta}\right\}, \ldots\ldots (\eta_8)$$

$$\int cos^4 x\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^4}\int\frac{(1-k^2)^2-2(1-k^2)\Delta^2+\Delta^4}{\Delta^3}dx = \frac{1}{k^4}\left\{(1-k^2)^2\int\frac{dx}{\Delta^3} - 2(1-k^2)\int\frac{dx}{\Delta} + \int\Delta dx\right\} =$$
$$= \frac{1}{k^4}\left\{(1-k^2)^2\left(E - \frac{k^2\,sin\,x\,.\,cos\,x}{\Delta}\right) - 2(1-k^2)F + E\right\} =$$
$$= \frac{1}{k^4}\left\{(2-k^2)E - (1-k^2)2F - (1-k^2)k^2\frac{sin\,x\,.\,cos\,x}{\Delta}\right\}. \ldots\ldots (\eta_9)$$

Dit viertal integralen, alsmede het vijftal, afgeleid aan het einde van N^0. 9, komen voort uit de algemeene herleidingsvergelijkingen (A_1), (B_1) en (A_2), (B_2) van het eerste Hoofdstuk, wanneer men aldaar $n = 1$ neemt.

$$\int sin^p x\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{(p-3)k^2}\left\{\frac{sin^{p-3}x.cos\,x}{\Delta} + [(p-2)+(p-4)k^2]\int sin^{p-2}x\frac{dx}{\Delta^3} - (p-3)\int sin^{p-4}x\frac{dx}{\Delta^3}\right\}, \ldots (C_9)$$

$$= \frac{1}{1-k^2}\left\{-\frac{k^2\,sin^{p+1}x\,.\,cos\,x}{\Delta} - p(1-k^2)\int sin^p x\frac{dx}{\Delta} + (p+1)\int sin^p x.\Delta dx\right\}, \ldots (C_{10})$$

$$\int cos^p x\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{(p-3)k^2}\left\{\frac{sin\,x.cos^{p-3}x}{\Delta} - [(p-2)-(p-3)2k^2]\int cos^{p-2}x\frac{dx}{\Delta^3} + (p-3)(1-k^2)\int cos^{p-4}x\frac{dx}{\Delta^3}\right\}, . (C_{11})$$

$$= \frac{1}{1-k^2}\left\{-\frac{k^2\,sin\,x\,.\,cos^{p+1}x}{\Delta} - p\int cos^p x\frac{dx}{\Delta} + (p+1)\int cos^p x\,.\,\Delta\,dx\right\} \ldots\ldots (C_{12})$$

*

11. Indien wij beproeven voort te gaan met de volgende overeenkomstige onderstellingen, dan vinden wij eerstens bij de onderstelling $\varphi(x) = tang^{p+1} x$ in de formule (***b***)

$$\int tang^{p+1} x \frac{dx}{\Delta^{n-1}} = \frac{tang^{p+1} x}{\Delta^{n-2}} F - \int F \frac{dx}{\Delta^n} \left\{ \Delta^2 (p+1) \frac{tang^p x}{cos^2 x} + (n-2) k^2 \sin x . \cos x . tang^{p+1} x \right\} =$$

$$= \frac{tang^{p+1} x}{\Delta^{n-2}} F - \int F \frac{dx}{\Delta^n} tang^p x . cos^2 x . \{(p+1) + [(2-k^2)(p+1) +$$

$$+ (n-2) k^2] tang^2 x + (1-k^2)(p+1) tang^4 x\}, \ldots\ldots\ldots\ldots (I_1)$$

$$= \frac{tang^{p+1} x}{\Delta^{n-2}} F - \int F \frac{dx}{\Delta^n} tang^p x . \{(n-2) + [(p-n+3) + (p+1) tang^2 x] \Delta^2\} =$$

$$= \frac{tang^{p+1} x}{\Delta^{n-2}} F - \frac{1}{k^2} \int F \frac{dx}{\Delta^n} \frac{tang^p x}{cos^2 x} \{-(n-2)(1-k^2) + [(n-2) 2 -$$

$$-(n-p-3) k^2] \Delta^2 - (n-2) \Delta^4\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I_2)$$

Nemen wij daarna $\varphi(x) = \frac{tang^{p+1} x}{cos^2 x}$, zoo komt er

$$\int \frac{tang^{p+1} x}{cos^2 x} \frac{dx}{\Delta^{n-1}} = \frac{tang^{p+1} x}{cos^2 x . \Delta^{n-2}} F - \int F \frac{dx}{\Delta^n} \left\{ \Delta^2 \left[(p+1) \frac{tang^p x}{cos^4 x} - 2\, tang^{p+1} x \frac{-\sin x}{cos^3 x} \right] + \right.$$

$$\left. + (n-2) k^2 tang^{p+1} x \frac{\sin x}{\cos x} \right\} =$$

$$= \frac{tang^{p+1} x}{cos^2 x . \Delta^{n-2}} F - \int F \frac{dx}{\Delta^n} tang^p x . \{(p+1) + [2(p+2) + (n-p-3) k^2] tang^2 x + (p+3)(1-k^2) tang^4 x\}, . (I_3)$$

$$= \frac{tang^{p+1} x}{cos^2 x . \Delta^{n-2}} F - \int F \frac{dx}{\Delta^n} \frac{tang^p x}{cos^4 x} \{\Delta^2 \{(p+1) + 2 \sin^2 x\} + (n-2) k^2 \sin^2 x . cos^2 x\} =$$

$$= \frac{tang^{p+1} x}{cos^2 x . \Delta^{n-2}} F - \frac{1}{k^2} \int F \frac{dx}{\Delta^n} \frac{tang^p x}{cos^4 x} \{-(n-2)(1-k^2) + [2(n-1) - (n-p-3) k^2] \Delta^2 - n \Delta^4\} . . (I_4)$$

Vervolgens stellen wij in die herleidingsvergelijking (***b***) $\varphi(x) = \sin^{p+1} \frac{1}{2} x$, dan wordt deze

$$\int \sin^{p+1} \tfrac{1}{2} x \frac{dx}{\Delta^{n-1}} = \frac{\sin^{p+1} \frac{1}{2} x}{\Delta^{n-2}} F - \int F \frac{dx}{\Delta^n} \left\{ \Delta^2 \frac{p+1}{2} \sin^p \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x + (n-2) k^2 \sin x . \cos x \sin^{p+1} \tfrac{1}{2} x \right\} =$$

$$= \frac{\sin^{p+1} \frac{1}{2} x}{\Delta^{n-2}} F - \frac{1}{2} \int F \frac{dx}{\Delta^n} \sin^p \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x . \{(p+1) + (n-p-3) 4 k^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} x - (2n-p-5) 4 k^2 \sin^4 \tfrac{1}{2} x\}, \ldots (I_5)$$

$$= \frac{\sin^{p+1} \frac{1}{2} x}{\Delta^{n-2}} F - \frac{1}{2} \int F \frac{dx}{\Delta^n} \sin^p \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x . \{2(n-2) - (2n-p-5) \Delta^2 - (n-2) 8 k^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} x\} . . (I_6)$$

Eindelijk beproeve men nog de onderstelling $\varphi(x) = sin^{p+1}\frac{1}{2}x \,.\, cos\frac{1}{2}x$, en men zal verkrijgen

$$\int sin^{p+1}\tfrac{1}{2}x . cos\tfrac{1}{2}x \frac{dx}{\Delta^{n-1}} = \frac{sin^{p+1}\frac{1}{2}x . cos\frac{1}{2}x}{\Delta^{n-2}} F - \int F\frac{dx}{\Delta^n}\Big\{ -\frac{1}{2}\Delta^2[(p+1)sin^p\tfrac{1}{2}x.cos^2\tfrac{1}{2}x - sin^{p+2}\tfrac{1}{2}x] +$$

$$+ (n-2)k^2 sin\,x \,.\, cos\,x \,.\, sin^{p+1}\tfrac{1}{2}x \,.\, cos\tfrac{1}{2}x\Big\} = \frac{sin^{p+1}\frac{1}{2}x \,.\, cos\frac{1}{2}x}{\Delta^{n-2}}F - \frac{1}{2}\int F\frac{dx}{\Delta^n}sin^p\tfrac{1}{2}x.\{(p+1) -$$

$$-[(p+2)-(n-p-3)4k^2]sin^2\tfrac{1}{2}x - (3n-2p-9)4k^2 sin^4\tfrac{1}{2}x + (2n-p-6)4k^2 sin^6\tfrac{1}{2}x\} \,.\,. (I_7) \,.$$

De aandachtige beschouwing van deze herleidingen doet ons duidelijk zien, dat wij ons onderzoek niet behoeven voort te zetten. Immers het gelukte ons wel in de formulen (I_1), (I_3), (I_5) en (I_7) alles naar de machten p te ordenen van den goniometrischen factor onder het integraalteeken, even als dit in (I_2) en (I_4) gelukte ten aanzien van de machten van Δ; in (I_6) echter niet meer; maar dit helpt ons toch niet. Gaan wij toch de redeneeringen van N⁰. 9 en 10 na, dan blijkt al aanstonds, dat zelfs de eenvoudigste der bovenstaande vergelijkingen zich tot zulk een gedachtengang niet meer leenen willen.

12. Wenden wij ons tot de herleidingsvergelijkingen (E_1) tot (E_8) in § 12 van het eerste Hoofdstuk afgeleid, dan moeten wij, om te geraken tot de vruchtbare toepassing van het theorema (**a**) op deze formulen, eerst de daarbij voorkomende eindintegralen zoeken te bepalen. Daaronder zijn reeds vroeger de volgende gevonden

$$\int sin\,x . F\,dx, \;\ldots\; (7) \qquad \int \frac{dx}{sin^2 x}F, \;\ldots\; (11) \qquad \int cos\,x . F\,dx, \;\ldots\; (6)$$

$$\int \frac{dx}{cos^2 x}F, \;\ldots\; (8) \qquad \int tang\,x . cos^2 x . F\,dx, \;\ldots\; (1) \qquad \int \frac{dx}{sin^2\frac{1}{2}x}F, \;\ldots\; (22)$$

$$\int sin\tfrac{1}{2}x . F\,dx, \;\ldots\; (18) \qquad \int \frac{dx}{cos^2\frac{1}{2}x}F, \;\ldots\; (19) \qquad \int cos\tfrac{1}{2}x . F\,dx, \;\ldots\; (17)$$

$$\int tang\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . F\,dx, \;\ldots\; (15) \qquad \int tang^3\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . F\,dx, \;\ldots\; (14)$$

waarbij nog behoort

$$\int sin^2\tfrac{1}{2}x . F\,dx = \frac{1}{2}\int(1 - cos\,x)F\,dx = \frac{1}{2}\Big\{\varepsilon - sin\,x . F - \frac{1}{k}L\frac{k\,cos\,x + \Delta}{1+k}\Big\}, \;\ldots\; (103)$$

$$\int cos^2\tfrac{1}{2}x . F\,dx = \frac{1}{2}\int(1 + cos\,x)F\,dx = \frac{1}{2}\Big\{\varepsilon + sin\,x . F + \frac{1}{k}L\frac{k\,cos\,x + \Delta}{1+k}\Big\}. \;\ldots\; (104)$$

De nog ontbrekende zullen moeten afgeleid worden uit de integralen (ε_1) tot (ε_{15}), waarbij telkens een of meer der vorige uitkomsten noodig bevonden worden, ten einde eene nieuwe, gewenschte integraal afzonderlijk te bepalen; want daar $\varphi(x)$ overal uit een produkt of quotient bestaat, bevat $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ steeds twee termen, die, na herleiding, eene reeds bekende en daarnaast de bedoelde nieuwe integraal opleveren.

$$\int sin^2 x\,.\,F\,dx = \frac{1}{2}\left\{\varepsilon - sin\,x\,.\,cos\,x\,.\,F + \frac{1}{k^2}(1-\Delta)\right\}, \ldots \ldots \quad (105)$$

$$\int cos^2 x\,.\,F\,dx = \frac{1}{2}\left\{\varepsilon + sin\,x\,.\,cos\,x\,.\,F - \frac{1}{k^2}(1-\Delta)\right\}, \ldots \ldots \quad (106)$$

$$\int sin^4 x.F\,dx = \frac{1}{8}\left\{3\varepsilon - (3+2\,sin^2 x)\,sin\,x.cos\,x.F + \frac{1}{3k^4}(1-\Delta)(4-2\Delta-2\Delta^2+9k^2)\right\}, \ldots (107)$$

$$\int cos^4 x.F\,dx = \frac{1}{8}\left\{3\varepsilon + (3+2cos^2 x)sin\,x.cos\,x.F + \frac{1}{3k^4}(1-\Delta)(4-2\Delta-2\Delta^2-15k^2)\right\}, \ldots (108)$$

$$\int sin^3 x\,.\,F\,dx = \frac{1}{6k^3}\left\{-(2+sin^2 x)\,2k^3\,cos\,x.F + (1+4k^2)\,Bg\,sin\,(k\,sin\,x) - k\,sin\,x.\Delta\right\}, \ldots (109)$$

$$\int cos^3 x\,.\,F\,dx = \frac{1}{6k^3}\left\{(2+cos^2 x)2k^3 sin\,x.F - (1-5k^2)L\frac{\Delta + k\,cos\,x}{1+k} - k + k\,cos\,x.\Delta\right\}, \ldots (110)$$

$$\int tang^4 x.cos^2 x.F\,dx = -\frac{3}{2}\varepsilon + (2+cos^2 x)\frac{sin\,x}{2cos\,x}F - \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}L\frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\,cos\,x} - \frac{1}{2k^2}(1-\Delta), . (111)$$

$$\int \frac{cos^2 x}{tang^2 x}F\,dx = -\frac{3}{2}\varepsilon - (2+sin^2 x)\frac{cos\,x}{2\,sin\,x}F + L\frac{2\,sin\,x}{1+\Delta} + \frac{1}{2k^2}(1-\Delta), \ldots \quad (112)$$

$$\int sin^3 \tfrac{1}{2}x.F\,dx = -\frac{1}{3}(5-cos\,x)cos\tfrac{1}{2}x.F + \frac{1}{3k\sqrt{2k}}\left\{(1+4k)F(l,z) - 2E(l,z) + \frac{2sin\frac{1}{2}x.\sqrt{2k}}{1+k-k\,cos\,x}\Delta\right\}, . (113)$$

$$\int cos^3 \tfrac{1}{2}x\,.\,F\,dx = \frac{1}{3}(5+cos\,x)sin\tfrac{1}{2}x.F + \frac{1}{3k\sqrt{2k}}\left\{(1+4k)F(l,y) - 2E(l,y) + \frac{2cos\frac{1}{2}x.\sqrt{2k}}{1+k+k\,cos\,x}\Delta\right\}, . (114)$$

$$\int sin^4 \tfrac{1}{2}x\,.\,F\,dx = \frac{1}{8}\left\{3\varepsilon - (4-cos\,x)\,sin\,x.\,F - \frac{1}{k^2}\left[4kL\frac{k\,cos\,x+\Delta}{1+k} + 1 - \Delta\right]\right\}, \ldots (115)$$

$$\int \cos^4 \tfrac{1}{2} x . F d x = \frac{1}{8} \left\{ 3 \varepsilon + (4 + \cos x) \sin x . F + \frac{1}{k^2} \left[4 k L \frac{k \cos x + \Delta}{1 + k} + \Delta - 1 \right] \right\}, \ldots (116)$$

$$\int \sin^5 \tfrac{1}{2} x . F dx = -\frac{2}{15} (8 + 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} x + 3 \sin^4 \tfrac{1}{2} x) \cos \tfrac{1}{2} x . F - \frac{1}{30 k^2 \sqrt{2k}} \left\{ (1 - 12 k - 32 k^2) F(l, z) + \right.$$

$$\left. + 24 E(l, z) - \frac{1 + 13 k - k \cos x}{1 + k - k \cos x} 2 \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \right\}, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (117)$$

$$\int \cos^5 \tfrac{1}{2} x . F d x = \frac{2}{15} (8 + 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} x + 3 \sin^4 \tfrac{1}{2} x) \sin \tfrac{1}{2} x . F - \frac{1}{30 k^2 \sqrt{2k}} \left\{ (1 - 12 k - 32 k^2) F(l, y) + \right.$$

$$\left. + 24 E(l, y) - \frac{1 + 13 k + k \cos x}{1 + k + k \cos x} 2 \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} - 2 \sqrt{2k} \right\}, \ldots \ldots \ldots (118)$$

$$\int \frac{\cos^4 \tfrac{1}{2} x}{\tan^2 \tfrac{1}{2} x} F d x = -\frac{15}{8} \varepsilon - \frac{1}{8} \left\{ 5 (4 + \cos x) + 4 \frac{(1 + \cos x)^2}{1 - \cos x} \right\} \sin x . F + 2 L \frac{2 (\Delta - \cos x)}{1 + \Delta} -$$

$$- \frac{1}{k} L \frac{k \cos x + \Delta}{1 + k} - \frac{9}{8 k^2} (1 - \Delta), \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (119)$$

$$\int \tan^2 \tfrac{1}{2} x . \sin^4 \tfrac{1}{2} x . F dx = -\frac{15}{8} \varepsilon + \frac{1}{8} \left\{ 5 (4 - \cos x) + 4 \frac{(1 - \cos x)^2}{1 + \cos x} \right\} \sin x . F - 2 L \frac{(\Delta - \cos x)(1 + \Delta)}{2 \sin^2 x} +$$

$$+ \frac{1}{k} L \frac{k \cos x + \Delta}{1 + k} - \frac{9}{8 k^2} (1 - \Delta). \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (120)$$

Verder zal het blijken, dat men nog de volgende integralen noodig heeft

$$\int F d x, \ldots . (41) \qquad \int \frac{\cos^2 x}{\tan x} F d x, \ldots . (40) \quad \text{en} \quad \int \tan^3 x . \cos^2 x . F d x, \ldots . (34)$$

$$\int \cot \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x . F d x, \ldots . (67) \qquad \int \tan^5 \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x . F d x, \ldots . (59)$$

$$\int \frac{d x}{\cos x} F, \ldots . (28) \qquad \int \frac{d x}{\cos \tfrac{1}{2} x} F. \ldots . (51)$$

13. Nu wij wederom al de benoodigde materialen gereed hebben, kunnen wij overgaan tot het afleiden der algemeene herleidingsformulen zelve, en wel door de toepassing telkens van het vroegere theorema (**a**), thans gebracht onder den vorm ($\boldsymbol{a}_1$). Langs dien weg levert de vergelijking (E_1)

$$p k^2 \left\{ \sin^p x . \cos x . F - \int F dx [p \sin^{p-1} x . \cos^2 x - \sin^{p+1} x] \right\} = - \sin^{p-1} x . \Delta + (p - 1) \left\{ \sin^{p-2} x . \cos x . F - \right.$$

$$\left. - \int F d x [(p - 2) \sin^{p-3} x . \cos^2 x - \sin^{p-1} x] \right\}.$$

Wanneer men den tweeledigen vorm onder het integraalteeken telkens aldus herleidt

$$A\sin^{a-1}x.\cos^2x-\sin^{a+1}x=A\sin^{a-1}x.(1-\sin^2x)-\sin^{a+1}x=A\sin^{a-1}x-(A+1)\sin^{a+1}x,$$

en daarna de p door $p-1$ vervangt, zoo komt er

$$\int\sin^px.Fdx=\frac{1}{p(p-1)k^2}\Big\{[(p-2)^2+(p-1)^2k^2]\int\sin^{p-2}x.Fdx-(p-2)(p-3)\int\sin^{p-4}x.Fdx-$$
$$-[1-(p-1)\Delta^2]\sin^{p-3}x.\cos x.F-\sin^{p-2}x.\Delta\Big\}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (XXIX)$$

Hierbij komen als eindintegralen bij evene p, voor $p=2$, de integralen (11), (41), (105) en (107); bij onevene p, voor $p=3$, de integralen (7) en (109).

De vergelijking (E_2) op dezelfde wijze behandeld, geeft ons

$$pk^2\Big\{\sin x.\cos^px.F-\int Fdx[\cos^{p+1}x-p\sin^2x.\cos^{p-1}x]\Big\}=$$
$$=1-\cos^{p-1}x.\Delta-(p-1)(1-k^2)\Big\{\sin x.\cos^{p-2}x.F-\int Fdx[\cos^{p-1}x-(p-2)\sin^2x.\cos^{p-3}x]\Big\};$$

en omdat

$$\cos^{a+1}x-A\sin^2x.\cos^{a-1}x=\cos^{a+1}x-A\cos^{a-1}x.(1-\cos^2x)=(A+1)\cos^{a+1}x-A\cos^ax$$

is, verkrijgt men daaruit, na verwisseling van p door $p-1$,

$$\int\cos^px.Fdx=\frac{1}{p(p-1)k^2}\Big\{[(p-1)^2k^2+(p-2)^2(1-k^2)]\int\cos^{p-2}x.Fdx-$$
$$-(p-2)(p-3)\int\cos^{p-4}x.Fdx-[1-k^2-(p-1)\Delta^2]\sin x.\cos^{p-3}x.F-1+\cos^{p-2}x.\Delta\Big\} \quad ..(XXX)$$

Bij evene waarden van p komen er hier, voor $p=2$, de integralen (8), (41), (106) en (108) als eindintegralen voor; terwijl er daarentegen bij onevene p, voor $p=3$, de integralen (6) en (110) dien rol vervullen.

Vervolgens geeft de vergelijking (E_3), wederom langs denzelfden weg,

$$(p-3)(1-k^2)\Big\{\tang^px.\cos^2x.F-\int Fdx[p\tang^{p-1}x-2\tang^px.\sin x.\cos x]\Big\}=\tang^{p-3}x.\Delta-$$
$$-[2(p-3)-(p-2)k^2]\Big\{\tang^{p-2}x.\cos^2x.F-\int Fdx[(p-2)\tang^{p-3}x-2\tang^{p-2}x.\sin x.\cos x]\Big\}-$$
$$-(p-3)\Big\{\tang^{p-4}x.\cos^2x.F-\int Fdx[(p-4)\tang^{p-5}x-2\tang^{p-4}x.\sin x.\cos x]\Big\}.$$

Hier heeft men nu de goniometrische herleiding noodig

$$A\, tang^{a-1}x - 2\, tang^{a} x . sin\, x . cos\, x = A\, tang^{a-1}x . cos^2 x . (1 + tang^2 x) - 2\, tang^{a} x . cos^2 x . tang\, x =$$
$$= (A - 2)\, tang^{a+1} x . cos^2 x + A\, tang^{a-1} x . cos^2 x .$$

Past men deze onder het integraalteeken overal toe, en stelt men daarop $p-1$ voor p in de plaats, zoo geeft de oplossing dezer vergelijking

$$\int tang^{p} x . cos^2 x . F dx = \frac{1}{(p-3)(p-4)(1-k^2)} \Big\{ -[(p-4)(3p-11)-(2p^2-13p+19)k^2] \int tang^{p-2} x . cos^2 x . F dx -$$
$$-[(3p-13)(p-4)-(p-3)^2 k^2] \int tang^{p-4} x . cos^2 x . F dx - (p-4)(p-5) \int tang^{p-6} x . cos^2 x . F dx +$$
$$+ [-cos^2 x + \{(p-4) + cos^2 x\} \Delta^2] \frac{tang^{p-5} x}{cos^2 x} F - tang^{p-4} x . \Delta \Big\}, \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(XXXI)}$$

waarbij nu de volgende eindintegralen behooren. Vooreerst, voor evene p, stelle men $p = 6$, dan verkrijgt men (112), (106), (105) en (111); daarna, voor onevene p, stelle men $p = 5$, en vindt alsdan de integralen (40), (1) en (34).

14. De volgende herleidingsvergelijkingen met het argument $\frac{1}{2} x$ kan men evenzoo behandelen. Zoo levert de formule (E_4) naar het theorema ($\boldsymbol{a}_1$)

$$(p-1) 4 k^2 \Big\{ sin^{p} \tfrac{1}{2} x . cos \tfrac{1}{2} x . F - \int F dx \frac{1}{2} [p\, sin^{p-1} \tfrac{1}{2} x . cos^2 \tfrac{1}{2} x - sin^{p+1} \tfrac{1}{2} x] \Big\} = 2 sin^{p-3} \tfrac{1}{2} x . \Delta +$$
$$+ (p-2) 4 k^2 \Big\{ sin^{p-2} \tfrac{1}{2} x . cos \tfrac{1}{2} x . F - \int F dx \frac{1}{2} [(p-2) sin^{p-3} \tfrac{1}{2} x . cos^2 \tfrac{1}{2} x - sin^{p-1} \tfrac{1}{2} x] \Big\} -$$
$$- (p-3) \Big\{ sin^{p-4} \tfrac{1}{2} x . cos \tfrac{1}{2} x . F - \int F dx \frac{1}{2} [(p-4) sin^{p-5} \tfrac{1}{2} x . cos^2 \tfrac{1}{2} x - sin^{p-3} \tfrac{1}{2} x] \Big\}.$$

Op den tweeledigen vorm onder het integraalteeken kan men nu de goniometrische herleiding toepassen

$$A\, sin^{a-2} \tfrac{1}{2} x . cos^2 \tfrac{1}{2} x - sin^{a} \tfrac{1}{2} x = A\, sin^{a-2} \tfrac{1}{2} x . (1 - sin^2 \tfrac{1}{2} x) - sin^{a} \tfrac{1}{2} x = A\, sin^{a-2} \tfrac{1}{2} x - (A+1)\, sin^{a} \tfrac{1}{2} x ;$$

daarbij blijkt wederom even als vroeger de noodzakelijkheid om de exponent p met de eenheid te verlagen, en alsdan kan men de gezochte integraal oplossen.

$$\int sin^p \tfrac{1}{2} x \,.\, F dx = \frac{1}{p(p-2)\,4k^2} \Big\{ (p-2)^2\, 8k^2 \int sin^{p-2} \tfrac{1}{2} x \,.\, F dx -$$

$$- [\,(p-4)^2 + (p-3)^2\, 4k^2\,] \int sin^{p-4} \tfrac{1}{2} x \,.\, F dx + (p-4)(p-5) \int sin^{p-6} \tfrac{1}{2} x \,.\, F dx +$$

$$+ [2(1-k^2) + 2k^2 \cos x - (p-2)\Delta^2]\, sin^{p-6} \tfrac{1}{2} x \,.\, \sin x \,.\, F + 4\, sin^{p-4} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta \Big\} \ldots \text{(XXXII)}$$

Wat de eindintegralen betreft, die bij deze formule behooren, moet men wederom onderscheid maken tusschen evene en onevene waarden van p. Is p even, dan stelle men $p = 4$, en men verkrijgt de integralen (22), (41), (103) en (115); is p daarentegen oneven, zoo stelle men $p = 7$, om tot de integralen (18), (113) en (117) te geraken.

Op dezelfde wijze verkrijgt men door de herleidingsformule (E_5) vooreerst

$$(p-1)4k^2 \Big\{ sin \tfrac{1}{2} x \,.\, cos^p \tfrac{1}{2} x \,.\, F - \int F dx \,\frac{1}{2}\, [cos^{p+1} \tfrac{1}{2} x - p\, sin^2 \tfrac{1}{2} x . cos^{p-1} \tfrac{1}{2} x] \Big\} = 2 - 2 cos^{p-3} \tfrac{1}{2} x . \Delta +$$

$$+ (p-2)4k^2 \Big\{ sin \tfrac{1}{2} x \,.\, cos^{p-2} \tfrac{1}{2} x \,.\, F - \int F dx \,\frac{1}{2}\, [cos^{p-1} \tfrac{1}{2} x - (p-2) sin^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, cos^{p-3} \tfrac{1}{2} x] \Big\} -$$

$$- (p-3) \Big\{ sin \tfrac{1}{2} x \,.\, cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x \,.\, F - \int F dx \,\frac{1}{2}\, [cos^{p-3} \tfrac{1}{2} x - (p-4)\, sin^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, cos^{p-5} \tfrac{1}{2} x] \Big\};$$

en, wanneer men hier onder het integraalteeken telkens de herleiding

$$cos^a \tfrac{1}{2} x - A\, sin^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, cos^{a-2} \tfrac{1}{2} x = cos^a \tfrac{1}{2} x - A cos^{a-2} \tfrac{1}{2} x \,.\, (1 - cos^2 \tfrac{1}{2} x) = (A+1) cos^a \tfrac{1}{2} x - A cos^{a-2} \tfrac{1}{2} x$$

toepast, en daarna de exponent p door $p - 1$ vervangt, vervolgens

$$\int cos^p \tfrac{1}{2} x \,.\, F dx = \frac{1}{p(p-2)\,4k^2} \Big\{ (p-2)^2\, 8k^2 \int cos^{p-2} \tfrac{1}{2} x \,.\, F dx -$$

$$- [\,(p-4)^2 + (p-3)^2\, 4k^2\,] \int cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x \,.\, F dx + (p-4)(p-5) \int cos^{p-6} \tfrac{1}{2} x \,.\, F dx -$$

$$- [2(1-k^2) - 2k^2 \cos x - (p-2)\Delta^2]\, cos^{p-6} \tfrac{1}{2} x \,.\, \sin x \,.\, F + 4 cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta - 4 \Big\} \ldots \text{(XXXIII)}$$

De eindintegralen, die bij deze herleidingsformule gebruikt moeten worden, vindt men als volgt. Bij evene waarden van p stelle men $p = 4$, en komt alsdan tot de integralen (19), (41), (104) en (116); bij onevene waarden van p moet men daarentegen $p = 7$ nemen, waardoor men tot de integralen (17), (114) en (118) wordt gevoerd.

Eindelijk behoort hiertoe nog de herleidingsformule (E_6), waaruit wordt afgeleid

$$(p-5)\left\{tang^p \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F - \int F dx \frac{1}{2}[p\, tang^{p-1}\tfrac{1}{2}x . cos^2 \tfrac{1}{2}x - 4\, tang^p \tfrac{1}{2}x . cos^3 \tfrac{1}{2}x . sin \tfrac{1}{2}x]\right\} =$$

$$= 2\, tang^{p-5} \tfrac{1}{2}x . \Delta - [3(p-5) - (p-6)4k^2]\left\{tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F -\right.$$

$$\left. - \int F dx \frac{1}{2}[(p-2)\, tang^{p-3}\tfrac{1}{2}x . cos^2 \tfrac{1}{2}x - 4\, tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x . cos^3 \tfrac{1}{2}x . sin \tfrac{1}{2}x]\right\} -$$

$$-[3(p-5)-(p-4)4k^2]\left\{tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F - \int F dx \frac{1}{2}[(p-4) tang^{p-5}\tfrac{1}{2}x . cos^2 \tfrac{1}{2}x -\right.$$

$$\left. - 4\, tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x . cos^3 \tfrac{1}{2}x . sin \tfrac{1}{2}x]\right\} - (p-5)\left\{tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F -\right.$$

$$\left. - \int F dx \frac{1}{2}[(p-6)\, tang^{p-7}\tfrac{1}{2}x . cos^2 \tfrac{1}{2}x - 4\, tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x . cos^3 \tfrac{1}{2}x . sin \tfrac{1}{2}x]\right\}.$$

Hier behoeft men de volgende goniometrische herleiding

$$A\, tang^{a-2}\tfrac{1}{2}x . cos^2 \tfrac{1}{2}x - 4\, tang^{a-1}\tfrac{1}{2}x . cos^3 \tfrac{1}{2}x . sin \tfrac{1}{2}x = A\, tang^{a-2}\tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . (1 + tang^2 \tfrac{1}{2}x) -$$
$$- 4\, tang^{a-1}\tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . tang \tfrac{1}{2}x = (A-4)\, tang^a \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x + A\, tang^{a-2}\tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x,$$

om die bij den vorm onder ieder integraalteeken te gebruiken; wanneer men daarna $p-1$ voor p in de plaats stelt, komt er

$$\int tang^p \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx = \frac{-1}{(p-5)(p-6)}\left\{[(p-6)(2p-11)-(p-7)^2 2k^2]2\int tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx +\right.$$

$$+ [3(p-6)^2 - (p^2 - 12p + 33)4k^2]\, 2\int tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx +$$

$$+ [(p-6)(2p-13) - (p-5)^2 2k^2]\, 2\int tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx +$$

$$+ (p-6)(p-7)\int tang^{p-8}\tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx + [cos\, x - (p-6+cos\, x)\Delta^2]\frac{4}{sin\, x} tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x . F +$$

$$\left. + 4\, tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x . \Delta \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(XXXIV)}$$

Voor de bij deze herleidingsformule behoorende eindintegralen moet men weder onderscheid maken tusschen evene en onevene waarden von den exponent p. Heeft deze eene evene waarde, zoo stelle men $p = 8$ en vindt dan de integralen (119), (116), (120), (115); is die waarde evenwel oneven, zoo voert

*

de onderstelling $p = 7$ tot de integralen (67), (15), (14) en (59) als eindintegralen.

15. Er blijven nog de twee laatste der herleidingsformulen (E) ter behandeling over. Past men op de eerste daarvan (E_7) het bekende theorema ($\boldsymbol{a}_1$) toe, dan verkrijgt men

$$(p-1)(1-k^2)\left\{\frac{\sin x}{\cos^p x}F - \int F\,dx\left[\frac{1}{\cos^{p-1} x} + p\,\frac{\sin^2 x}{\cos^{p+1} x}\right]\right\} = \frac{\Delta}{\cos^{p-1} x} - 1 -$$

$$-(p-2)k^2\left\{\frac{\sin x}{\cos^{p-2} x}F - \int F\,dx\left[\frac{1}{\cos^{p-3} x} + (p-2)\frac{\sin^2 x}{\cos^{p-1} x}\right]\right\};$$

of, omdat

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^a x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^a x} = \frac{1}{\cos^a x} - \frac{1}{\cos^{a-2} x}$$

is, wanneer men later p vervangt door $p-1$,

$$\int\frac{dx}{\cos^p x}F = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)}\left\{[(p-2)^2 - (2p^2-10p+13)k^2]\int\frac{dx}{\cos^{p-2} x}F + \right.$$

$$\left. +(p-3)(p-4)\int\frac{dx}{\cos^{p-4} x}F + [(1-k^2)+(p-3)\Delta^2]\frac{\sin x}{\cos^{p-1} x}F - \frac{\Delta}{\cos^{p-2} x} + 1\right\}; \quad \ldots \text{(XXXV)}$$

waarbij als eindintegralen te voorschijn treden, bij evene waarden van p, voor $p = 4$, de integralen (41) en (8) en bij onevene waarden van p, voor $p = 3$, de integralen (6) en (28).

Ten slotte gebruike men bij de herleidingsformule (E_8) hetzelfde theorema ($\boldsymbol{a}_1$), dan wordt

$$(p-1)\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^p\frac{1}{2}x}F - \int F\,dx\,\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x} + p\,\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{\cos^{p+1}\frac{1}{2}x}\right]\right\} = \frac{2\Delta}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x} - 2 +$$

$$+(p-2)4k^2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}F - \int F\,dx\,\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\cos^{p-3}\frac{1}{2}x} + (p-2)\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}\right]\right\} -$$

$$-(p-3)4k^2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x} - \int F\,dx\,\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\cos^{p-5}\frac{1}{2}x} + (p-4)\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{\cos^{p-3}\frac{1}{2}x}\right]\right\}.$$

Hier passe men de goniometrische herleiding

$$\frac{\sin^2 \frac{1}{2} x}{\cos^a \frac{1}{2} x} = \frac{1 - \cos^2 \frac{1}{2} x}{\cos^a \frac{1}{2} x} = \frac{1}{\cos^a \frac{1}{2} x} - \frac{1}{\cos^{a-2} \frac{1}{2} x}$$

toe, en vermindere vervolgens den exponent p met de eenheid; dan geeft eene eenvoudige oplossing

$$\int \frac{dx}{\cos^p \frac{1}{2} x} F = \frac{1}{(p-1)(p-2)} \Big\{ [(p-2)^2 + (p-3)^2 \, 4 k^2] \int \frac{dx}{\cos^{p-2} \frac{1}{2} x} F -$$
$$- (p-4)^2 \, 8 k^2 \int \frac{dx}{\cos^{p-4} \frac{1}{2} x} F + (p-4)(p-6) \, 4 k^2 \int \frac{dx}{\cos^{p-6} \frac{1}{2} x} F + [2(1-k^2) -$$
$$- 2 k^2 \cos x + (p-4) \Delta^2] \frac{\sin x}{\cos^p \frac{1}{2} x} F - \frac{4 \Delta}{\cos^{p-2} \frac{1}{2} x} + 4 \Big\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(XXXVI)}$$

Al weder moet men bij de bepaling der eindintegralen onderscheid maken tusschen de gevallen, dat de exponent p even of oneven zij; bij evene waarden van p, stelle men $p = 4$ en vindt dan de integralen (104), (41) en (19); maar bij onevene waarden van p, verkrijgt men voor $p = 3$ de integralen (114), (17) en (51) voor dat doel.

Hierbij zullen wij het onderzoek omtrent de integralen van dit hoofdstuk staken; en met name het theorema (*b*) niet op deze herleidingsformulen (E) van het Eerste hoofdstuk toepassen.

TAFELS 35—69.

AANMERKINGEN.

De integralen zijn genomen tusschen de grenzen 0 en x.

$$\Delta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}, \qquad F = \int_0^x \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \qquad E = \int_0^x d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}.$$

Verder is bij $\Delta(l,y)$, $F(l,y)$, $E(l,y)$ en $\Delta(l,z)$, $F(l,z)$, $E(l,z)$,

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} y = \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, \sqrt{2k}, \qquad l^2 = \frac{1}{2}(1 + k),$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} z = \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \sqrt{2k}, \qquad r = \frac{1}{8k}(1 + 2k)^2.$$

Er komen als nieuwe transcendenten

$$\alpha = \int \frac{dx}{\cos x} F, \qquad \eta = \int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} F,$$

$$\beta = \int \frac{dx}{\sin x} F, \qquad \theta = \int \cos x \,.\, F \frac{dx}{\Delta},$$

$$\gamma = \int \frac{\sin x}{\cos x} F dx, \qquad \iota = \int \sin x \,.\, \cos x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^2},$$

$$\delta = \int \frac{\cos x}{\sin x} F dx, \qquad \varkappa = \int \cos x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^2},$$

$$\varepsilon = \int F dx, \qquad \lambda = \int \sin x \,.\, F \frac{dx}{\Delta},$$

$$\zeta = \int \frac{dx}{\cos \frac{1}{2} x} F, \qquad \mu = \int \sin x \,.\, F \frac{dx}{\Delta^2}.$$

TAFEL 35.

$$\int \sin^p x \,.\, F dx = \frac{1}{p(p-1)k^2}\Big\{ [(p-2)^2 + (p-1)^2 k^2] \int \sin^{p-2} x \,.\, F dx -$$

$$- (p-2)(p-3) \int \sin^{p-4} x \,.\, F dx - [1-(p-1)\Delta^2] \sin^{p-3} x \,.\, \cos x \,.\, F - \sin^{p-2} x \,.\, \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} F = - \cot x \,.\, F + L \frac{2 \sin x}{1+\Delta}. \qquad \int \frac{dx}{\sin x} F = \beta. \qquad \int F dx = \varepsilon.$$

$$\int \sin x \,.\, F dx = - \cos x \,.\, F + \frac{1}{k} Bg \sin (k \sin x).$$

$$\int \sin^2 x \,.\, F dx = \frac{1}{2} \Big\{ \varepsilon - \sin x \,.\, \cos x \,.\, F + \frac{1}{k^2}(1-\Delta) \Big\}.$$

$$\int \sin^3 x \,.\, F dx = \frac{1}{6k^3} \Big\{ -(2+\sin^2 x)\, 2k^3 \cos x \,.\, F + (1+4k^2)\, Bg \sin(k \sin x) - k \sin x \,.\, \Delta \Big\}.$$

$$\int \sin^4 x . F dx = \frac{1}{8}\Big\{ 3\varepsilon - (3+2\sin^2 x) \sin x \,.\, \cos x \,.\, F + \frac{1}{3k^4}(1-\Delta)(4-2\Delta-2\Delta^2+9k^2) \Big\}.$$

TAFEL 36.

$$\int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, F dx = \frac{1}{p(p+1)k^2}\Big\{ (p-1)^2 (1+k^2) \int \sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, F dx -$$

$$- (p-2)(p-3) \int \sin^{p-4} x . \cos x . F dx - [\cos^2 x + (1 - p\cos^2 x)\Delta^2] \sin^{p-3} x . F - \sin^{p-2} x . \cos x . \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} F dx = - \frac{1}{\sin x} F + L \frac{\Delta - \cos x}{\sin x}. \qquad \int \frac{\cos x}{\sin x} F dx = \delta. \qquad \int \cos x . F dx = \sin x . F + \frac{1}{k} L \frac{k \cos x + \Delta}{1+k}.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos x \,.\, F dx = \frac{1}{2k^2} \{ E - \Delta^2 . F \}.$$

$$\int \sin^2 x \,.\, \cos x \,.\, F dx = \frac{1}{6k^2}\Big\{ 2k^2 \sin^3 x \,.\, F + \frac{1}{k}(1+k^2)\, L \frac{k \cos x + \Delta}{1+k} - \cos x \,.\, \Delta + 1 \Big\}.$$

$$\int \sin^3 x \,.\, \cos x \,.\, F dx = \frac{1}{12k^4} \{ (1+k^2)\, 2E - (2+k^2-3k^4 \sin^4 x)\, F - k^2 \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \}.$$

TAFEL 37.

$$\int \sin^p x\,.\,F\frac{dx}{\cos x}=\frac{1}{(p-1)(p-2)k^2}\Big\{[(p-3)^2+(2p^2-9p+11)k^2]\int \sin^{p-2}x\,.\,F\frac{dx}{\cos x}-$$

$$-[(2p^2-15p+29)+(p-3)^2k^2]\int \sin^{p-4}x\,.\,F\frac{dx}{\cos x}+(p-4)(p-5)\int \sin^{p-6}x\,.\,F\frac{dx}{\cos x}+$$

$$+[\cos^2 x+\{1-(p-2)\cos^2 x\}\Delta^2]\sin^{p-5}x\,.\,F+\sin^{p-4}x\,.\cos x\,.\,\Delta\Big\}.$$

$$\int\frac{dx}{\sin x.\cos x}F=\gamma+\delta.\quad \int\frac{dx}{\cos x}F=\alpha.\quad \int\frac{\sin x}{\cos x}Fdx=\gamma.\quad \int\frac{\sin^2 x}{\cos x}Fdx=\alpha-\sin x.F-\frac{1}{k}L\frac{k\cos x+\Delta}{1+k}.$$

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos x}F\,dx=\gamma-\frac{1}{2k^2}\{E-\Delta^2.F\}.$$

$$\int\frac{\sin^4 x}{\cos x}F\,dx=\alpha-\frac{1}{6k^2}\Big\{(3+\sin^2 x)\,2k^2\sin x\,.\,F+\frac{1}{k}(1+7k^2)L\frac{k\cos x+\Delta}{1+k}-\cos x\,.\,\Delta+1\Big\}.$$

TAFEL 38.

$$\int \sin^p x\,.\cos x\,.\,\Delta\,.\,F\,dx=\frac{1}{(p+2)k^2}\Big\{(p-1)\int \sin^{p-2}x\,.\cos x\,.\,\Delta\,.\,F\,dx-$$

$$-\sin^{p-1}x\,.\,\Delta^3\,.\,F+\int \sin^{p-1}x.\Delta^2\,dx\Big\}.$$

$$\int\frac{\cos x}{\sin^4 x}\Delta\,.\,F\,dx=\frac{1}{3}\Big\{-\frac{1}{\sin^3 x}\Delta^3\,.\,F-\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{1}{2}(1-2k^2)\,L\,tang\,\tfrac{1}{2}x\Big\}.$$

$$\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}\Delta\,.\,F\,dx=-k^2\theta-\frac{1}{\sin x}\Delta\,.\,F+L\,tang\,\tfrac{1}{2}x.$$

$$\int \sin x\,.\cos x\,.\,\Delta\,.\,F\,dx=\frac{1}{6k^2}\{(2-k^2)\,x+k^2\sin x\,.\cos x-2\Delta^3\,.\,F\}.$$

TAFEL 39.

$$\int \sin^p x\,.\cos x\,.\,F\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{pk^2}\Big\{(p-1)\int \sin^{p-2}x\,.\cos x\,.\,F\frac{dx}{\Delta}-\sin^{p-1}x\,.\,\Delta\,.\,F+\int \sin^{p-1}x\,dx\Big\}.$$

$$\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}F\frac{dx}{\Delta}=-\frac{\Delta}{\sin x}F+L\,tang\,\tfrac{1}{2}x.\quad \int \cos x\,.\,F\frac{dx}{\Delta}=\theta.\quad \int \sin x\,.\cos x.F\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{k^2}\{x-\Delta.F\}.$$

TAFEL 40.

$$\int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{(p-1)k^2}\left\{(p-1)\int \sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^2} - \sin^{p-1} x \,.\, F + \int \sin^{p-1} x\frac{dx}{\Delta^2}\right\}.$$

$$\int \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^2} = \varkappa \qquad \int \sin x . \cos x . F\frac{dx}{\Delta^2} = \iota. \qquad \int \sin^2 x . \cos x . F\frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{k^2}\left\{\varkappa - \sin x . F - \frac{1}{k}L\frac{\Delta + k\cos x}{1+k}\right\}.$$

$$\int \sin^3 x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{2k^4}\left\{\Delta^2 . F - E + 2k^2\iota\right\}.$$

TAFEL 41.

$$\int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{(p-2)k^2}\left\{(p-1)\int \sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^3} - \sin^{p-1} x\frac{F}{\Delta} + \int \sin^{p-1} x\frac{dx}{\Delta^2}\right\}.$$

$$\int \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{\sin x}{\Delta}F - \frac{1}{k\sqrt{1-k^2}}\, Bg\cos\frac{1-k^2(1-\cos x)}{\Delta}.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2}\left\{\frac{F}{\Delta} - \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\, Bg\,tang\left(tang\, x \,.\sqrt{1-k^2}\right)\right\}.$$

$$\int \sin^2 x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2}\left\{-\theta + \frac{\sin x}{\Delta}F - \frac{1}{k\sqrt{1-k^2}}\, Bg\sin\frac{1-k^2(1-\cos x)}{\Delta}\right\}.$$

TAFEL 42.

$$\int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{(p-3)k^2}\left\{(p-1)\int \sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^4} - \sin^{p-1} x\frac{F}{\Delta^2} + \int \sin^{p-1} x\frac{dx}{\Delta^3}\right\}.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2k^2(1-k^2)}\left\{\frac{1-k^2}{\Delta^2}F - E + \frac{k^2}{\Delta}\sin x \,.\, \cos x\right\}.$$

$$\int \sin^2 x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2k^2}\left\{-\varkappa + \frac{\sin x}{\Delta^2}F + \frac{\cos x - \Delta}{(1-k^2)\Delta}\right\}.$$

$$\int \sin^3 x \,.\, \cos x \,.\, F\frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2k^4}\left\{\frac{1}{\Delta^2}F - \frac{1}{1-k^2}E + \frac{k^2\sin x \,.\, \cos x}{(1-k^2)\Delta} - 2k^2\iota\right\}.$$

---

*

TAFEL 43.

$$\int \cos^p x \,.\, F\,dx = \frac{1}{p\,(p-1)\,k^2}\Big\{[(p-1)^2 k^2 + (p-2)^2(1-k^2)]\int \cos^{p-2}x \,.\, F\,dx -$$

$$-(p-2)(p-3)\int \cos^{p-4}x \,.\, F\,dx - [(1-k^2)-(p-1)\Delta^2]\sin x \,.\, \cos^{p-3}x \,.\, F - 1 + \cos^{p-2}x \,.\, \Delta\Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}F = \operatorname{tang} x \,.\, F + \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\,L\,\frac{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x}{\sqrt{1-k^2}+\Delta}. \qquad \int \frac{dx}{\cos x}F = \alpha.$$

$$\int F\,dx = \varepsilon. \qquad \int \cos x \,.\, F\,dx = \sin x \,.\, F + \frac{1}{k}\,L\,\frac{k\cos x + \Delta}{1+k}.$$

$$\int \cos^2 x \,.\, F\,dx = \frac{1}{2}\Big\{\varepsilon + \sin x \,.\, \cos x \,.\, F - \frac{1}{k^2}(1-\Delta)\Big\}.$$

$$\int \cos^3 x \,.\, F\,dx = \frac{1}{6\,k^3}\Big\{(2+\cos^2 x)\,2\,k^3 \sin x \,.\, F - (1-5\,k^2)\,L\,\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} - k + k\cos x \,.\, \Delta\Big\}.$$

$$\int \cos^4 x \,.\, F\,dx = \frac{1}{8}\Big\{3\,\varepsilon + (3+2\cos^2 x)\sin x \,.\, \cos x \,.\, F + \frac{1}{3\,k^4}(1-\Delta)(4-2\,\Delta-2\,\Delta^2-15\,k^2)\Big\}.$$

TAFEL 44.

$$\int \sin x \,.\, \cos^p x \,.\, F\,dx = \frac{1}{p\,(p+1)\,k^2}\Big\{-(p-1)^2(1-2\,k^2)\int \sin x \,.\, \cos^{p-2}x \,.\, F\,dx +$$

$$+(p-2)(p-3)(1-k^2)\int \sin x . \cos^{p-4}x . F dx + [\cos^2 x - (2-p\sin^2 x)\Delta^2]\cos^{p-3}x . F + \sin x . \cos^{p-2}x . \Delta\Big\}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}F\,dx = \frac{1}{\cos x}F - \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\,L\,\frac{\sqrt{1-k^2}\sin x + \Delta}{\cos x}. \qquad \int \frac{\sin x}{\cos x}F\,dx = \gamma.$$

$$\int \sin x \,.\, F\,dx = -\cos x \,.\, F + \frac{1}{k}Bg\sin(k\sin x). \qquad \int \sin x \,.\, \cos x \,.\, F\,dx = \frac{1}{2\,k^2}\{E - \Delta^2 \,.\, F\}.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, F\,dx = \frac{1}{6\,k^2}\Big\{-2\,k^2\cos^3 x \,.\, F - \frac{1}{k}(1-2\,k^2)\,Bg\sin(k\sin x) + \sin x \,.\, \Delta\Big\}.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos^3 x \,.\, F\,dx = \frac{1}{12\,k^4}\{[(2-5k^2)+(1+\cos^2 x)3k^4\sin^2 x]F - (1-2k^2)2E + k^2 \sin x . \cos x . \Delta\}.$$

TAFEL 45.

$$\int \cos^p x \,.\, F \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{(p-1)(p-2)k^2} \Big\{ -[(p-3)^2+(3p^2-15p+20)k^2] \int \cos^{p-2} x \,.\, F \frac{dx}{\sin x} +$$

$$+ [(2p^2-15p+29)-(3p^2-21p+38)k^2] \int \cos^{p-4} x \,.\, F \frac{dx}{\sin x} -$$

$$-(p-4)(p-5)(1-k^2) \int \cos^{p-6} x . F \frac{dx}{\sin x} - [\cos^2 x - \{2-(p-2)\sin^2 x\} \Delta^2] \cos^{p-5} x . F - \sin x . \cos^{p-4} x . \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \,.\, \cos x} F = \gamma + \delta. \qquad \int \frac{dx}{\sin x} F = \beta. \qquad \int \frac{\cos x}{\sin x} F\, dx = \delta.$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} F\, dx = \beta + \cos x \,.\, F - \frac{1}{k} Bg \sin(k \sin x). \qquad \int \frac{\cos^3 x}{\sin x} F\, dx = \delta - \frac{1}{2k^2} \{E - \Delta^2 . F\}.$$

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin x} F\, dx = \beta + \frac{1}{6k^2} \Big\{ (3+\cos^2 x)\, 2k^2 \cos x \,.\, F + \frac{1}{k}(1-8k^2)\, Bg \sin(k \sin x) - \sin x \,.\, \Delta \Big\}.$$

TAFEL 46.

$$\int \sin x \,.\, \cos^p x \,.\, \Delta \,.\, F dx = \frac{1}{(p+2)k^2} \Big\{ -(p-1)(1-k^2) \int \sin x \,.\, \cos^{p-2} x \,.\, \Delta \,.\, F dx -$$

$$- \cos^{p-1} x \,.\, \Delta^3 \,.\, F + \int \cos^{p-1} x \,.\, \Delta^3 dx \Big\}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} \Delta \,.\, F dx = \frac{1}{3(1-k^2)} \Big\{ \frac{\Delta^3}{\cos^3 x} F - \frac{1}{2}(1-k^2) \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}(1+k^2)\, L\, tang\, (\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x) \Big\}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Delta \,.\, F dx = k^2 \lambda + \frac{\Delta}{\cos x} F - L\, tang\, (\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x).$$

$$\int \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \,.\, F dx = \frac{1}{6k^2} \{(2-k^2)x + k^2 \sin x \,.\, \cos x - 2\Delta^3 \,.\, F\}.$$

TAFEL 47.

$$\int sin\,x\,.\,cos^p x\,.\,F\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{p\,k^2}\left\{-(p-1)(1-k^2)\int sin\,x.cos^{p-2}x.F\frac{dx}{\Delta}-cos^{p-1}x.\Delta.F+\int cos^{p-1}x dx\right\}.$$

$$\int\frac{sin\,x}{cos^2 x}F\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{1-k^2}\left\{\frac{\Delta}{cos x}F-Ltang(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x)\right\}.\quad \int sinx.F\frac{dx}{\Delta}=\lambda.\quad \int sinx.cosx.F\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{k^2}\{x-\Delta.F\}.$$

TAFEL 48.

$$\int sinx.cos^p x.F\frac{dx}{\Delta^2}=\frac{1}{(p-1)k^2}\left\{-(p-1)(1-k^2)\int sinx.cos^{p-2}x.F\frac{dx}{\Delta^2}-cos^{p-1}x.F+\int cos^{p-1}x\frac{dx}{\Delta}\right\}.$$

$$\int sin\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^2}=\mu. \qquad \int sin\,x\,.\,cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^2}=\iota.$$

$$\int sin\,x\,.\,cos^2 x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^2}=\frac{1}{k^2}\left\{-(1-k^2)\,\mu-cos\,x\,.\,F+\frac{1}{k}\,Bg\,sin\,(k\,sin\,x)\right\}.$$

$$\int sin\,x\,.\,cos^3 x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^2}=\frac{1}{2\,k^4}\{-\Delta^2.F+E-2\,(1-k^2)\,k^2\,\iota\}$$

TAFEL 49.

$$\int sinx.cos^p x.F\frac{dx}{\Delta^3}=\frac{1}{(p-2)k^2}\left\{-(p-1)(1-k^2)\int sinx.cos^{p-2}x.F\frac{dx}{\Delta^3}-\frac{cos^{p-1}x}{\Delta}F+\int cos^{p-1}x\frac{dx}{\Delta^2}\right\}.$$

$$\int sin\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^3}=\frac{1}{1-k^2}\left\{-\frac{cos\,x}{\Delta}F+\frac{1}{2\,k}L\frac{1-k\,sin\,x}{1+k\,sin\,x}\right\}.$$

$$\int sin\,x\,.\,cos\,x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^3}=\frac{1}{k^2}\left\{\frac{1}{\Delta}F-\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\,Bg\,tang\,(tang\,x.\sqrt{1-k^2})\right\}.$$

$$\int sin\,x\,.\,cos^2 x\,.\,F\frac{dx}{\Delta^3}=\frac{1}{k^2}\left\{\lambda+\frac{cos\,x}{\Delta}F-\frac{1}{2\,k}L\frac{1-k\,sin\,x}{1+k\,sin\,x}\right\}.$$

TAFEL 50.

$$\int sin x . cos^p x . F\frac{dx}{\Delta^4}=\frac{1}{(p-3)k^2}\left\{-(p-1)(1-k^2)\int sin x . cos^{p-2} x . F\frac{dx}{\Delta^4}-\frac{cos^{p-1} x}{\Delta^2}F+\int cos^{p-1} x\frac{dx}{\Delta^3}\right\}.$$

$$\int sin\, x . cos\, x . F\frac{dx}{\Delta^4}=\frac{1}{2k^2(1-k^2)}\left\{\frac{1-k^2}{\Delta^2}F-E+\frac{k^2}{\Delta}sin\, x . cos\, x\right\}.$$

$$\int sin\, x . cos^2 x . F\frac{dx}{\Delta^4}=\frac{1}{2k^2}\left\{\mu+\frac{cos\, x}{\Delta^2}F-\frac{sin\, x}{\Delta}\right\}.$$

$$\int sin\, x . cos^3 x . F\frac{dx}{\Delta^4}=\frac{1}{2k^4}\left\{-\frac{1-k^2}{\Delta^2}F+E-\frac{k^2 sin\, x . cos\, x}{\Delta}+2k^2\iota\right\}.$$

TAFEL 51.

$$\int tang^p x . F dx=\frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)}\left\{-[(2p^2-15p+20)-(2p^2-15p+12)k^2]\int tang^{p-2} x . F dx-\right.$$

$$-[(3p^2-21p+38)-(p-3)^2k^2]\int tang^{p-4} x . F dx-(p-4)(p-5)\int tang^{p-6} x . F dx-$$

$$\left.-[cos^2 x-(p-2-cos^2 x)\Delta^2]\frac{tang^{p-5} x}{cos^4 x}F-\frac{tang^{p-4} x}{cos^2 x}\Delta\right\}.$$

$$\int\frac{dx}{tang\, x}F=\delta. \qquad \int F dx=\varepsilon. \qquad \int tang\, x . F dx=\gamma.$$

$$\int tang^2 x . F dx=-\varepsilon+tang\, x . F+\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}L\frac{(1+\sqrt{1-k^2})\, cos\, x}{\sqrt{1-k^2}+\Delta}.$$

$$\int tang^3 x . F dx=-\gamma+\frac{1}{2(1-k^2)}\{E+(1-k^2)\, tang\, x . F-tang^2 x . \Delta\}.$$

$$\int tang^4 x . F dx=\varepsilon-\frac{1}{6(1-k^2)}\left\{(3-tang^2 x)(1-k^2)2 tang\, x . F+\frac{8-7k^2}{\sqrt{1-k^2}}L\frac{(1+\sqrt{1-k^2})cos\, x}{\sqrt{1-k^2}+\Delta}+\frac{1}{cos^2 x}\Delta-1\right\}.$$

TAFEL 52.

$$\int tang^p x \,.\, F \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{p(p+1)(1-k^2)} \Big\{ -(p-1)^2 (2-k^2) \int tang^{p-2} x \,.\, F \frac{dx}{\cos^2 x} -$$

$$-(p-2)(p-3) \int tang^{p-4} x \,.\, F \frac{dx}{\cos^2 x} - [\cos^2 x - (p - \cos^2 x)\Delta^2] \frac{tang^{p-3} x}{\cos^4 x} F - \frac{tang^p x}{\sin^2 x} \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{1}{tang^2 x} F \frac{dx}{\cos^2 x} = -\cot x \,.\, F + L \frac{2 \sin x}{1+\Delta}. \qquad \int \frac{1}{tang\, x} F \frac{dx}{\cos^2 x} = \gamma + \delta.$$

$$\int F \frac{dx}{\cos^2 x} = tang\, x \,.\, F + \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{(1+\sqrt{1-k^2}) \cos x}{\sqrt{1-k^2}+\Delta}.$$

$$\int tang\, x \,.\, F \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{2(1-k^2)} \{ E + (1-k^2)\, tang\, x \,.\, F - tang^2 x \,.\, \Delta \}.$$

$$\int tang^2 x \,.\, F \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{6(1-k^2)} \Big\{ 2(1-k^2) tang^3 x . F - \frac{2-k^2}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x}{\sqrt{1-k^2}+\Delta} + 1 - \frac{1}{\cos^2 x} \Delta \Big\}.$$

$$\int tang^3 x \,.\, F \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{12(1-k^2)^2} \{ [1 + (1-k^2)\, 3\, tang^4 x\,] (1-k^2) F -$$

$$-(2-k^2)\, 2E + [(3-k^2) - (1-k^2)\, tang^2 x]\, tang\, x \,.\, \Delta \}.$$

TAFEL 53.

$$\int tang^p x . \cos^2 x . F dx = \frac{1}{(p-3)(p-4)(1-k^2)} \Big\{ -[(p-4)(3p-11)-(3p^2-13p+19)k^2] \int tang^{p-2} x . \cos^2 x . F dx -$$

$$-[(3p-13)(p-4)-(p-3)^2 k^2] \int tang^{p-4} x . \cos^2 x . F dx - (p-4)(p-5) \int tang^{p-6} x . \cos^2 x . F dx -$$

$$-[\cos^2 x - \{(p-4) + \cos^2 x\}\, \Delta^2] \frac{tang^{p-5} x}{\cos^2 x} F - tang^{p-4} x \,.\, \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{1}{tg^2 x} \cos^2 x . F dx = -\frac{3}{2}\varepsilon - (2+\sin^2 x) \frac{1}{2} \cot x . F + L \frac{2 \sin x}{1+\Delta} + \frac{1}{2k^2}(1-\Delta). \qquad \int \frac{1}{tg x} \cos^2 x . F dx = \delta - \frac{1}{2k^2} \{ E - \Delta^2 . F \}.$$

$$\int \cos^2 x \,.\, F dx = \frac{1}{2} \Big\{ \varepsilon + \sin x \,.\, \cos x \,.\, F - \frac{1}{k^2}(1-\Delta) \Big\}. \qquad \int tang\, x \,.\, \cos^2 x . E dx = \frac{1}{2k^2} \{ E - \Delta^2 . F \}.$$

$$\int tang^2 x \,.\, \cos^2 x \,.\, F dx = \frac{1}{2} \Big\{ \varepsilon - \sin x \,.\, \cos x \,.\, F + \frac{1}{k^2}(1-\Delta) \Big\}.$$

$$\int tang^3 x \,.\, \cos^2 x \,.\, F dx = \gamma - \frac{1}{2k^2} \{ E - \Delta^2 \,.\, F \}.$$

$$\int tang^4 x . \cos^2 x . F dx = -\frac{3}{2}\varepsilon + (2+\cos^2 x) \frac{1}{2} tang x . F - \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x} - \frac{1}{2k^2}(1-\Delta).$$

TAFEL 54.

$$\int \frac{dx}{\cos^p x} F = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)} \Big\{ [(p-2)^2 - (2p^2 - 10p + 13)k^2] \int \frac{dx}{\cos^{p-2} x} F +$$

$$+ (p-3)(p-4) \int \frac{dx}{\cos^{p-4} x} F + [(1-k^2) + (p-3)\Delta^2] \frac{\sin x}{\cos^{p-1} x} F - \frac{\Delta}{\cos^{p-2} x} + 1 \Big\}.$$

$$\int \cos x \,.\, F dx = \sin x \,.\, F + \frac{1}{k} L \frac{k \cos x + \Delta}{1 + k}. \qquad \int F dx = \varepsilon. \qquad \int \frac{dx}{\cos x} F = \alpha.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} F = \operatorname{tang} x \,.\, F + \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{(1 + \sqrt{1-k^2}) \cos x}{\sqrt{1-k^2} + \Delta}.$$

TAFEL 55.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^p x} F dx = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)} \Big\{ (p-3)^2 (1 - 2k^2) \int \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x} F dx +$$

$$+ (p-4)(p-5)k^2 \int \frac{\sin x}{\cos^{p-4} x} F dx - [\cos^2 x - \{2 + (p-4)\sin^2 x\} \Delta^2] \frac{1}{\cos^{p-1} x} F - \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x} \Delta \Big\}.$$

$$\int \sin x \,.\, F dx = -\cos x \,.\, F + \frac{1}{k} Bg \sin (k \sin x). \qquad \int \frac{\sin x}{\cos x} F dx = \gamma.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} F dx = \frac{1}{\cos x} F - \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} L \frac{\sqrt{1-k^2} \sin x + \Delta}{\cos x}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} F dx = \frac{1}{2(1-k^2)} \{E + (1-k^2) \operatorname{tang} x \,.\, F - \operatorname{tang}^2 x \,.\, \Delta\}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} F dx = \frac{1}{12(1-k^2)^2} \Big\{ (1 - 2k^2) 2E + [1 + 6(1-k^2) \operatorname{tang}^2 x +$$

$$+ 3(1-k^2) \operatorname{tang}^4 x] (1-k^2) F - [(1-k^2) + (1-2k^2) 2 \cos^2 x] \frac{\sin x}{\cos^3 x} \Delta \Big\}.$$

TAFEL 56.

$$\int\frac{dx}{\sin x.\cos^p x}F=\frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)}\Big\{-[(2p^2-9p+11)-(3p^2-15p+20)k^2]\int\frac{dx}{\sin x.\cos^{p-2}x}F-$$

$$-[(p-3)^2-(3p^2-21p+38)k^2]\int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^{p-4}x}F-(p-4)(p-5)k^2\int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^{p-6}x}F-$$

$$-[\cos^2 x+\{2+(p-4)\sin^2 x\}\Delta^2]\frac{1}{\cos^{p-1}x}F-\frac{\sin x}{\cos^{p-2}x}\Delta\Big\}.$$

$$\int\frac{\cos^3 x}{\sin x}F\,dx=\delta-\frac{1}{2k^2}\{E-\Delta^2.F\}.\qquad \int\frac{\cos^2 x}{\sin x}F\,dx=\beta+\cos x\,.F-\frac{1}{k}Bg\sin(k\sin x).$$

$$\int\frac{\cos x}{\sin x}F\,dx=\delta.\qquad \int\frac{dx}{\sin x}F=\beta.$$

$$\int\frac{dx}{\sin x\,.\cos x}F=\gamma+\delta.\quad \int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^2 x}F=\beta+\frac{1}{\cos x}F-\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}L\frac{\sqrt{1-k^2}\sin x+\Delta}{\cos x}.$$

TAFEL 57.

$$\int\sin^p\tfrac{1}{2}x.F\,dx=\frac{1}{p(p-2)4k^2}\Big\{(p-2)^2 8k^2\int\sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x.F\,dx-[(p-4)^2+(p-3)^2 4k^2]\int\sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x.F\,dx+$$

$$+(p-4)(p-5)\int\sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x.F\,dx+[2(1-k^2)+2k^2\cos x-(p-2)\Delta^2]\sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x.\sin x.F+4\sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x.\Delta\Big\}.$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2\frac{1}{2}x}F=-2\cot\tfrac{1}{2}x.F+2L\frac{2(\Delta-\cos x)}{1+\Delta}.\qquad \int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x}F=\eta.\qquad \int F\,dx=\varepsilon.$$

$$\int\sin\tfrac{1}{2}x\,.F\,dx=-2\cos\tfrac{1}{2}x\,.F+\frac{2}{\sqrt{2k}}F(l,z).$$

$$\int\sin^2\tfrac{1}{2}x\,.F\,dx=\frac{1}{2}\Big(\varepsilon-\sin x\,.F-\frac{1}{k}L\frac{k\cos x+\Delta}{1+k}\Big).$$

$$\int\sin^3\tfrac{1}{2}x\,.F\,dx=-\frac{1}{3}(5-\cos x)\cos\tfrac{1}{2}x.F+\frac{1}{3k\sqrt{2k}}\Big\{(1+4k)F(l,z)-2E(l,z)+\frac{2\sin\frac{1}{2}x.\sqrt{2k}}{1+k-k\cos x}\Delta\Big\}.$$

$$\int\sin^4\tfrac{1}{2}x\,.F\,dx=\frac{1}{8}\Big\{3\varepsilon-(4-\cos x)\sin x\,.F-\frac{1}{k^2}\Big[4kL\frac{k\cos x+\Delta}{1+k}+1-\Delta\Big]\Big\}.$$

$$\int\sin^5\tfrac{1}{2}x\,.F\,dx=-\frac{2}{15}(8+4\sin^2\tfrac{1}{2}x+3\sin^4\tfrac{1}{2}x)\cos\tfrac{1}{2}x.F-\frac{1}{30k^2\sqrt{2k}}\Big\{(1-12k-32k^2)F(l,z)+$$

$$+24E(l,z)-\frac{1+13k-k\cos x}{1+k-k\cos x}2\sin\tfrac{1}{2}x\,.\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

TAFEL 58.

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2}x . \cos \tfrac{1}{2}x . F dx = \frac{1}{(p^2-1)4k^2} \Big\{ (p-1)(p-2) 8k^2 \int \sin^{p-2} \tfrac{1}{2}x . \cos \tfrac{1}{2}x . F dx -$$

$$- (p-3)^2 (1+4k^2) \int \sin^{p-4} \tfrac{1}{2}x . \cos \tfrac{1}{2}x . F dx +$$

$$+ (p-4)(p-5) \int \sin^{p-6} \tfrac{1}{2}x . \cos \tfrac{1}{2}x . F dx + [2\cos x - \{ (p-5) +$$

$$+ (p-1)\cos x \} \Delta^2] \sin^{p-5} \tfrac{1}{2}x . F + 2 \sin x . \sin^{p-5} \tfrac{1}{2}x . \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{\cos \frac{1}{2}x}{\sin^2 \frac{1}{2}x} F dx = -\frac{2}{\sin \frac{1}{2}x} F - \frac{2\sqrt{2k}}{1+2k} \Big\{ F(l,y) - \frac{2k-1}{4k} \Pi(-r,l,y) \Big\} - \frac{1}{2} L \frac{(\Delta + \cos \frac{1}{2}x)^2}{(1+k-2r)2k(1+\cos x)+\Delta^2}.$$

$$\int \frac{\cos \frac{1}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x} F dx = \beta + \delta.$$

$$\int \cos \tfrac{1}{2}x . F dx = 2 \sin \tfrac{1}{2}x . F + \frac{2}{\sqrt{2k}} F(l,y).$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2}x . \cos \tfrac{1}{2}x . F dx = -\frac{1}{2} \cos x . F + \frac{1}{2k} Bg \sin (k \sin x).$$

$$\int \sin^2 \tfrac{1}{2}x . \cos \tfrac{1}{2}x . F dx = \frac{2}{3} \sin^3 \tfrac{1}{2}x . F + \frac{1}{3k\sqrt{2k}} \Big\{ 2E(l,y) - (1-2k) F(l,y) - \frac{2\cos \frac{1}{2}x . \sqrt{2k}}{1+k+k\cos x} \Big\}.$$

$$\int \sin^3 \tfrac{1}{2}x . \cos \tfrac{1}{2}x . F dx = \frac{1}{8k^2} \{ (1-2k^2+4k^2 \sin^4 \tfrac{1}{2}x) F - E + 2k Bg \sin (k \sin x) \}.$$

$$\int \sin^4 \tfrac{1}{2}x . \cos \tfrac{1}{2}x . F dx = \frac{1}{30k^2} \Big\{ 12k^2 \sin^5 \tfrac{1}{2}x . F + \frac{1}{\sqrt{2k}} [16k E(l,y) -$$

$$-(1+8k-12k^2) F(l,y)] - 16k \frac{\cos \frac{1}{2}x}{1+k+k\cos x} \Delta + 2\cos \tfrac{1}{2}x . \Delta - 2 \Big\}.$$

TAFEL 59.

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2}x \,.\, F \frac{dx}{\cos \frac{1}{2}x} = \frac{1}{(p-1)(p-3)\,4k^2} \Big\{ (p-3)\,12k^2 \int \sin^{p-2} \tfrac{1}{2}x \,.\, F \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} -$$

$$- [\,(p-5)^2 + (3p^2 - 24p + 49)\,k^2\,] \int \sin^{p-4} \tfrac{1}{2}x \,.\, F \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} +$$

$$+ [(2p^2 - 23p + 67) + (p-5)^2 4k^2] \int \sin^{p-6} \tfrac{1}{2}x . F \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} - (p-6)(p-7) \int \sin^{p-8}\tfrac{1}{2}x . F \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} -$$

$$- [\,2\cos x - \{ (p-7) + (p-3)\cos x \}\,\Delta^2\,]\, \sin^{p-7} \tfrac{1}{2}x \,.\, F - 2 \sin x \,.\, \sin^{p-7} \tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x \,.\, \cos\frac{1}{2}x} F = 2\beta. \qquad \int \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} F = \zeta. \qquad \int \frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} F\,dx = \beta - \delta.$$

$$\int \frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} F\,dx = \zeta - 2\sin\tfrac{1}{2}x \,.\, F - \frac{2}{\sqrt{2k}} F(l,y).$$

$$\int \frac{\sin^3\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} F\,dx = \beta - \delta + \frac{1}{2}\cos x \,.\, F - \frac{1}{2k} Bg\sin\,(k \sin x).$$

$$\int \frac{\sin^4\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} F\,dx = \zeta - \frac{1}{3}(7 - \cos x)\sin\tfrac{1}{2}x . F - \frac{1}{3k\sqrt{2k}} \Big\{ 2\,E(l,y) - (1-8k)F(l,y) + \frac{2\cos\frac{1}{2}x . \sqrt{2k}}{1+k+k\cos x}\Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{\sin^5\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} F\,dx = \beta - \delta - \frac{1}{8k^2} \{\, [1 - (1 + 6\cos x - \cos^2 x)k^2]\, F - E + 6\,k\,Bg\sin\,(k\sin x) \,\}.$$

$$\int \frac{\sin^6\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} F\,dx = \zeta - \frac{1}{30k^2} \Big\{ (73 - 16\cos x + 3\cos^2 x)\,k^2 \sin\tfrac{1}{2}x \,.\, F +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2k}} [36\,k\,E(l,y) - (1 + 18k - 92k^2) F(l,y)] - 36k \frac{\cos\frac{1}{2}x}{1+k+k\cos x} + 2\cos\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta - 2 \Big\}.$$

TAFEL 60.

$$\int \cos^p \tfrac{1}{2} x \,.\, F\, dx = \frac{1}{p\,(p-2)\,4\,k^2} \Big\{ (p-2)^2\, 8\, k^2 \int \cos^{p-2} \tfrac{1}{2} x \,.\, F\, dx - [\,(p-4)^2 +$$

$$+ (p-3)^2\, k^2] \int \cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x \,.\, F\, dx + (p-4)\,(p-5) \int \cos^{p-6} \tfrac{1}{2} x \,.\, F\, dx -$$

$$- [\, 2\,(1-k^2) - 2\,k^2 \cos x - (p-2)\,\Delta^2]\, \cos^{p-6} \tfrac{1}{2} x \,.\, \sin x \,.\, F + 4 \cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta - 4 \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F = 2 \tan \tfrac{1}{2} x \,.\, F + 2\, L \frac{2 \sin^2 x}{(1+\Delta)\,(\Delta - \cos x)}. \qquad \int \frac{dx}{\cos \frac{1}{2} x} F = \zeta.$$

$$\int F\, dx = \varepsilon. \qquad \int \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, F\, dx = 2 \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, F + \frac{2}{\sqrt{2\,k}} F\,(l, y).$$

$$\int \cos^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, F\, dx = \frac{1}{2} \Big\{ \varepsilon + \sin x \,.\, F + \frac{1}{k} L \frac{k \cos x + \Delta}{1 + \Delta} \Big\}.$$

$$\int \cos^3 \tfrac{1}{2} x \,.\, F\, dx = \frac{1}{3}(5 + \cos x) \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, F + \frac{1}{3\, k \sqrt{2\,k}} \Big\{ (1 + 4k) F(l,y) - 2 E(l,y) + \frac{2 \cos \frac{1}{2} x \,.\, \sqrt{2\,k}}{1 + k + k \cos x} \Delta \Big\}.$$

$$\int \cos^4 \tfrac{1}{2} x \,.\, F\, dx = \frac{1}{8} \Big\{ 3\,\varepsilon + (4 + \cos x) \sin x \,.\, F + \frac{1}{k^2} \Big[\, 4\, k\, L \frac{k \cos x + \Delta}{1 + k} + \Delta - 1 \Big] \Big\}.$$

$$\int \cos^5 \tfrac{1}{2} x \,.\, F\, dx = \frac{2}{15} (8 + 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} x + 3 \sin^4 \tfrac{1}{2} x \;\; \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, F -$$

$$- \frac{1}{30\, k^2 \sqrt{2\,k}} \Big\{ (1 - 12k - 32k^2) F(l,y) + 24 E(l,y) - \frac{1 + 13k + k \cos x}{1 + k + k \cos x} 2 \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta \sqrt{2k} - 2 \sqrt{2k} \Big\}.$$

TAFEL 61.

$$\int sin\tfrac{1}{2}x.cos^p\tfrac{1}{2}x.F\,dx=\frac{1}{(p^2-1)4k^2}\Big\{(p-1)(p-2)8k^2\int sin\tfrac{1}{2}x.cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x.F\,dx-$$

$$-(p-3)^2(1+4k^2)\int sin\tfrac{1}{2}x.cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x.F\,dx+(p-4)(p-5)\int sin\tfrac{1}{2}x.cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x.F\,dx+$$

$$+\left[2\,cos\,x+\{(p-5)-(p-1)cos\,x\}\Delta^2\right]cos^{p-5}\tfrac{1}{2}x.F+2\,sin\,x.cos^{p-5}\tfrac{1}{2}x.\Delta\Big\}.$$

$$\int\frac{sin\tfrac{1}{2}x}{cos^2\tfrac{1}{2}x}F\,dx=\frac{2}{cos\tfrac{1}{2}x}F-\frac{2\sqrt{2k}}{1+2k}\Big\{F(l,z)+\frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,z)\Big\}-\frac{1}{2}L\frac{(\Delta+sin\tfrac{1}{2}x)^2}{(1+k-2r)2k(1-cos\,x)+\Delta^2}.$$

$$\int\frac{sin\tfrac{1}{2}x}{cos\tfrac{1}{2}x}F\,dx=\beta-\delta.$$

$$\int sin\tfrac{1}{2}x.F\,dx=-2\,cos\tfrac{1}{2}x.F+\frac{2}{\sqrt{2k}}F(l,z).$$

$$\int sin\tfrac{1}{2}x.cos\tfrac{1}{2}x.F\,dx=-\frac{1}{2}cos\,x.F+\frac{1}{2k}Bg\,sin\,(k\,sin\,x).$$

$$\int sin\tfrac{1}{2}x.cos^2\tfrac{1}{2}x.F\,dx=-\frac{2}{3}cos^3\tfrac{1}{2}x.F+\frac{1}{3k\sqrt{2k}}\Big\{2E(l,z)-(1-2k)F(l,z)-\frac{2sin\tfrac{1}{2}x.\sqrt{2k}}{1+k-k\,cos\,x}\Delta\Big\}.$$

$$\int sin\tfrac{1}{2}x.cos^3\tfrac{1}{2}x.F\,dx=\frac{1}{8k^2}\{E-(1-2k^2+4k^2cos^4\tfrac{1}{2}x)F+2k\,Bg\,sin\,(k\,sin\,x)\}.$$

$$\int sin\tfrac{1}{2}x.cos^4\tfrac{1}{2}x.F\,dx=\frac{1}{30k^2}\Big\{-12k^2cos^4\tfrac{1}{2}x.F+\frac{1}{\sqrt{2k}}\big\{16kE(l,z)-$$

$$-(1+8k-12k^2)F(l,z)\big\}-16k\frac{sin\tfrac{1}{2}x}{1+k-k\,cos\,x}\Delta+2sin\tfrac{1}{2}x.\Delta\Big\}.$$

TAFEL 62.

$$\int \cos^p \tfrac{1}{2} x . F \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} = \frac{1}{(p-1)(p-3)\,4\,k^2} \Big\{ (p-3)^2\, 12\, k^2 \int \cos^{p-2} \tfrac{1}{2} x . F \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} -$$

$$- [(p-5)^2 - (3p^2 - 24p + 49) 4 k^2] \int \cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x . F \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} +$$

$$+ [(2p^2 - 23p + 67) + (p-5)^2 4 k^2] \int \cos^{p-6} \tfrac{1}{2} x . F \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} - (p-6)(p-7) \int \cos^{p-8} \tfrac{1}{2} x . F \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} +$$

$$+ [2 \cos x - \{(p-7) - (p-3) \cos x\} \Delta^2] \cos^{p-7} \tfrac{1}{2} x . F - 2 \sin x . \cos^{p-7} \tfrac{1}{2} x . \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x . \cos \frac{1}{2} x} F = 2\beta. \qquad \int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} F = \eta. \qquad \int \frac{\cos \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F\, dx = \beta + \delta.$$

$$\int \frac{\cos^2 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F\, dx = \eta + 2 \cos \tfrac{1}{2} x . F - \frac{2}{\sqrt{2k}} F(l, z).$$

$$\int \frac{\cos^3 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F\, dx = \beta + \delta + \frac{1}{2} \cos x . F - \frac{1}{2k} Bg \sin (k \sin x).$$

$$\int \frac{\cos^4 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F\, dx = \eta + \frac{1}{3}(7 + \cos x) \cos \tfrac{1}{2} x . F - \frac{1}{3k\sqrt{2k}} \Big\{ 2E(l,z) - (1-8k) F(l,z) + \frac{2 \sin \frac{1}{2} x . \sqrt{2k}}{1 + k - k \cos x} \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{\cos^5 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F\, dx = \beta + \delta + \frac{1}{8k^2} \{ [1 - (1 - 6 \cos x - \cos^2 x) k^2] F - E - 6k\, Bg \sin (k \sin x) \}.$$

$$\int \frac{\cos^6 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} F\, dx = \eta + \frac{1}{30 k^2} \Big\{ (73 + 16 \cos x + 3 \cos^2 x) k^2 \cos \tfrac{1}{2} x . F -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2k}} [36 k E(l,z) - (1 + 18k - 92k^2) F(l,z) - 36k \frac{\sin \frac{1}{2} x}{1 + k - k \cos x} \Delta - 2 \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \Big\}.$$

TAFEL 63.

$$\int tang^p \tfrac{1}{2} x \,.\, F\,dx = \frac{1}{(p-1)(p-2)} \Big\{ -[(2p^2-11p+16)-(p-3)^2 2k^2]\, 2 \int tang^{p-2} \tfrac{1}{2} x \,.\, F\,dx -$$

$$-[(3p^2-24p+50)-(p^2-8p+17)\,4k^2]\,2\int tang^{p-4} \tfrac{1}{2} x \,.\, F\,dx -$$

$$-[(2p^2-21p+56)-(p-5)^2 2k^2]\,2\int tang^{p-6} \tfrac{1}{2} x \,.\, F\,dx - (p-6)(p-7)\int tang^{p-8} \tfrac{1}{2} x \,.\, F\,dx -$$

$$-[\cos x-(p-4-\cos x)\,\Delta^2]\,\frac{2\,tang^{p-7}\tfrac{1}{2}x}{\cos^6\tfrac{1}{2}x} - \frac{4\,tang^{p-5}\tfrac{1}{2}x}{\sin\tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^3\tfrac{1}{2}x}\,\Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{tg\,\tfrac{1}{2}x} F = \beta + \delta. \qquad \int F\,dx = \varepsilon. \qquad \int tang\,\tfrac{1}{2}x \,.\, F\,dx = \beta - \delta.$$

$$\int tang^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, F\,dx = -\varepsilon + 2\,tang\,\tfrac{1}{2}x \,.\, F - 2\,L\,\frac{(\Delta-\cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x}.$$

$$\int tang^3 \tfrac{1}{2} x \,.\, F\,dx = \delta - \beta + \frac{1}{2}\cos x \,.\, F + \frac{1}{2k}\,Bg\sin(k\sin x).$$

$$\int tang^4 \tfrac{1}{2} x \,.\, F\,dx = \varepsilon + \frac{2}{3}\Big\{ -(1+2\cos x)\frac{\sin\tfrac{1}{2}x}{\cos^3\tfrac{1}{2}x}F + (2-k^2)\,2\,L\,\frac{(\Delta-\cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2\tfrac{1}{2}x}\Delta + 1 \Big\}.$$

$$\int tang^5 \tfrac{1}{2} x \,.\, F\,dx = \beta - \delta + \frac{1}{6}\Big\{ (5-8k^2-3\cos x+3\,tang^4\tfrac{1}{2}x)\,F - (1-2k^2)\,8\,E -$$

$$-\frac{3}{k}\,Bg\sin(k\sin x) + [(1-4k^2)+(1-2k^2)\,2\cos x]\,\frac{2\,tang\,\tfrac{1}{2}x}{\cos^2\tfrac{1}{2}x}\,\Delta \Big\}.$$

$$\int tang^6 \tfrac{1}{2} x \,.\, F\,dx = -\varepsilon + \frac{1}{15}\Big\{ (13+24\cos x+23\cos^2 x)\,\frac{\sin\tfrac{1}{2}x}{2\cos^5\tfrac{1}{2}x}\,F -$$

$$-(23-28k^2+18k^4)\,2L\,\frac{(\Delta-\cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x} + [(8-9k^2)+(11-9k^2)\cos x]\,\frac{\Delta}{\cos^4\tfrac{1}{2}x} - (19-18k^2) \Big\}.$$

TAFEL 64.

$$\int tang^p \tfrac{1}{2} x \,.\, F \frac{dx}{cos^2 \frac{1}{2} x} = \frac{1}{p(p+1)} \Big\{ -[(3p-4)-(p-1)4k^2](p-1) \int tang^{p-2} \tfrac{1}{2} x \,.\, F \frac{dx}{cos^2 \frac{1}{2} x} -$$

$$-[3p-8)-(p-3)4k^2](p-3) \int tang^{p-4} \tfrac{1}{2} x . F \frac{dx}{cos^2 \frac{1}{2} x} - (p-4)(p-5) \int tang^{p-6} \tfrac{1}{2} x . F \frac{dx}{cos^2 \frac{1}{2} x} -$$

$$-[cos\, x - (p - 2 - cos\, x) \Delta^2] \frac{2\, tang^{p-5} \frac{1}{2} x}{cos^6 \frac{1}{2} x} - \frac{4\, tang^{p-4} \frac{1}{2} x}{cos^4 \frac{1}{2} x} \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{1}{tang^2 \frac{1}{2} x} . F \frac{dx}{cos^2 \frac{1}{2} x} = -2\, cot \tfrac{1}{2} x \,.\, F + 2\, L \frac{2(\Delta - cos\, x)}{1 + \Delta}. \qquad \int \frac{1}{tg \frac{1}{2} x} F \frac{dx}{cos^2 \frac{1}{2} x} = 2\beta.$$

$$\int F \frac{dx}{cos^2 \frac{1}{2} x} = 2\, tang \tfrac{1}{2} x \,.\, F - 2\, L \frac{(\Delta - cos\, x)(1 + \Delta)}{2\, sin^2 x}.$$

$$\int tang \tfrac{1}{2} x \,.\, F \frac{dx}{cos^2 \frac{1}{2} x} = - \frac{cos\, x}{cos^2 \frac{1}{2} x} F + 2\, E - 2\, tang \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta.$$

$$\int tang^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, F \frac{dx}{cos^2 \frac{1}{2} x} = \frac{2}{3} \Big\{ tang^3 \tfrac{1}{2} x \,.\, F - \frac{1}{cos^2 \frac{1}{2} x} \Delta + 1 + (1 - 2k^2) L \frac{(\Delta - cos\, x)(1+\Delta)}{2\, sin^2 x} \Big\}.$$

$$\int tang^3 \tfrac{1}{2} x . F \frac{dx}{cos^2 \frac{1}{2} x} = \frac{1}{6} \Big\{ (5 - 8k^2 + 3 tang^4 \tfrac{1}{2} x) F - (1-2k^2) 8E + [(1-4k^2) + (1-2k^2) 2 cos\, x] \frac{2 tang \frac{1}{2} x}{cos^2 \frac{1}{2} x} \Delta \Big\}.$$

$$\int tang^4 \tfrac{1}{2} x \,.\, F \frac{dx}{cos^2 \frac{1}{2} x} = \frac{1}{5} \Big\{ 2\, tang^5 \tfrac{1}{2} x \,.\, F - 2(1 - 6k^2 + 6k^4) L \frac{(\Delta - cos\, x)(1+\Delta)}{2\, sin^2 x} +$$

$$+ [(1 - 3k^2) + (2 - 3k^2) cos\, x] \frac{\Delta}{cos^4 \frac{1}{2} x} - 3(1 - 2k^2) \Big\}.$$

B 16

TAFEL 65.

$$\int tang^p \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx = \frac{-1}{(p-5)(p-6)} \Big\{ [(p-6)(2p-11)-(p-7)^2 2k^2] 2 \int tang^{p-2} \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx +$$

$$+ [3(p-6)^2 - (p^2 - 12p + 33) 4k^2] 2 \int tang^{p-4} \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx + [(p-6)(2p-13) -$$

$$-(p-5)^2 2k^2] 2 \int tang^{p-6} \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx + (p-6)(p-7) \int tang^{p-8} \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx +$$

$$+ [cos\, x - (p - 6 + cos\, x) \Delta^2] \frac{4}{sin\, x} tang^{p-6} \tfrac{1}{2}x . F + 4\, tang^{p-6} \tfrac{1}{2}x . \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{cos^4 \frac{1}{2}x}{tang^2 \frac{1}{2}x} F dx = -\frac{15}{8}\varepsilon - \frac{1}{8}\Big\{ 5(4 + cos\, x) + 4\frac{(1+cos\, x)^2}{1-cos\, x} \Big\} sin\, x . F + 2L\frac{2(\Delta - cos\, x)}{1+\Delta} - \frac{1}{k}L\frac{k\, cos\, x + \Delta}{1+k} - \frac{9}{8k^2}(1-\Delta).$$

$$\int \frac{cos^4 \frac{1}{2}x}{tang \frac{1}{2}x} F dx = \beta + \delta + \frac{1}{8k^2} \{ [1 - (1 - 6 cos\, x - cos^2 x) k^2] F - E - 6\, k\, Bg\, sin\, (k\, sin\, x) \}.$$

$$\int cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx = \frac{1}{8} \Big\{ 3\varepsilon + (4 + cos\, x) sin\, x . F + \frac{1}{k^2}\Big[4kL\frac{k\, cos\, x + \Delta}{1+k} + \Delta - 1 \Big]\Big\}.$$

$$\int tang \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx = \frac{1}{8k^2} \{ E - (1 - 2k^2 + 4k^2 cos^4 \tfrac{1}{2}x) F + 2k\, Bg\, sin\, (k\, sin\, x) \}.$$

$$\int tang^2 \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx = -\frac{15}{8}\varepsilon + \frac{1}{8}\Big\{ 5(4 - cos\, x) + 4\frac{(1 - cos\, x)^2}{1 + cos\, x} \Big\} sin\, x . F -$$

$$- 2L\frac{(\Delta - cos\, x)(1 + \Delta)}{2 sin^2 x} + \frac{1}{k}L\frac{k\, cos\, x + \Delta}{1+k} - \frac{9}{8k^2}(1 - \Delta).$$

$$\int tang^3 \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx = \frac{1}{8k^2} \{(1 - 2k^2 + 4k^2 sin^2 \tfrac{1}{2}x) F - E + 2k\, Bg\, sin\, (k\, sin\, x) \}.$$

$$\int tang^4 \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx = \frac{1}{8} \Big\{ 3\varepsilon - (4 - cos\, x) sin\, x . F - \frac{1}{k^2}\Big[4kL\frac{k\, cos\, x + \Delta}{1+k} - \Delta + 1\Big]\Big\}.$$

$$\int tang^5 \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . F dx = \beta - \delta - \frac{1}{8k^2}\{ [1 - (1 + 6 cos\, x - cos^2 x) k^2] F - E + 6k\, Bg\, sin (k\, sin\, x) \}.$$

TAFEL 66.

$$\int \frac{dx}{\cos^p \frac{1}{2}x} F = \frac{1}{(p-1)(p-2)} \Big\{ [(p-2)^2 + (p-3)^2 4k^2] \int \frac{dx}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x} F - (p-4)^2 8k^2 \int \frac{dx}{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x} F +$$

$$+ (p-4)(p-6) 4k^2 \int \frac{dx}{\cos^{p-6}\frac{1}{2}x} F + [2(1-k^2) - 2k^2 \cos x + (p-4)\Delta^2] \frac{\sin x}{\cos^p \frac{1}{2}x} -$$

$$- \frac{4\Delta}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x} + 4 \Big\}.$$

$$\int \cos^3 \tfrac{1}{2}x . F dx = \frac{1}{3}(5 + \cos x) \sin \tfrac{1}{2}x . F + \frac{1}{3k\sqrt{2k}} \Big\{ (1 + 4k) F(l, y) -$$

$$- 2E(l, y) + \frac{2\cos\frac{1}{2}x}{1 + k + k\cos x} \Delta \sqrt{2k} \Big\}.$$

$$\int \cos^2 \tfrac{1}{2}x . F dx = \frac{1}{2} \Big\{ \varepsilon + \sin x . F + \frac{1}{k} L \frac{k\cos x + \Delta}{1 + k} \Big\}.$$

$$\int \cos \tfrac{1}{2}x . F dx = 2 \sin \tfrac{1}{2}x . F + \frac{2}{\sqrt{2k}} F(l, y). \qquad \int F dx = \varepsilon. \qquad \int \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} F = \eta.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2}x} F = 2 \tan \tfrac{1}{2}x . F - 2L \frac{(\Delta - \cos x)(1 + \Delta)}{2\sin^2 x}.$$

---

*

TAFEL 67.

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^p \frac{1}{2} x} F\,dx = \frac{1}{(p-1)(p-2)} \Big\{ (p-3)^2 (1+4k^2) \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-2} \frac{1}{2} x} F\,dx -$$

$$- (p-4)(p-5)\,8k^2 \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-4} \frac{1}{2} x} F\,dx + (p-5)(p-7)\,4k^2 \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-6} \frac{1}{2} x} F\,dx -$$

$$- \left[2\cos x - \{(p-1) - (p-5)\cos x\}\,\Delta^2 \right] \frac{1}{\cos^{p-1} \frac{1}{2} x} F - \frac{2\sin x}{\cos^{p-1} \frac{1}{2} x} \Delta \Big\}.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, F\,dx = -\frac{2}{3} \cos^3 \tfrac{1}{2} x . F + \frac{1}{3k\sqrt{2k}} \Big\{ 2E(l,z) - (1-2k) F(l,z) - \frac{2\sin \frac{1}{2} x . \sqrt{2k}}{1+k-k\cos x} \Delta \Big\}.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, F\,dx = -\frac{1}{2} \cos x \,.\, F + \frac{1}{2k}\, Bg\sin (k \sin x).$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, F\,dx = -2\cos \tfrac{1}{2} x \,.\, F + \frac{2}{\sqrt{2k}} F(l,z). \qquad \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} F\,dx = \beta - \delta.$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F\,dx = \frac{2}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F - \frac{2\sqrt{2k}}{1+2k} \Big\{ F(l,z) + \frac{1-2k}{4k} \Pi(-r,l,z) \Big\} - \frac{1}{2} L \frac{(\Delta + \sin \frac{1}{2} x)^2}{(1+k-2r)2k(1-\cos x) + \Delta^2}.$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^3 \frac{1}{2} x} F\,dx = -\frac{\cos x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} F + 2E - 2\,\mathrm{tang}\, \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta.$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^5 \frac{1}{2} x} F\,dx = \frac{1}{6} \Big\{ (1+4k^2)\,4E - \left[(1+8k^2) - 6\,\mathrm{tang}^2 \tfrac{1}{2} x - 3\,\mathrm{tang}^4 \tfrac{1}{2} x \right] F -$$

$$- \left[2(1+2k^2) + (1+4k^2)\cos x \right] \frac{2\,\mathrm{tang}\, \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} \Delta \Big\}.$$

TAFEL 68.

$$\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^p\frac{1}{2}x}F=\frac{1}{(p-1)(p-2)}\Big\{[(2p^2-9p+11)+(p-3)^2 4k^2]\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}F-$$

$$-[(p-3)^2-(3p^2-24p+49)4k^2]\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}F+$$

$$+(p-5)^2 12k^2\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p-6}\frac{1}{2}x}F-(p-5)(p-7)4k^2\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p-8}\frac{1}{2}x}F+$$

$$+[2\cos x+\{(p-1)-(p-5)\cos x\}\Delta^2]\frac{1}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}F-\frac{2\sin x}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}\Delta\Big\}.$$

$$\int\frac{\cos^6\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}F\,dx=\eta+\frac{1}{30k^2}\Big\{(73+16\cos x+3\cos^2 x)k^2\cos\tfrac{1}{2}x\,.F-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2k}}[36kE(l,z)-(1+18k-92k^2)F(l,z)]+36k\frac{\sin\frac{1}{2}x}{1+k-k\cos x}\Delta-2\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta\Big\}.$$

$$\int\frac{\cos^5\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}F\,dx=\beta+\delta+\frac{1}{2k}\{[1-(1+6\cos x-\cos^2 x)k^2]F-E-6k\,Bg\sin(k\sin x)\}.$$

$$\int\frac{\cos^4\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}F\,dx=\eta+\frac{1}{3}(7+\cos x)\cos\tfrac{1}{2}x.F-\frac{1}{3k\sqrt{2k}}\Big\{2E(l,z)-(1-8k)F(l,z)\Big\}+\frac{2\sin\frac{1}{2}x.\sqrt{2k}}{1+k-k\cos x}.$$

$$\int\frac{\cos^3\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}F\,dx=\beta+\delta+\frac{1}{2}\cos x.F-\frac{1}{2k}Bg\sin(k\sin x).\qquad\int\frac{\cos^2\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}F\,dx=\eta+2\cos\tfrac{1}{2}x.F-\frac{1}{\sqrt{2k}}F(l,z).$$

$$\int\frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}F\,dx=\beta+\delta.\qquad\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x}F=\eta.$$

$$\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos\frac{1}{2}x}F=2\beta.$$

$$\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^2\frac{1}{2}x}F=\eta+\frac{2}{\cos\frac{1}{2}x}F+\frac{2\sqrt{2k}}{1+2k}\Big\{F(l,y)-\frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,y)\Big\}+$$

$$+\frac{1}{2}L\frac{(\Delta+\sin\frac{1}{2}x)^2}{(1+k-2r)2r(1-\cos x)+\Delta^2}.$$

HOOFDSTUK III.

ONDERZOEK VAN INTEGRALEN, DIE BEHALVE GONIOMETRISCHE FUNCTIËN, NOG DE ELLIPTISCHE INTEGRAAL DER TWEEDE SOORT, E, BEVATTEN.

1. In het eerste Hoofdstuk zijn evenzeer de noodige bouwstoffen bijeenvergaderd voor de behandeling der herleidingsformule (D), aldaar afgeleid. Langs denzelfden weg als in den aanvang van het tweede Hoofdstuk werd betreden, onder dezelfde opmerkingen, en met dezelfde voorzorgsmaatregelen, leidt men hier een overeenkomstig theorema af. Men vindt toch

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi(x).\int_0^x dy\sqrt{1-k^2\sin^2 y}\right]=\frac{d.\varphi(x)}{dx}\int_0^x dy\sqrt{1-k^2\sin^2 y}+\varphi(x).\sqrt{1-k^2\sin^2 x},$$

dat is

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi(x).E\right]=E\frac{d}{dx}\varphi(x)+\varphi(x).\Delta;$$

waaruit volgt, wanneer men deze naar x integreert, tusschen de grenzen 0 en x,

$$\varphi(x).E=\int\varphi(x).\Delta\,dx+\int E\frac{d}{dx}\varphi(x).dx,$$

die wederom oplevert

$$\int E\,dx\frac{d}{dx}\varphi(x)=\varphi(x).E-\int\varphi(x).\Delta\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(C)}$$

In de voorlaatste vergelijking had het eerste lid eigenlijk den vorm $\varphi(x).E\Big/_0^x$, en er is derhalve stilzwijgend aangenomen, dat genoemd produkt voor de waarde $x=0$ verdwijnt. Dit nu is wel het geval met den factor E, maar alsdan mag natuurlijk de factor $\varphi(0)$ niet oneindig groot worden, opdat het produkt $0.\varphi\,0)$ niet onbepaald of niet oneindig groot worde; en deze voorwaarde heeft wederom invloed moeten uitoefenen op de keuze der integralen (δ_1) tot (δ_{35}).

Laat ons nu beginnen met de toepassing van dit theorema (**c**) op die verzamelde integralen (δ_1) tot (δ_{35}), als eindintegralen van de algemeene herleidingsformulen (D). Men zal dan achtereenvolgens de volgende vinden, waarbij evenwel niet alle integralen tot verschillende uitkomsten voerden.

$$\int \sin x . \cos x . E\,dx = \frac{1}{6\,k^2} \left\{ (4-2\,k^2-3\,\Delta^2)\,E - (1-k^2)\,F + k^2 \sin x . \cos x . \Delta \right\}, \ldots (121)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,E\,dx = \frac{1}{2} \left\{ (1+\sec^2 x)\,E - F - \operatorname{tang} x . \Delta \right\}, \ldots (122)$$

$$\int \sin^3 x \cos x . E\,dx = \frac{1}{60\,k^4} \left\{ (2+3\,k^2-8\,k^4+15\,k^4 \sin^4 x)\,E - (1-k^2)(1+2\,k^2)\,2\,F + \right.$$

$$\left. + \left[2\,(1+2\,k^2) - 3\,\Delta^2 \right] k^2 \sin x . \cos x . \Delta \right\}, \ldots (123)$$

$$\int \sin x . \cos^3 x . E\,dx = \frac{1}{60\,k^4} \left\{ (1-k^2)(1-3\,k^2)\,2\,F - (2-7\,k^2-3\,k^4+15\,k^4 \cos^4 x)\,E - \right.$$

$$\left. - \left[2\,(1-3\,k^2) - 3\,\Delta^2 \right] k^2 \sin x . \cos x . \Delta \right\}, \ldots (124)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,E\,dx = \frac{1}{12\,(1-k^2)} \left\{ (1-k^2)\,4\,F - \left[(7-8\,k^2) - 3\,(1-k^2) \operatorname{tang}^4 x \right] E + \right.$$

$$\left. + \left[4\,(1-k^2) + 4 \cos^2 x - 5\,\Delta^2 \right] \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,\Delta \right\}, \ldots (125)$$

$$\int \cos x . E\,dx = \sin x . E - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\,k}(1-k^2)\,L\,\frac{\Delta + k \cos x}{1+k} + \frac{1}{2} \cos x . \Delta, \ldots (126)$$

$$\int \sin x . E\,dx = -\cos x . E + \frac{1}{2\,k}\,Bg \sin (k \sin x) + \frac{1}{2} \sin x . \Delta, \ldots (127)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}\,E = \operatorname{tang} x . E - 1 - \sqrt{1-k^2}\,L\,\frac{\sqrt{1-k^2} + \Delta}{(1+\sqrt{1-k^2}) \cos x} + \Delta, \ldots (128)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,E\,dx = -\frac{1}{\sin x}\,E + L\,\frac{\Delta - \cos x}{\sin x} + k\,L\,\frac{\Delta + k \cos x}{1+k}, \ldots (129)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,E\,dx = \frac{1}{\cos x}\,E - k\,Bg \sin (k \sin x) - \sqrt{1-k^2}\,L\,\frac{\sin x . \sqrt{1-k^2} + \Delta}{\cos x} \ldots (130)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} E\,dx = -\cot x \,.\, E - 1 + L\,\frac{2\sin x}{1+\Delta} + \Delta, \quad \ldots \ldots \quad (131)$$

$$\int \sin^3 \tfrac{1}{2}x \,.\, \cos \tfrac{1}{2}x \,.\, E\,dx = \frac{1}{24\,k^2}\,\{(1-k^2)\,F - [\,4 - 2\,k^2\,(1 - 3\cos x) - 3\,\Delta^2\,]\,E +$$

$$+ 3\,k\,Bg\sin(k\sin x) + (3-\cos x)\,k^2 \sin x \,.\, \Delta\,\}, \quad \ldots \ldots \quad (132)$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^3 \tfrac{1}{2}x \,.\, E\,dx = \frac{1}{24\,k^2}\,\{[\,4 - 2\,k^2\,(1 + 3\cos x) - 3\,\Delta^2\,]\,E -$$

$$-(1-k^2)\,F + 3\,k\,Bg\sin(k\sin x) + (3+\cos x)\,k^2 \sin x \,.\, \Delta\,\}, \quad \ldots \ldots \quad (133)$$

$$\int \frac{\sin^3 \frac{1}{2}x}{\cos^5 \frac{1}{2}x} E\,dx = \frac{1}{6}\,\Big\{ (1-k^2)\,8\,F - (11 + 8\,k^2 - 3\,\mathrm{tang}^4 \tfrac{1}{2}x)\,E +$$

$$+ 12\,k\,Bg\sin(k\sin x) + [\,(1+2\,k^2) + (1+k^2)\,2\cos x\,]\,\frac{\sin x}{\cos^4 \frac{1}{2}x}\,\Delta\,\Big\}, \quad \ldots \ldots \quad (134)$$

$$\int \frac{\cos \frac{1}{2}x}{\sin^3 \frac{1}{2}x} E\,dx = 2\,(1-k^2)\,F - (2 + \mathrm{cosec}^2 \tfrac{1}{2}x)\,E - 2\,k\,Bg\sin(k\sin x) - 2\cot\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta, \quad . \,(135)$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2}x}{\cos^3 \frac{1}{2}x} E\,dx = (2 + \sec^2 \tfrac{1}{2}x)\,E - (1-k^2)\,2\,F - 2\,k\,Bg\sin(k\sin x) - 2\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta, \quad . \,(136)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2}x} E = 2\,\Big\{ \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}x \,.\, E - 1 - k\,L\,\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} - L\,\frac{(\Delta - \cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x} + \Delta \Big\}, \quad . \,(137)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{1}{2}x} E = 2\,\Big\{ -\cot\tfrac{1}{2}x \,.\, E - 1 + k\,L\,\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + L\,\frac{2(\Delta - \cos x)}{1+\Delta} + \Delta \Big\}, \quad . \,(138)$$

$$\int \frac{\sin^2 \frac{1}{2}x}{\cos^4 \frac{1}{2}x} E\,dx = \frac{2}{3}\,\Big\{ \mathrm{tang}^3 \tfrac{1}{2}x \,.\, E + 3\,k\,L\,\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} +$$

$$+ (1+2\,k^2)\,L\,\frac{(\Delta - \cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x} - (1 + \cos^2 \tfrac{1}{2}x)\,\frac{\Delta}{\cos^2 \frac{1}{2}x} + 2\,\Big\}, \quad \ldots \ldots \quad (139)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} E\,dx = \frac{1}{12\,(1-k^2)}\,\Big\{ (2 - k^2 + \sec^4 x)\,E - (1-k^2)\,2\,F -$$

$$-[\,(3 - 2\,k^2) - (2-k^2)\sin^2 x\,]\,\frac{\sin x}{\cos^3 x}\,\Delta\,\Big\}, \quad \ldots \ldots \quad (140)$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^5 \frac{1}{2} x} E\, dx = \frac{1}{6} \left\{ (4 - 8k^2 + 3 \sec^4 \tfrac{1}{2} x) E - (1 - k^2)\, 4 F - \right.$$

$$\left. - [\, 2(1 - k^2) + (1 - 2k^2) \cos x\,] \frac{\sin x}{\cos^4 \frac{1}{2} x} \Delta \right\}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (141)$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^7 \frac{1}{2} x} E\, dx = \frac{1}{45} \left\{ (16 + 24k^2 - 64k^4 + 15 \sec^6 \tfrac{1}{2} x) E - (1 + 2k^2)(1 - k^2)\, 16 F - \right.$$

$$\left. - [4(1-k^2)(1+4k^2) + (1+2k^2)(3-4k^2) 2\cos x + 2\cos^2 x + (3 - 8k^2)\Delta^2] \frac{\sin x}{\cos^6 \frac{1}{2} x} \Delta \right\}, \quad . \; (142)$$

$$\int \cos \tfrac{1}{2} x . E\, dx = 2 \sin \tfrac{1}{2} x . E + \frac{4}{3\sqrt{2k}} \left\{ (1-k) F(l,y) + 2k E(l,y) + \frac{1 - k + k\cos x}{1 + k + k\cos x} \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \right\}, . \; (143)$$

$$\int \sin^2 \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x . E\, dx = \frac{2}{3} \sin^3 \tfrac{1}{2} x . E \quad \frac{2}{45k\sqrt{2k}} \left\{ (1 - 2k)(1-k) 3 F(l,y) - (1 + 2k^2) 6 E(l,y) - \right.$$

$$\left. - \left[(1 + 14k + 4k^2) - 4(1+k) k\cos x - \frac{2(4 + 5k + 10k^2) - (1 + 4k)\Delta^2}{1 + k + k\cos x} \right] \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \right\}, . \; (144)$$

$$\int \frac{\cos \frac{1}{2} x}{\sin^2 \frac{1}{2} x} E\, dx = -2 \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2} x . E + \left\{ \frac{8k \cos \frac{1}{2} x . \Delta}{1 + k + k\cos x} + \frac{2\sqrt{2k}}{1 + 2k} \right\} 2k F(l,y) -$$

$$-(1 + 2k)\, 2 E(l,y) - \frac{1 - 2k}{4k} \Pi(-r, l, y) \Big\} - L \frac{(\Delta + \cos \frac{1}{2} x)^2}{(1 + k - 2r) 2k (1 + \cos x) + \Delta^2}, \quad . \; (145)$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . E\, dx = -2 \cos \tfrac{1}{2} x . E + \frac{4}{3\sqrt{2k}} \left\{ 2k E(l,z) + (1 - k) F(l,z) + \right.$$

$$\left. + \frac{1 - k - k\cos x}{1 + k - k\cos x} \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \right\}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (146)$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^2 \tfrac{1}{2} x . E\, dx = -\frac{2}{3} \cos^3 \tfrac{1}{2} x . E + \frac{2}{45k\sqrt{2k}} \left\{ (1 + 2k^2)\, 6 E(l,z) - \right.$$

$$- (1 - 2k)(1 - k)\, 3 F(l,z) + \left[(1 + 14k + 4k^2) - 4(1 + k) k\cos x - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{2(4 + 5k + 10k^2) - (1 + 4k)\Delta^2}{1 + k - k\cos x} \right] \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (147)$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} E\,dx = 2 \sec \tfrac{1}{2} x \,.\, E + \frac{8 k \sin \frac{1}{2} x \,.\, \Delta}{1 + k - k \cos x} - \frac{2 \sqrt{2 k}}{1 + 2 k} \Big\{ (1 + 2 k)\, 2\, E(l, z) -$$

$$- 2 k F(l, z) + \frac{1 - 2 k}{4 k} \Pi(-r, l, z) \Big\} - L \frac{(\Delta + \sin \frac{1}{2} x)^2}{(1 + k - 2 r)\, 2 k (1 - \cos x) + \Delta^2} \quad . \; . \; (148)$$

2. Nu men het theorema (c) op de eindintegralen (δ) heeft toegepast, kan men tot de algemeene herleidingsformulen (D_1) tot (D_8) zelve overgaan, maar daartoe zal men beter doen genoemd theorema eerst om te keeren.

$$\int \varphi(x) \,.\, \Delta\, dx = \varphi(x) \,.\, E - \int E \frac{d \varphi(x)}{dx} dx \; . \; (c_1)$$

Thans kan men dit theorema rechtstreeks toepassen op elke der integralen van dezelfde soort, die telkens in de herleidingsformulen (D) voorkomen, en daaruit verder eene herleidingsformule opmaken tusschen integralen van denzelfden vorm, die nu den factor E bezitten.

Op die wijze levert de herleidingsformule (D_1)

$$(p+1) k^2 \Big\{ \sin^p x \,.\, E - p \int \sin^{p-1} x . \cos x .\, E\, dx \Big\} = \cos x . \sin^{p-3} x . \Delta^3 + [(p-2) + p k^2] \Big\{ \sin^{p-2} x . E -$$

$$- (p-2) \int \sin^{p-3} x \,.\, \cos x \,.\, E\, dx \Big\} - (p-3) \Big\{ \sin^{p-4} x \,.\, E - (p-4) \int \sin^{p-5} x \,.\cos x .\, E\, dx \Big\}.$$

In deze uitkomst moet men nu eerst $p + 1$ voor p stellen, en vervolgens de noodige herleidingen uitvoeren, om ten slotte te verkrijgen

$$\int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, E\, dx = \frac{1}{(p+1)(p+2) k^2} \Big\{ [(p-1) + (p+1) k^2] (p-1) \int \sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, E\, dx -$$

$$- (p-2)(p-3) \int \sin^{p-4} x \,.\, \cos x \,.\, E\, dx - [\, 3 \cos^2 x +$$

$$+ \{ 1 - (p+2) \cos^2 x \} \Delta^2] \sin^{p-3} x \,.\, E - \sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, \Delta^3 \Big\} \; . \; . \; . \; (XXXVII)$$

Wanneer men bij deze herleidingsformule de eindintegralen zoekt, vindt men bij evene waarden van p, voor $p = 2$, de integralen (126) en (129), en bij onevene waarden, voor $p = 5$, de integralen (121) en (123).

Vervolgens vindt men door de herleidingsformule (D_2)

*

$$(p+1)k^2 \left\{ \cos^p x . E + p \int \cos^{p-1} x . \sin x . E dx \right\} = \sin x . \cos^{p-3} x . \Delta^3 -$$

$$- [(p-2)-(p-1)2k^2] \left\{ \cos^{p-2} x . E + (p-2) \int \cos^{p-3} x . \sin x . E dx \right\} +$$

$$+ (p-3)(1-k^2) \left\{ \cos^{p-4} x . E + (p-4) \int \cos^{p-5} x . \sin x . E dx \right\}.$$

Ook hier moet men p door $p+1$ vervangen; dan zal er na de noodige herleiding komen

$$\int \sin x . \cos^p x . E dx = \frac{1}{(p+1)(p+2)k^2} \Big\{ -[(p-1)-2pk^2](p-1) \int \sin x . \cos^{p-2} x . E dx +$$

$$+ (p-2)(p-3)(1-k^2) \int \sin x . \cos^{p-4} x . E dx + [3 \cos^2 x -$$

$$- \{ 4-(p+2) \sin^2 x \} \Delta^2] \cos^{p-3} x . E + \sin x . \cos^{p-2} x . \Delta^3 \Big\} \ldots\ldots \text{(XXXVIII)}$$

Voor evene p vindt men hier als eindintegralen voor $p=2$, de integralen (127) en (130); voor onevene p evenzeer voor $p=5$, de integralen (121) en (124).

De herleidingsformule (D_3) geeft ons door middel van ons theorema

$$(p-1)(1-k^2) \left\{ \text{tang}^p x . E - p \int \text{tang}^{p-1} x . E \frac{dx}{\cos^2 x} \right\} = \frac{\text{tang}^{p-2} x}{\sin x . \cos x} \Delta^3 -$$

$$- [(p-2)2 - pk^2] \left\{ \text{tang}^{p-2} x . E - (p-2) \int \text{tang}^{p-3} x . E \frac{dx}{\cos^2 x} \right\} -$$

$$- (p-3) \left\{ \text{tang}^{p-4} x . E - (p-4) \int \text{tang}^{p-5} x . E \frac{dx}{\cos^2 x} \right\};$$

welke vergelijking, nadat men eerst $p+1$ in plaats van p heeft gesteld, en vervolgens genoegzaam herleid heeft, eindelijk oplevert

$$\int \text{tang}^p x . E \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{p(p+1)(1-k^2)} \Big\{ -[(p-1)2-(p+1)k^2](p-1) \int \text{tang}^{p-2} x . E \frac{dx}{\cos^2 x} -$$

$$- (p-2)(p-3) \int \text{tang}^{p-4} x . E \frac{dx}{\cos^2 x} - [3 \cos^2 x -$$

$$- (p + \cos^2 x) \Delta^2] \frac{\text{tang}^{p-3} x}{\cos^4 x} E - \frac{\text{tang}^p x}{\sin^2 x} \Delta^3 \Big\} \ldots\ldots \text{(XXXIX)}$$

Ook hier worden de eindintegralen verschillend, naarmate p even of oneven is: in het eerste geval vindt men voor $p=2$, de integralen (128) en (131); in het tweede geval voor $p=5$, de integralen (125) en (122).

Bij de eindintegralen (XXXVII), (XXXVIII) en (XXXIX) merke men op, dat bij evene p voor $p=2$, de tweede genoemde integraal eigenlijk niet voorkomt, daar zij dan wegens den factor $(p-2)$ verdwijnt.

3. Gaan wij over tot die herleidingsformulen, welke de halve x bevatten, en wel vooreerst tot (D_4), dan vinden wij

$$(p+2)4k^2\left\{sin^p\tfrac{1}{2}x\,.\,E-\frac{1}{2}p\int sin^{p-1}\tfrac{1}{2}x\,.\,cos\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx\right\}=-\,sin\,x\,.\,sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta^3+$$

$$+8pk^2\left\{sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x.E-\frac{1}{2}(p-2)\int sin^{p-3}\tfrac{1}{2}x.cos\tfrac{1}{2}x.Edx\right\}-[(p-4)+(p-2)4k^2]\left\{sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x.E-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}(p-4)\int sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x\,.\,cos\tfrac{1}{2}x.Edx\right\}+(p-5)\left\{sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x.E-\frac{1}{2}(p-6)\int sin^{p-7}\tfrac{1}{2}x.cos\tfrac{1}{2}x.Edx\right\}.$$

Vervang hier ook p door $p+1$, en pas de noodige herleidingen toe, dan zal er komen

$$\int sin^p\tfrac{1}{2}x\,.\,cos\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx=\frac{1}{(p+1)\,(p+3)\,4\,k^2}\left\{(p^2-1)8\,k^2\int sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,cos\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx-\right.$$

$$-\,[\,(p-3)+(p-1)\,4k^2\,]\,(p-3)\int sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,cos\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx\,+$$

$$+\,(p-4)(p-5)\int sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x.cos\tfrac{1}{2}x.Edx+[6cosx-\{(p-5)+(p+3)cosx\}\,\Delta^2]sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x.E\,+$$

$$\left.+\,2\,sin\,x\,.\,sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta^3\right\}.\;\text{(XL)}$$

Om de eindintegralen te vinden, stelle men eerst, bij evene p, $p=4$; dan komen er de integralen (144), (143) en (145); en bij onevene p, $p=5$, waarbij de integralen (132) en (127) komen; wegens den factor $(p-5)$ verdwijnt echter de hier vreemde, onbekende integraal $\int\frac{cos\,\frac{1}{2}x}{sin\,\frac{1}{2}x}E\,dx$.

Langs denzelfden weg levert de herleidingsformule (D_5)

$$(p+2)\,4k^2 \left\{ \cos^p \tfrac{1}{2}x \,.\, E + \frac{1}{2}p \int \sin \tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^{p-1} \tfrac{1}{2}x \,.\, E\,dx \right\} = \sin x \,.\, \cos^{p-6} \tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta^3 +$$

$$+8pk^2 \left\{ \cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x.E + \frac{1}{2}(p-2)\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^{p-3}\tfrac{1}{2}x.E\,dx \right\} - [(p-4)+(p-2)4k^2] \left\{ \cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x.E + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(p-4)\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^{p-5}\tfrac{1}{2}x.E\,dx \right\} + (p-5)\left\{ \cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x.E + \frac{1}{2}(p-6)\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^{p-7}\tfrac{1}{2}x.E\,dx \right\};$$

en deze vergelijking levert verder na behoorlijke herleiding, wanneer men eerst $p+1$ voor p in de plaats heeft gesteld,

$$\int \sin \tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^p \tfrac{1}{2}x \,.\, E\,dx = \frac{1}{(p+1)(p+3)\,4k^2} \left\{ (p^2-1)\,8k^2 \int \sin \tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^{p-2} \tfrac{1}{2}x \,.\, E\,dx - \right.$$

$$- [(p-3)+(p-1)\,4k^2]\,(p-3) \int \sin \tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^{p-4} \tfrac{1}{2}x \,.\, E\,dx +$$

$$+ (p-4)(p-5) \int \sin \tfrac{1}{2}x \,.\, \cos^{p-6} \tfrac{1}{2}x \,.\, E\,dx + [\,6 \cos x + \{ (p-5) -$$

$$\left. - (p+3)\cos x \}\, \Delta^2\,]\, \cos^{p-5} \tfrac{1}{2}x \,.\, E + 2 \sin x \,.\, \cos^{p-5} \tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta^3 \right\} \qquad \text{(XLI)}$$

Bij de eindintegralen moet men weder onderscheid maken tusschen p even en oneven: voor de eerste stelle men $p=4$, dan wordt men gevoerd tot de integralen (147), (146) en (148), welke laatste evenwel wegens den factor $p-4$ verdwijnt. Voor de laatste stelle men $p=5$, waarbij de integralen (133) en (127) te voorschijn komen, en wegens den factor $p-5$, weder de laatste vreemde, hier onbekende, integraal wegvalt.

Eindelijk verkrijgt men door de herleidingsformule (D_6) de volgende

$$(p-1)\left\{ \tan^p \tfrac{1}{2}x \,.\, E - \frac{1}{2}p \int \tan^{p-1} \tfrac{1}{2}x \,.\, E \frac{dx}{\cos^2 \tfrac{1}{2}x} \right\} = \frac{2 \tan^{p-5} \tfrac{1}{2}x}{\cos^4 \tfrac{1}{2}x}\, \Delta^3 -$$

$$- [\,(3p-7) - (p-4)\,4k^2] \left\{ \tan^{p-2} \tfrac{1}{2}x \,.\, E - \frac{1}{2}(p-2) \int \tan^{p-3} \tfrac{1}{2}x \,.\, E \frac{dx}{\cos^2 \tfrac{1}{2}x} \right\} -$$

$$- [(3p-11) - (p-2)\,4k^2] \left\{ \tan^{p-4} \tfrac{1}{2}x \,.\, E - \frac{1}{2}(p-4) \int \tan^{p-5} \tfrac{1}{2}x \,.\, E \frac{dx}{\cos^2 \tfrac{1}{2}x} \right\} -$$

$$- (p-5) \left\{ \tan^{p-6} \tfrac{1}{2}x \,.\, E - \frac{1}{2}(p-6) \int \tan^{p-7} \tfrac{1}{2}x \,.\, E \frac{dx}{\cos^2 \tfrac{1}{2}x} \right\}.$$

Wanneer men hierin p door $p+1$ vervangt, en verder de noodzakelijke herleidingen uitvoert, zal men ten slotte verkrijgen

$$\int tang^p \tfrac{1}{2} x . E \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2} x} = \frac{1}{(p+1)} \Big\{ -[(3p-4)-(p-3)4k^2](p-1) \int tang^{p-2} \tfrac{1}{2} x . E \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2} x} -$$

$$-[(3p-8)-(p-1)4k^2](p-3) \int tang^{p-4} \tfrac{1}{2} x . E \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2} x} - (p-4)(p-5) \int tang^{p-6} \tfrac{1}{2} x . E \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2} x} -$$

$$-[3\cos x-(p-2+\cos x)\Delta^2] \frac{2 \sin^{p-5} \frac{1}{2} x}{\cos^{p+1} \frac{1}{2} x} - \frac{4\, tang^{p-4} \frac{1}{2} x}{\cos^4 \frac{1}{2} x} \Delta^3 \Big\} \ldots\ldots \text{(XLII)}$$

Als p even is, stelle men $p=4$ voor de eindintegralen: men vindt dan de integralen (139), (137) en (138). Als p oneven is daarentegen, stelle men $p=5$, en vindt dan de integralen (134) en (136), terwijl dan de laatste eene vreemde, onbekende blijft; maar die heeft tot factor $(p-4)(p-5)$, zoodat zij in beide gevallen, voor $p=4$ en $p=5$, geheel verdwijnt.

4. Er blijven nog de beide laatste herleidingsvergelijkingen (D) over, die een cosinus in den noemer bezitten. Daarvan geeft de eerste (D_7)

$$(p-1)(1-k^2) \Big\{ \frac{1}{\cos^p x} E - p \int \frac{\sin x}{\cos^{p+1} x} E\,dx \Big\} = \frac{\sin x}{\cos^{p-1} x} \Delta^3 +$$

$$+[(p-2)-(p-3)2k^2] \Big\{ \frac{1}{\cos^{p-2} x} E - (p-2) \int \frac{\sin x}{\cos^{p-1} x} E\,dx \Big\} +$$

$$+(p-5)k^2 \Big\{ \frac{1}{\cos^{p-4} x} E - (p-4) \int \frac{\sin x}{\cos^{p-3} x} E\,dx \Big\}.$$

In deze vergelijking moet men nu $p-1$ stellen in de plaats van p, en verkrijgt dan na behoorlijke herleiding

$$\int \frac{\sin x}{\cos^p x} E\,dx = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)} \Big\{ [(p-3)-(p-4)2k^2](p-3) \int \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x} E\,dx +$$

$$+(p-5)(p-6) \int \frac{\sin x}{\cos^{p-4} x} E\,dx - [3\cos^2 x - \{4+$$

$$+(p-6)\sin^2 x\}\Delta^2] \frac{1}{\cos^{p-1} x} E - \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x} \Delta^3 \Big\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(XLIII)}$$

Ten opzichte van de eindintegralen, komen er bij evene waarden van p, voor $p=4$, de integralen (130) en (127): en evenzeer bij onevene waarden, voor $p=7$ de integralen (140) en (122).

Ten slotte geeft de laatste der algemeene herleidingsvergelijkingen (D), namelijk (D_8), door middel van ons theorema

$$(p-1)\left\{\frac{1}{\cos^p\frac{1}{2}x}E-\frac{1}{2}p\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p+1}\frac{1}{2}x}E\,dx\right\}=\frac{\sin x}{\cos^p\frac{1}{2}x}\Delta^3+[(p-2)+(p-4)4k^2]\left\{\frac{1}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}E-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}(p-2)\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}E\,dx\right\}-(p-6)8k^2\left\{\frac{1}{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}E-\frac{1}{2}(p-4)\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-3}\frac{1}{2}x}E\,dx\right\}+$$
$$+(p-8)4k^2\left\{\frac{1}{\cos^{p-6}\frac{1}{2}x}E-\frac{1}{2}(p-6)\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-5}\frac{1}{2}x}E\,dx\right\};$$

en deze wordt, als men p door $p-1$ vervangt, en verder even als telkens vroeger herleidt,

$$\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^p\frac{1}{2}x}E\,dx=\frac{1}{(p-1)(p-2)}\left\{[(p-3)+(p-5)4k^2]\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}E\,dx-\right.$$
$$-(p-5)(p-7)8k^2\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}E\,dx+(p-7)(p-9)4k^2\int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-6}\frac{1}{2}x}E\,dx-$$
$$\left.-[6\cos x-\{(p-1)-(p-9)\cos x\}\Delta^2]\frac{1}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}E-\frac{2\sin x}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}\Delta^3\right\}\quad\ldots\text{(XLIV)}$$

Als eindintegralen komen hier bij evene p, voor $p=4$, de integralen (148), (146), (147), en bij onevene p, voor $p=7$, de integralen (141) en (136), terwijl wegens den factor $p-7$ de laatste integraal wegvalt, die hier ook onbekend is.

5. Op deze acht herleidingsformulen (XXXVII) tot (XLIV) kan men ook dezelfde herleidingen toepassen, als op het eerste achttal (I) tot (VIII) in Hoofdstuk II, § 10 tot 13 is gedaan. Daarbij is het echter evenzeer noodig een zevental nieuwe transcendenten intevoeren, die van de vorige slechts daarin verschillen, dat zij de functie E, in plaats van de vorige F, bevatten. De vorm der integralen wordt nu evenwel zoo merkelijk eenvoudiger, dat zij in dit zamenstel met volle recht eene plaats verdienen.

Men neme den niet herleiden vorm der vergelijking (XXXVII), zooals zij rechtstreeks ontstaat uit de herleidingsformule (D_1), en voere bij haar de goniometrische herleiding in

$$\sin^l x.\cos x=\frac{\sin^l x}{\cos x}\cos^2 x=\frac{\sin^l x}{\cos x}(1-\sin^2 x)=\frac{1}{\cos x}(\sin^l x-\sin^{l+2}x);$$

dan verkrijgt men vooreerst

$$(p+1)k^2 \left\{ sin^p x . E - p\left(\int sin^{p-1} x . E \frac{dx}{cos\, x} - \int sin^{p+1} x . E \frac{dx}{cos\, x} \right) \right\} =$$

$$= cos\, x . sin^{p-3} x . \Delta^3 + [(p-2) + p k^2] \left\{ sin^{p-2} x . E - \right.$$

$$-(p-2)\left(\int sin^{p-3} x . E \frac{dx}{cos\, x} - \int sin^{p-1} x . E \frac{dx}{cos\, x} \right)\right\} - (p-3) \left\{ sin^{p-4} x . E - \right.$$

$$\left. -(p-4)\left(\int sin^{p-5} x . E \frac{dx}{cos\, x} - \int sin^{p-3} x . E \frac{dx}{cos\, x} \right) \right\}.$$

In deze uitkomst stelle men eerst $p-1$ voor p, brenge dan de gelijknamige integralen bijeen, en voere verder de noodige herleidingen uit; dan komt er eindelijk

$$\int sin^p x . E \frac{dx}{cos\, x} = \frac{1}{p(p-1)k^2} \left\{ [(p-3)^2 + (p-1)(2p-3)k^2] \int sin^{p-2} x . E \frac{dx}{cos\, x} - \right.$$

$$- [(2p^2 - 15p + 29) + (p-3)(p-1)k^2] \int sin^{p-4} x . E \frac{dx}{cos\, x} +$$

$$+ (p-4)(p-5) \int sin^{p-6} x . E \frac{dx}{cos\, x} + [3 cos^2 x + (1 - p\, cos^2 x)\Delta^2]\, sin^{p-5} x . E +$$

$$\left. + sin^{p-4} x . cos\, x . \Delta^3 \right\} . \quad \ldots \quad \text{(XLV)}$$

Verder gebruike men bij den niet herleiden vorm der herleidingsformule (XXXVIII) de goniometrische herleiding

$$sin\, x . cos^l x = \frac{cos^l x}{sin\, x} sin^2 x = \frac{cos^l x}{sin\, x}(1 - cos^2 x) = \frac{1}{sin\, x}(cos^l x - cos^{l+2} x);$$

men vindt alzoo dadelijk

$$(p+1)k^2 \left\{ cos^p x . E + p\left(\int cos^{p-1} x . E \frac{dx}{sin\, x} - \int cos^{p+1} x . E \frac{dx}{sin\, x} \right) \right\} =$$

$$= sin\, x . cos^{p-3} x . \Delta^3 - [(p-2) - (p-1)2k^2] \left\{ cos^{p-2} x . E + \right.$$

$$+(p-2)\left(\int cos^{p-3} x . E \frac{dx}{sin\, x} - \int cos^{p-1} x . E \frac{dx}{sin\, x} \right)\right\} + (p-3)(1-k^2) \left\{ cos^{p-4} x . E + \right.$$

$$\left. + (p-4)\left(\int cos^{p-5} x . E \frac{dx}{sin\, x} - \int cos^{p-3} x . E \frac{dx}{sin\, x} \right) \right\};$$

of, wanneer men eerst p door $p-1$ vervangt, daarop de gelijknamige integralen bij elkander brengt, en weder als boven herleidt,

$$\int \cos^p x \,.\, E \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{p(p-1)k^2} \Big\{ -\left[(p-3)^2 - (3p^2-11p+12)k^2 \right] \int \cos^{p-2} x \,.\, E \frac{dx}{\sin x} +$$

$$+ \left[(2p^2-15p+29) - (3p^2-19p+32)k^2 \right] \int \cos^{p-4} x \,.\, E \frac{dx}{\sin x} -$$

$$-(p-4)(p-5)(1-k^2) \int \cos^{p-6} x \,.\, E \frac{dx}{\sin x} - \left[3\cos^2 x - (4 - p\sin^2 x)\Delta^2 \right] \cos^{p-5} x \,.\, E -$$

$$- \sin x \,.\, \cos^{p-4} x \,.\, \Delta^3 \Big\} \ldots\ldots \text{(XLVI)}$$

Ten slotte moet men nog in den niet herleiden vorm der herleidingsformule (XXXIX) de goniometrische herleiding

$$\frac{\tan g^l x}{\cos^2 x} = \tan g^l x\,(1 + \tan g^2 x) = \tan g^l x + \tan g^{l+2} x$$

invoeren, om te komen tot de vergelijking

$$(p-1)(1-k^2) \Big\{ \tan g^p x \,.\, E - p \Big(\int \tan g^{p-1} x \,.\, E\,dx + \int \tan g^{p+1} x \,.\, E\,dx \Big) \Big\} =$$

$$= \frac{\tan g^{p-2} x}{\sin x \,.\, \cos x} \Delta^3 - \left[(p-2)\,2 - p k^2 \right] \Big\{ \tan g^{p-2} x \,.\, E -$$

$$-(p-2) \Big(\int \tan g^{p-3} x \,.\, E\,dx + \int \tan g^{p-1} x \,.\, E\,dx \Big) \Big\} - (p-3) \Big\{ \tan g^{p-4} x \,.\, E -$$

$$-(p-4) \Big(\int \tan g^{p-5} x \,.\, E\,dx + \int \tan g^{p-3} x \,.\, E\,dx \Big) \Big\}.$$

Stelt men in deze uitkomst $p-1$ voor p, en herleidt dan op dezelfde wijze, als reeds vroeger, dan komt er

$$\int \tan g^p x . E dx = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)} \Big\{ -\left[(3p^2-15p+20) - (p-1)(2p-5)k^2 \right] \int \tan g^{p-2} x . E dx -$$

$$-\left[(3p^2-21p+38) - (p-1)(p-3)k^2 \right] \int \tan g^{p-4} x . E dx - (p-4)(p-5) \int \tan g^{p-6} x . E dx -$$

$$- \left[3\cos^2 x - (p-1-\sin^2 x)\Delta^2 \right] \frac{\sin^{p-5} x}{\cos^{p-1} x} E - \frac{\tan g^{p-3} x}{\sin x \,.\, \cos x} \Delta^3 \Big\} \ldots\ldots \text{(XLVII)}$$

Zoodra men echter bij deze drie herleidingsformulen de eindintegralen wil opmaken, stoot men dadelijk op onbekende, vreemde integralen, die hier algemeen als nieuwe transcendenten optreden. Deze zijn vooreerst

$$\int \frac{dx}{\cos x} E = \alpha_1, \qquad \int \frac{dx}{\sin x} E = \beta_1, \qquad \int \frac{\sin x}{\cos x} E\,dx = \gamma_1, \qquad \int \frac{\cos x}{\sin x} E\,dx = \delta_1,$$

dus $\int \frac{dx}{\sin x . \cos x} E = \gamma_1 + \delta_1; \qquad \int E\,dx = \varepsilon_1; \ldots\ldots (\gamma)$

en deze zijn hier genoegzaam, om alle eindintegralen te kunnen uitdrukken.

Vooreerst voor de herleidingsformule (XLV), en wel bij evene p, voor $p = 6$,

$$\int \frac{dx}{\cos x} E = \alpha_1 \, , \ldots\ldots (149)$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} E\,dx = \int \frac{dx}{\cos x} E - \int \cos x . E\,dx = \alpha_1 - \sin x . E + \frac{1}{2} -$$

$$- \frac{1}{2k}(1 - k^2)\, L \frac{\Delta + k \cos x}{1 + k} - \frac{1}{2} \cos x . \Delta, \ldots\ldots (150)$$

met behulp van de integraal (126). Vervolgens

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos x} E\,dx = \int \frac{dx}{\cos x} E - \int \cos x . E\,dx - \int \sin^2 x . \cos x . E\,dx.$$

Deze laatste verkrijgt men bij de onderstelling $p = 2$ uit de algemeene herleidingsformule (XXXVII)

$$\int \sin^2 x . \cos x . E dx = \frac{1}{12k^2} \left\{ (1 + 3k^2) \int \cos x . E dx - [3 \cos^2 x + (1 - 4 \cos^2 x) \Delta^2] \frac{1}{\sin x} E - \cos x . \Delta^3 + 1 \right\},$$

dus volgens de integraal (126)

$$= \frac{1}{24\,k^2} \Big\{ 8\,k^2 \sin^3 x . E + (1 - 3\,k^2) + \frac{1}{k}(1 - k^2)(1 + 3\,k^2)\, L \frac{\Delta + k \cos x}{1 + k} +$$

$$+ (1 + 3\,k^2 - 2\,\Delta^2) \cos x . \Delta \Big\} ; \ldots\ldots (151)$$

*

en nu verkrijgt men ook

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos x} E\,dx = \alpha_1 + \frac{1}{24 k^2} \Big\{ (3 + \sin^2 x)\, 8k^2 \sin x \,.\, E + (1 - 15 k^2) +$$

$$+ \frac{1}{k}(1 - k^2)(1 + 15 k^2)\, L \frac{\Delta + k \cos x}{1 + k} + (1 + 15 k^2 - 2 \Delta^2) \cos x \,.\, \Delta \Big\} \,. \quad . \quad . \quad (152)$$

Terwijl men voor onevene p stellen moet $p = 5$, en alsdan voor de eindintegralen vindt

$$\int \frac{dx}{\sin x \,.\, \cos x} E = \gamma_1 + \delta_1 \,, \quad \ldots \ldots \quad (153)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} E\,dx = \gamma_1, \quad \ldots \ldots \quad (154)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} E\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} E\,dx - \int \sin x \,.\, \cos x \,.\, E\,dx = \gamma_1 - \frac{1}{6 k^2} \Big\{ (4 - 2 k^2 - 3 \Delta^2) E -$$

$$- (1 - k^2) F + k^2 \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \Big\}, \quad \ldots \ldots \quad (155)$$

waarbij men van de integraal (121) gebruik maakte.

Wat de herleidingsformule (XLVI) aangaat, vindt men als eindintegralen, bij evene waarden van p, voor $p = 6$, de volgende integralen

$$\int \frac{dx}{\sin x} E = \beta_1, \quad \ldots \ldots \quad (156)$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} E\,dx = \int \frac{dx}{\sin x} E - \int \sin x \,.\, E\,dx = \beta_1 + \cos x \,.\, E - \frac{1}{2 k} Bg \sin(k \sin x) - \frac{1}{2} \sin x \,.\, \Delta, \quad . \quad (157)$$

waar men tot de integraal (127) zijn toevlucht moet nemen. Daarop volgt

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin x} E\,dx = \int \frac{dx}{\sin x} E - \int \sin x \,.\, E\,dx - \int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, E\,dx,$$

waarvan de laatste uit de algemeene herleidingsformule (XXXVIII) te verkrijgen is, als men daarin $p = 2$ stelt.

$$\int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, E\,dx = \frac{1}{12 k^2} \Big\{ -(1 - 4 k^2) \int \sin x . E dx + [3 \cos^2 x - 4 \cos^2 x . \Delta^2] \frac{1}{\cos x} E + \sin x . \Delta^3 \Big\},$$

dat is, als men de integraal (127) invoert,

$$= \frac{1}{24\,k^2}\left\{-8\,k^2 \cos^3 x \,.\, E - \frac{1}{k}(1-4\,k^2)\; Bg\sin(k\sin x) - (1-4\,k^2-2\Delta^2)\sin x \,.\, \Delta\right\}; \quad (158)$$

waardoor nu de vorige formule levert

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin x} E\,dx = \beta_1 + \frac{1}{24\,k^2}\left\{(3+\cos^2 x)\, 8\,k^2 \cos x \,.\, E + \frac{1}{k}(1-16\,k^2)\; Bg\sin(k\sin x) + \right.$$

$$\left. + (1-16\,k^2-2\,\Delta^2)\sin x \,.\, \Delta\right\} \quad (159)$$

Voorts stelle men voor onevene waarden van p ook hier $p=5$, waardoor men gebracht wordt tot de volgende integralen.

$$\int \frac{dx}{\sin x \,.\, \cos x} E = \gamma_1 + \delta_1, \quad (153)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} E\,dx = \delta_1, \quad (160)$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} E\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} E\,dx - \int \sin x \,.\, \cos x \,.\, E\,dx = \delta_1 - \frac{1}{6\,k^2}\left\{(4-2\,k^2-3\,\Delta^2)E - \right.$$

$$\left. - (1-k^2)\,F + k^2 \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\right\}, \quad (161)$$

waarbij de integraal (121) werd gebruikt.

Eindelijk zoeke men de eindintegralen voor de herleidingsformule (XLVII), en wel eerst voor evene p, als men $p=6$ stelt. In dit geval komen er de integralen.

$$\int E\,dx = \varepsilon_1, \quad (162)$$

$$\int \tan g^2 x \,.\, E\,dx = -\int E\,dx + \int \frac{dx}{\cos^2 x} E = -\varepsilon_1 + \tan g\, x \,.\, E - 1 -$$

$$-\sqrt{1-k^2}\; L\, \frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x} + \Delta, \quad (163)$$

volgens de integraal (128). Daarop volgt

$$\int tang^4 x . E\,dx = \int E\,dx - \int \frac{dx}{\cos^2 x} E + \int \frac{tang^2 x}{\cos^2 x} E\,dx.$$

Deze laatste kan men uit de herleidingsformule (XXXIX) afleiden, waarbij men dan $p = 2$ moet stellen; dit levert

$$\int \frac{tang^2 x}{\cos^2 x} E\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} E\,dx = \frac{1}{6(1-k^2)} \Big\{ -(2-3k^2) \int \frac{dx}{\cos^2 x} E - \big[3\cos^2 x -$$

$$-(2+\cos^2 x)\Delta^2 \big] \frac{1}{\sin x . \cos^3 x} E - \frac{1}{\cos^2 x} \Delta^3 + 1 \Big\},$$

of, met behulp van de integraal (128),

$$= \frac{1}{6(1-k^2)} \Big\{ (1-k^2)\, 2\, tang^3 x . E + 3(1-k^2) + (2-3k^2)\sqrt{1-k^2}\, L \frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{\cos x\,(1+\sqrt{1-k^2})} -$$

$$-(1+2\cos^2 x)(1-k^2) \frac{\Delta}{\cos^2 x} \Big\}; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (164)$$

derhalve is nu

$$\int tang^4 x . E\,dx = \varepsilon_1 + \frac{1}{6(1-k^2)} \Big\{ (1-4\cos^2 x)(1-k^2) \frac{2\, tang\, x}{\cos^2 x} E + 9(1-k^2) +$$

$$+ (8-9k^2)\sqrt{1-k^2}\, L \frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{\cos x\,(1+\sqrt{1-k^2})} - (1+8\cos^2 x)(1-k^2) \frac{\Delta}{\cos^2 x} \Big\}. \quad . \; . \; (165)$$

Bij onevene waarden van p stelle men $p = 5$, en verkrijgt alzoo

$$\int \cot x . E\,dx = \delta_1, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (160)$$

$$\int tang\, x . E\,dx = \gamma_1, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (154)$$

en met behulp van de integraal (122) nog

$$\int tang^3 x \,.\, E dx = -\gamma_1 + \frac{1}{2}\{(1 + sec^2 x) E - F - tang\, x \,.\, \Delta\} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (166)$$

Wanneer men de hier gevonden integralen (151), (158) en (164) in verband brengt met de vorige integralen (126), (127) en (128), volgt daaruit, na herleiding,

$$\int cos^3 x \,.\, E dx = \int cos\, x \,.\, E dx - \int sin^2 x \,.\, cos\, x \,.\, E dx = \frac{1}{24 k^2} \Big\{ (2 + cos^2 x)\, 8 k^2 sin\, x \,.\, E +$$

$$- (1 + 9 k^2) - \frac{1}{k}(1 - k^2)(1 - 9 k^2)\, L \frac{\Delta + k\, cos\, x}{1 + k} - (1 - 9 k^2 - 2 \Delta^2)\, cos\, x \,.\, \Delta \Big\}, \,.\, (167)$$

$$\int sin^3 x \,.\, E dx = \int sin\, x \,.\, E dx - \int sin\, x \,.\, cos^2 x\, E dx = \frac{1}{24 k^2} \Big\{ - (2 + sin^2 x)\, 8 k^2 cos\, x \,.\, E +$$

$$+ \frac{1}{k}(1 + 8 k^2)\, Bg\, sin\, (k\, sin\, x) + (1 + 8 k^2 - 2 \Delta^2)\, sin\, x \,.\, \Delta \Big\}, \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (168)$$

$$\int \frac{dx}{cos^4 x} E = \int \frac{dx}{cos^2 x} E + \int \frac{tg^2 x}{cos^2 x} E dx = \frac{1}{6(1 - k^2)} \Big\{ (2 + sec^2 x)(1 - k^2)\, 2 E - 3 (1 - k^2) -$$

$$- (4 - 3 k^2) \sqrt{1 - k^2}\, L \frac{\sqrt{1 - k^2} + \Delta}{cos\, x (1 + \sqrt{1 - k^2})} - (1 - 4 cos^2 x)(1 - k^2) \frac{\Delta}{cos^2 x} \Big\}. \,.\, (169)$$

6. Dergelijke herleidingen kan men even goed toepassen op die herleidingsformulen, welke in plaats van de geheele x de halve x bevatten, namelijk (XL), (XLI) en (XLII); maar ook hier zal men weder stuiten op enkele vreemde, onbekende eindintegralen, die dan den rol van nieuwe transcendenten vervullen.

Beginnen wij met de herleidingsformule (XL), zooals zij eerst rechtstreeks was afgeleid, dus voor dat zij verder veranderd was, en voeren wij daarbij de goniometrische vergelijking in

$$sin^l \tfrac{1}{2} x \,.\, cos \tfrac{1}{2} x = \frac{sin^l \frac{1}{2} x}{cos \frac{1}{2} x} cos^2 \tfrac{1}{2} x = \frac{sin^l \frac{1}{2} x}{cos \frac{1}{2} x}(1 - sin^2 \tfrac{1}{2} x) = \frac{1}{cos \frac{1}{2} x}(sin^l \tfrac{1}{2} x - sin^{l+2} \tfrac{1}{2} x);$$

dan verkrijgen wij

$$(p+2)4k^2 \left\{ \sin^p \tfrac{1}{2}x \, . \, E - \frac{1}{2}p \left(\int \sin^{p-1} \tfrac{1}{2}x \, . \, E \frac{dx}{\cos \frac{1}{2}x} - \int \sin^{p+1} \tfrac{1}{2}x \, . \, E \frac{dx}{\cos \frac{1}{2}x} \right) \right\} =$$

$$= - \sin x \, . \, \sin^{p-6} \tfrac{1}{2}x . \Delta^3 + 8pk^2 \left\{ \sin^{p-2} \tfrac{1}{2}x \, . \, E - \frac{1}{2}(p-2) \left(\int \sin^{p-3} \tfrac{1}{2}x \, . \, E \frac{dx}{\cos \frac{1}{2}x} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int \sin^{p-1} \tfrac{1}{2}x \, . \, E \frac{dx}{\cos \frac{1}{2}x} \right) \right\} - [(p-4) + (p-2)4k^2] \left\{ \sin^{p-4} \tfrac{1}{2}x \, . \, E - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}(p-4) \left(\int \sin^{p-5} \tfrac{1}{2}x \, . \, E \frac{dx}{\cos \frac{1}{2}x} - \int \sin^{p-3} \tfrac{1}{2}x \, . \, E \frac{dx}{\cos \frac{1}{2}x} \right) \right\} +$$

$$+ (p-5) \left\{ \sin^{p-6} \tfrac{1}{2}x \, . \, E - \frac{1}{2}(p-6) \left(\int \sin^{p-7} \tfrac{1}{2}x \, . \, E \frac{dx}{\cos \frac{1}{2}x} - \int \sin^{p-5} \tfrac{1}{2}x \, . \, E \frac{dx}{\cos \frac{1}{2}x} \right) \right\}.$$

Ten einde deze in een geschikten vorm te brengen, vervange men eerst p door $p-1$, en brenge vervolgens de gelijknamige integralen bij elkander; dan verkrijgt men na behoorlijke herleiding

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2}x \, . \, E \frac{dx}{\cos \frac{1}{2}x} = \frac{1}{(p^2-1)4k^2} \left\{ (p-1)(3p-5)4k^2 \int \sin^{p-2} \tfrac{1}{2}x \, . \, E \frac{dx}{\cos \frac{1}{2}x} - \right.$$

$$- [(p-5)^2 + (p-3)(3p-7)4k^2] \int \sin^{p-4} \tfrac{1}{2}x \, . \, E \frac{dx}{\cos \frac{1}{2}x} + [(2p^2 - 23p + 67) +$$

$$+ (p-3)(p-5)4k^2] \int \sin^{p-6} \tfrac{1}{2}x \, . \, E \frac{dx}{\cos \frac{1}{2}x} - (p-6)(p-7) \int \sin^{p-8} \tfrac{1}{2}x \, . \, E \frac{dx}{\cos \frac{1}{2}x} -$$

$$\left. - [6 \cos x - \{(p-7) + (p+1)\cos x\} \Delta^2] \sin^{p-7} \tfrac{1}{2}x \, . \, E - 2 \sin x \, . \, \sin^{p-7} \tfrac{1}{2}x . \Delta^3 \right\} \, . \, . \quad \text{(XLVIII)}$$

Evenzoo kan men in de niet herleide algemeene herleidingsformule (XLI) gebruik maken van de goniometrische herleiding

$$\sin \tfrac{1}{2}x \, . \, \cos^l \tfrac{1}{2}x = \frac{\cos^l \frac{1}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x} \sin^2 \tfrac{1}{2}x = \frac{\cos^l \frac{1}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x}(1 - \cos^2 \tfrac{1}{2}x) = \frac{1}{\sin \frac{1}{2}x}(\cos^l \tfrac{1}{2}x - \cos^{l+2} \tfrac{1}{2}x),$$

en langs dien weg de volgende vergelijking afleiden.

$$(p+2)\,4k^2 \left\{ \cos^p \tfrac{1}{2} x \,.\, E + \frac{1}{2} p \left(\int \cos^{p-1} \tfrac{1}{2} x \,.\, E \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} - \int \cos^{p+1} \tfrac{1}{2} x \,.\, E \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} \right) \right\} =$$

$$= \sin x \,.\, \cos^{p-6} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta^3 + 8pk^2 \left\{ \cos^{p-2} \tfrac{1}{2} x \,.\, E + \frac{1}{2}(p-2) \left(\int \cos^{p-3} \tfrac{1}{2} x \,.\, E \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int \cos^{p-1} \tfrac{1}{2} x \,.\, E \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} \right) \right\} - [\,(p-4) + (p-2)\,4k^2\,] \left\{ \cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x \,.\, E + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(p-4) \left(\int \cos^{p-5} \tfrac{1}{2} x \,.\, E \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} - \int \cos^{p-3} \tfrac{1}{2} x \,.\, E \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} \right) \right\} + (p-5) \left\{ \cos^{p-6} \tfrac{1}{2} x + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(p-6) \left(\int \cos^{p-7} \tfrac{1}{2} x \,.\, E \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} - \int \cos^{p-5} \tfrac{1}{2} x \,.\, E \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} \right) \right\}.$$

Ook hier moet men $p-1$ voor p in de plaats stellen, daarna de gelijknamige integralen bij elkander brengen; daarop zal eene behoorlijke herleiding de volgende formule opleveren.

$$\int \cos^p \tfrac{1}{2} x \,.\, E \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} = \frac{1}{(p^2-1)\,4k^2} \left\{ (p-1)(3p-5)\,4k^2 \int \cos^{p-2} \tfrac{1}{2} x \,.\, E \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} - \right.$$

$$- [\,(p-5)^2 + (p-3)(3p-7)\,4k^2\,] \int \cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x \,.\, E \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} + [\,(2p^2-23p+67) +$$

$$+ (p-3)(p-5)\,4k^2] \int \cos^{p-6} \tfrac{1}{2} x \,.\, E \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} - (p-6)(p-7) \int \cos^{p-8} \tfrac{1}{2} x \,.\, E \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} -$$

$$\left. - [6 \cos x + \{(p-7)-(p+1)\cos x\}\,\Delta^2] \cos^{p-7} \tfrac{1}{2} x \,.\, E - 2 \sin x \,.\, \cos^{p-7} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta^3 \right\} . \; . \quad \text{(XLIX)}$$

Eindelijk gebruike men de goniometrische herleidingsformule

$$\frac{\tan g^l \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} = \tan g^l \tfrac{1}{2} x \,.\, \sec^2 \tfrac{1}{2} x = \tan g^l \tfrac{1}{2} x \,(1 + \tan g^2 \tfrac{1}{2} x) = \tan g^l \tfrac{1}{2} x + \tan g^{l+2} \tfrac{1}{2} x$$

bij den niet herleiden vorm van de algemeene herleidingsformule (XLII), zooals deze rechtstreeks wordt gevonden; dan komt er

$$(p-1)\left\{ tang^p \tfrac{1}{2}x . E - \frac{1}{2}p\left(\int tang^{p-1}\tfrac{1}{2}x . E dx + \int tang^{p+1}\tfrac{1}{2}x . E dx\right)\right\} =$$

$$= \frac{2\, tang^{p-5}\frac{1}{2}x}{cos^4 \frac{1}{2}x}\Delta^3 - [(3p-7)-(p-4)4k^2]\left\{tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x - \frac{1}{2}(p-2)\left(\int tang^{p-3}\tfrac{1}{2}x . E dx + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int tang^{p-1}\tfrac{1}{2}x . E dx\right)\right\} - [(3p-11)-(p-2)4k^2]\left\{ tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x . E - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}(p-4)\left(\int tang^{p-5}\tfrac{1}{2}x . E dx + \int tang^{p-3}\tfrac{1}{2}x . E dx\right)\right\} - (p-5)\left\{tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x . E - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}(p-6)\left(\int tang^{p-7}\tfrac{1}{2}x . E dx + \int tang^{p-5}\tfrac{1}{2}x . E dx\right)\right\}.$$

In deze vergelijking stelle men eerst $p-1$ voor p, vereenige dan de gelijkvormige integralen, en voere de noodzakelijke herleidingen uit, zoodat men ten slotte verkrijgt

$$\int tang^p \tfrac{1}{2}x . E dx = \frac{1}{(p-1)(p-2)}\left\{ - [(2p^2 - 11p + 16) - \right.$$

$$- (p-3)(p-5)2k^2]\, 2\int tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x . E dx - [(3p^2 - 24p + 50) -$$

$$- (p-3)(p-5)4k^2]\, 2\int tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x . E dx - [(2p^2 - 21p + 56) -$$

$$- (p-3)(p-5)2k^2]\, 2\int tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x . E dx - (p-6)(p-7)\int tang^{p-8}\tfrac{1}{2}x . E dx -$$

$$\left. - [3\cos x - (p-4+\cos x)\Delta^2]\frac{2\sin^{p-7}\frac{1}{2}x}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}E - \frac{4\, tang^{p-6}\frac{1}{2}x}{\cos^4\frac{1}{2}x}\Delta^3\right\} . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (L)$$

Zoodra men hier bij deze drie algemeene herleidingsformulen de eindintegralen bepalen wil, treden er weder eenige vreemde, onbekende integralen als nieuwe transcendenten op, namelijk

$$\int\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x}E = \zeta_1, \qquad \int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x}E = \eta_1, \qquad \int\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x}E dx = \beta_1 - \delta_1,$$

$$\int\frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}E dx = \beta_1 + \delta_1, \qquad \int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x . \cos\frac{1}{2}x}E = 2\beta_1 . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\delta)$$

Zoo vindt men voor de eindintegralen van de herleidingsformule (XLVIII), als men vooreerst p even onderstelt, voor $p = 8$, de integralen

$$\int \frac{dx}{\cos \frac{1}{2} x} E = \zeta_1, \quad \ldots \ldots (170)$$

$$\int \frac{\sin^2 \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} F dx = \int \frac{dx}{\cos \frac{1}{2} x} E dx - \int \cos \tfrac{1}{2} x . E dx = \zeta_1 - 2 \sin \tfrac{1}{2} x . E -$$

$$- \frac{4}{3\sqrt{2k}} \left\{ 2kE(l,y) + (1-k)F(l,y) + \frac{1-k+k\cos x}{1+k+k\cos x} \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \right\}, \quad \ldots (171)$$

met behulp van de integraal (143);

$$\int \frac{\sin^4 \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} E dx = \int \frac{\sin^2 \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} E dx - \int \sin^2 \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x . E dx = \zeta_1 - \frac{1}{3}(7 - \cos x) \sin \tfrac{1}{2} x . E +$$

$$+ \frac{2}{45k\sqrt{2k}} \left\{ (1-k)(1-12k) 3F(l,y) - (1+12k^2) 6E(l,y) - \right.$$

$$\left. - \left[(1+44k+4k^2) - 4(1+k)k\cos x - \frac{2(4+5k+40k^2) - (1+4k)\Delta^2}{1+k+k\cos x} \right] \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \right\}, \quad . (172)$$

wanneer men daarbij gebruik maakt van de integraal (144).

Verder is nog

$$\int \frac{\sin^6 \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} E dx = \int \frac{\sin^4 \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} E dx - \int \sin^4 \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x . E dx.$$

Ten einde deze laatste integraal te bepalen, stelle men $p = 4$ in de herleidingsformule (XL)

$$\int \sin^4 \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x . E dx = \frac{1}{140 k^2} \left\{ 120 k^2 \int \sin^2 \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x . E dx - \right.$$

$$\left. - (1+12k^2) \int \cos \tfrac{1}{2} x . E dx + [6 \cos x + (1 - 7\cos x) \Delta^2] \frac{E}{\sin \frac{1}{2} x} + 2 \frac{\sin x}{\sin \frac{1}{2} x} \Delta^3 \right\},$$

of, met invoering van de integralen (144) en (143),

$$= \frac{1}{35 k^2} \left\{ 14 k^2 \sin^5 \tfrac{1}{2} x . E - \frac{1}{3\sqrt{2k}} \left[(1 + 12k - 12k^2)(1-k) F(l,y) - \right. \right.$$

$$- (11 + 12k^2) 2k E(l,y) - [(-1 + 4k + 44k^2 + 16k^3) - 16(1+k) k^2 \cos x -$$

$$\left. \left. - 3\Delta^3 - 2k \frac{(15 + 20k + 28k^2) - (1+4k) 2\Delta^2}{1+k+k\cos x}] \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \right] \right\}; \quad \ldots (173)$$

*

en hiermede wordt nu de vorige integraal

$$\int \frac{sin^6 \tfrac{1}{2} x}{cos \tfrac{1}{2} x} E\,dx = \zeta_1 + \frac{1}{315\,k^2} \Big\{ -(73 - 16\,cos\,x + 3\,cos^2 x) \frac{21}{2} k^2 sin \tfrac{1}{2} x . E +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\,k}} \Big[(1 + 26\,k - 180\,k^2)(1-k)\,3\,F(l,y) - (5 + 36\,k^2)\,30\,k\,E(l,y) +$$

$$+ [-(3 - 26\,k - 728\,k^2 - 104\,k^3) + 104\,(1+k)\,k^2 cos\,x + 9\,\Delta^3 -$$

$$- 2k\,\frac{(63 + 95\,k + 364\,k^2) - (1 + 4\,k)\,13\,\Delta^2}{1 + k + k\,cos\,x}]\,cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big] \Big\} \ldots\ldots \quad (174)$$

Wanneer men daarentegen p oneven onderstelt, dan komen er als eindintegralen, voor $p = 7$, de integralen

$$\int \frac{dx}{sin \tfrac{1}{2} x . cos \tfrac{1}{2} x} E = 2\,\beta_1, \ldots\ldots \quad (175)$$

$$\int \frac{sin \tfrac{1}{2} x}{cos \tfrac{1}{2} x} E\,dx = \beta_1 - \delta_1, \ldots\ldots \quad (176)$$

$$\int \frac{sin^3 \tfrac{1}{2} x}{cos \tfrac{1}{2} x} E\,dx = \int \frac{sin \tfrac{1}{2} x}{cos \tfrac{1}{2} x} E\,dx - \int sin \tfrac{1}{2} x . cos \tfrac{1}{2} x . E\,dx = \beta_1 - \delta_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} cos\,x . E - \frac{1}{4\,k} Bg\,sin\,(k\,sin\,x) - \frac{1}{4} sin\,x . \Delta, \ldots\ldots \quad (177)$$

volgens de integraal (127);

$$\int \frac{sin^5 \tfrac{1}{2} x}{cos \tfrac{1}{2} x} E\,dx = \int \frac{sin^3 \tfrac{1}{2} x}{cos \tfrac{1}{2} x} E\,dx - \int sin^3 \tfrac{1}{2} x . cos \tfrac{1}{2} x . E\,dx = \beta_1 - \delta_1 +$$

$$+ \frac{1}{24\,k^2} \Big\{ [4 - (1 - 9\,cos\,x)\,2\,k^2 - 3\,\Delta^2]\,E - (1 - k^2)\,F - 9\,k\,Bg\,sin\,(k\,sin\,x) -$$

$$- (9 - cos\,x)\,k^2 sin\,x . \Delta \Big\}, \ldots\ldots \quad (178)$$

wanneer men daarbij de integraal (132) invoert.

Ten aanzien van de eindintegralen voor de algemeene herleidingsformule (XLIX) kan men op soortgelijke wijze te werk gaan; men neme vooreerst p even aan, en onderstelle daartoe $p = 8$, zoo komen er de integralen

$$\int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} E = \eta_1 , \quad \ldots \ldots \quad (179)$$

$$\int \frac{\cos^2 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} E\,dx = \int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} E - \int \sin \tfrac{1}{2} x . E\,dx = \eta_1 + 2 \cos \tfrac{1}{2} x . E -$$

$$- \frac{4}{3\sqrt{2k}} \left\{ 2kE(l,z) + (1-k) F(l,z) + \frac{1-k-k\cos x}{1+k-k\cos x} \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \right\}, \ldots (180)$$

na invoering van de integraal (146); terwijl die van dezelfde en van de integraal (147) noodig is bij de volgende

$$\int \frac{\cos^4 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} E\,dx = \int \frac{\cos^2 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} E\,dx - \int \cos^2 \tfrac{1}{2} x . \sin \tfrac{1}{2} x . E\,dx = \eta_1 + \frac{1}{3} (7 + \cos x) \cos \tfrac{1}{2} x . E -$$

$$- \frac{2}{45k\sqrt{2k}} \left\{ (1 + 12k^2)\, 6E(l,z) - (1-k)(1-12k)\, 3F(l,z) + \right.$$

$$\left. + \left[(1+44k+4k^2) - (1+k) 4k\cos x - \frac{2(4+5k+40k^2) - (1+4k)\Delta^2}{1+k-k\cos x} \right] \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \right\}. \ldots (181)$$

Vervolgens is

$$\int \frac{\cos^6 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} E\,dx = \int \frac{\cos^4 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} E\,dx - \int \cos^4 \tfrac{1}{2} x . \sin \tfrac{1}{2} x . E\,dx.$$

Deze laatste integraal echter kan men afleiden uit de algemeene herleidingsformule (XLI) voor $p = 4$.

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^4 \tfrac{1}{2} x . E\,dx = \frac{1}{140k^2} \left\{ 120k^2 \int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^2 \tfrac{1}{2} x . E\,dx - \right.$$

$$\left. - (1+12k^2) \int \sin \tfrac{1}{2} x . E\,dx + [\, 6\cos x - (1 + 7\cos x)\Delta^2 \,] \frac{E}{\cos \frac{1}{2} x} + 2 \frac{\sin x}{\cos \frac{1}{2} x} \Delta^3 \right\} =$$

$$= \frac{1}{35k^2} \left\{ - 14k^2 \cos^5 \tfrac{1}{2} x . E + \frac{1}{3\sqrt{2k}} \Big[(11 + 12k^2)\, 2kE(l,z) - \right.$$

$$- (1 + 12k - 12k^2)(1-k) F(l,z) + [(-1 + 4k + 44k^2 + 16k^3) -$$

$$\left. -16(1+k)k^2 \cos x + 3\Delta^3 - 2k \frac{(15+20k+28k^2) - (1+4k) 2\Delta^2}{1+k-k\cos x}] \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big] \right\}, . (182)$$

bij welke herleiding men zich van de integralen (146) en (147) heeft bediend; en nu volgt ook dadelijk

$$\int \frac{\cos^6 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} E\,dx = \eta_1 + \frac{1}{315\,k^2} \Big\{ 21\,(73 + 16 \cos x + 3 \cos^2 x)\, \frac{1}{2} k^2 \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, E -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\,k}} \Big[(5 + 36\,k^2)\, 30\,k\, E(l, z) - (1 + 26\,k - 180\,k^2)\, 3\,(1 - k)\, F(l, z) +$$

$$+ [-(3 - 26\,k - 728\,k^2 - 104\,k^3) - 104\,(1 + k)\,k^2 \cos x + 9\,\Delta^3 -$$

$$- 2\,k\, \frac{(63 + 95\,k + 364\,k^2) - (1 + 4\,k)\, 13\,\Delta^2}{1 + k - k \cos x}] \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta \sqrt{2\,k} \Big] \,. \; . \; . \; . \; . \quad (183)$$

Verder neme voor de onevene waarden van p, hier $p = 7$, dan verschijnen er de integralen

$$\int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x \,.\, \cos \frac{1}{2} x} E = 2\,\beta_1 \,, \quad (175)$$

$$\int \frac{\cos \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} E\,dx = \beta_1 + \delta_1 \,, \quad (184)$$

$$\int \frac{\cos^3 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} E\,dx = \int \frac{\cos \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} E\,dx - \int \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos \tfrac{1}{2} x \,.\, E\,dx = \beta_1 + \delta_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} \cos x \,.\, E - \frac{1}{4\,k} Bg \sin (k \sin x) - \frac{1}{4} \sin x \,.\, \Delta \,, \quad (185)$$

wanneer men daarbij de integraal (127) gebruikt; en eindelijk evenzeer met behulp der integraal (133)

$$\int \frac{\cos^5 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} E\,dx = \int \frac{\cos^3 \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} E\,dx - \int \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, E\,dx = \beta_1 + \delta_1 +$$

$$+ \frac{1}{24\,k^2} \{ [-4 + 2\,k^2\,(1 - 9 \cos x) + 3\,\Delta^2]\, E + (1 - k^2)\, F - 9\,k\, Bg \sin (k \sin x) -$$

$$- (9 + \cos x)\, k^2 \sin x \,.\, \Delta \} \,. \quad (186)$$

Ten slotte heeft men nog de eindintegralen te zoeken voor de herleidingsformule (L), altijd op dezelfde wijze; dat is, men beginne met evene waarden van p en stelle daartoe $p = 8$, dan wordt men teruggevoerd tot de integralen

$$\int E\,dx = \varepsilon_1 \,, \quad (162)$$

$$\int tang^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, E dx = -\int E dx + \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2} x} E = -\varepsilon_1 + 2 \, tang \tfrac{1}{2} x \,.\, E -$$

$$-2 k L \frac{\Delta + k \cos x}{1 + k} - 2 L \frac{(\Delta - \cos x)(1 + \Delta)}{2 \sin^2 x} + 2 \Delta - 2 \,, \ldots \ldots \ldots \quad (187)$$

met behulp der integraal (137); terwijl deze en de integraal (139) evenzeer noodig bevonden worden voor de integraal

$$\int tang^4 \tfrac{1}{2} x \,.\, E dx = -\int tang^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, E dx + \int \frac{\sin^2 \frac{1}{2} x}{\cos^4 \frac{1}{2} x} E dx = \varepsilon_1 + \frac{2}{3} \Big\{ -(1 + 2 \cos x) \frac{tang \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} E +$$

$$+ 2 (2 + k^2) L \frac{(\Delta - \cos x)(1 + \Delta)}{2 \sin^2 x} + 6 k L \frac{\Delta + k \cos x}{1 + k} - (3 + 2 \cos x) \frac{\Delta}{\cos^2 \frac{1}{2} x} + 5 \Big\} \ldots (188)$$

Daarop volgt

$$\int tang^6 \tfrac{1}{2} x \,.\, E dx = -\int tang^4 \tfrac{1}{2} x \,.\, E dx + \int \frac{tang^4 \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} E dx,$$

en deze laatste moet men eerst uit de algemeene herleidingsformule (XLII) afleiden voor $p = 4$; deze bewerking levert dan

$$\int \frac{tang^4 \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} E dx = \int \frac{\sin^4 \frac{1}{2} x}{\cos^6 \frac{1}{2} x} E dx = \frac{1}{20} \Big\{ -(8 - 4 k^2)\, 3 \int tang^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, E \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2} x} -$$

$$-(4 - 12 k^2) \int E \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2} x} - [\, 3 \cos x - (2 + \cos x) \Delta^2 \,] \frac{2}{\sin \frac{1}{2} x \,.\, \cos^5 \frac{1}{2} x} -$$

$$-4 \frac{\Delta^3}{\cos^4 \frac{1}{2} x} + 4 \Big\} = \frac{1}{10} \Big\{ -[\, (3 - 4 k^2) - (1 + 2 k^2) \cos x \,]\, 2 \frac{tang \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} E -$$

$$-20 k L \frac{\Delta + k \cos x}{1 + k} - (1 + 6 k^2 - 2 k^4)\, 4 L \frac{(\Delta - \cos x)(1 + \Delta)}{2 \sin^2 x} -$$

$$-2 (5 + 2 k^2) - [\, 3 \cos x - (2 + \cos x) \Delta^2 \,] \frac{1}{\sin \frac{1}{2} x \,.\, \cos^5 \frac{1}{2} x} + [\, (3 + 2 k^2) +$$

$$+ (3 + k^2)\, 2 \cos x + \cos^2 x \,] \frac{\Delta}{\cos^4 \frac{1}{2} x} \Big\}, \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (189)$$

waarbij de invoering van de integralen (139) en (137) noodig blijkt te zijn; en nu volgt door middel van deze uitkomst ook

$$\int tang^6 \tfrac{1}{2} x . E dx = -\varepsilon_1 + \frac{1}{30} \Big\{ [(1 + 12 k^2) + (23 + 6 k^2) \cos x] \, 2 \frac{tang \tfrac{1}{2} x}{\cos^2 \tfrac{1}{2} x} E -$$

$$- 180 k L \frac{\Delta + k \cos x}{1 + k} - (23 + 28 k^2 - 6 k^4) \, 4 L \frac{(\Delta - \cos x)(1 + \Delta)}{2 \sin^2 x} -$$

$$- 2 (65 + 6 k^2) - [3 \cos x - (2 + \cos x) \Delta^2] \frac{3}{\sin^2 \tfrac{1}{2} x . \cos^5 \tfrac{1}{2} x} - [3 (13 + 2 k^2) +$$

$$+ (34 + 3 k^2) \, 2 \cos x + 23 \cos^2 x] \frac{\Delta}{\cos^4 \tfrac{1}{2} x} \Big\} \ldots\ldots\ldots \quad (190)$$

Wanneer men vervolgens de eindintegralen voor onevene waarden van p wil zoeken, onderstelle men $p = 7$, dan vindt men de volgende integralen

$$\int \frac{\cos \tfrac{1}{2} x}{\sin \tfrac{1}{2} x} E dx = \beta_1 + \delta_1, \ldots\ldots\ldots \quad (184)$$

$$\int \frac{\sin \tfrac{1}{2} x}{\cos \tfrac{1}{2} x} E dx = \beta_1 - \delta_1, \ldots\ldots\ldots \quad (176)$$

$$\int tang^3 \tfrac{1}{2} x . E dx = - \int tang \tfrac{1}{2} x . E dx + \int \frac{\sin \tfrac{1}{2} x}{\cos^3 \tfrac{1}{2} x} E dx =$$

$$= \delta_1 - \beta_1 + (2 + \sec^2 \tfrac{1}{2} x) E - (1 - k^2) \, 2 F - 2 k \, Bg \sin (k \sin x) - 2 \, tang \tfrac{1}{2} x . \Delta, \ldots \quad (191)$$

volgens de integraal (136); eindelijk de integraal (134) gebruikende,

$$\int tang^5 \tfrac{1}{2} x . E dx = - \int tang^3 \tfrac{1}{2} x . E dx + \int \frac{\sin^3 \tfrac{1}{2} x}{\cos^5 \tfrac{1}{2} x} E dx = \beta_1 - \delta_1 +$$

$$+ \frac{1}{6} \Big\{ (1 - k^2) \, 20 F - \Big[(23 + 8 k^2) - \frac{3}{4 \cos^4 \tfrac{1}{2} x} (3 + 6 \cos x - \cos^2 x) \Big] E +$$

$$+ 24 k \, Bg \sin (k \sin x) + [(7 + 2 k^2) + (4 + k^2) \, 2 \cos x] \frac{\sin x}{\cos^6 \tfrac{1}{2} x} \Delta \Big\} \ldots\ldots \quad (192)$$

7. Eindelijk kan men nog eene dergelijke herleiding toepassen bij de algemeene herleidingsformule (XLIII) en (XLIV), die beide eene macht van cosinus in den noemer hebben.

De goniometrische formule

$$\frac{\sin x}{\cos^l x} = \frac{\sin^2 x}{\sin x . \cos^l x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x . \cos^l x} = \frac{1}{\sin x . \cos^l x} - \frac{1}{\sin x . \cos^{l-2} x}$$

moet men aanwenden bij de verandering der herleidingsformule (XLIII), en wel op de oorspronkelijke gedaante, zooals zij rechtstreeks was afgeleid. Dit geeft dan

$$(p-1)(1-k^2)\left\{\frac{1}{\cos^p x}E - p\left(\int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^{p+1}x}E - \int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^{p-1}x}E\right)\right\} =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^{p-1}x}\Delta^3 + [(p-2)-(p-3)\,2k^2]\left\{\frac{1}{\cos^{p-2}x}E - \right.$$

$$\left. -(p-2)\left(\int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^{p-1}x}E - \int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^{p-3}x}E\right)\right\} + (p-5)k^2\left\{\frac{1}{\cos^{p-4}x}E - \right.$$

$$\left. -(p-4)\left(\int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^{p-3}x}E - \int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^{p-5}x}E\right)\right\}.$$

Vervangt men in deze vergelijking p door $p-1$, brengt men de integralen bijeen, waarin dezelfde machten van $\cos x$ voorkomen, en herleidt men, zoo is

$$\int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^p x}E = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)}\left\{[(2p^2-9p+11) - \right.$$

$$-(3p^2-17p+26)\,4k^2]\int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^{p-2}x}E - [(p-3)^2 -$$

$$-(3p^2-25p+54)k^2]\int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^{p-4}x}E + (p-5)(p-6)k^2\int\frac{dx}{\sin x\,.\cos^{p-6}x}E -$$

$$\left. -[3\cos^2 x - \{4+(p-6)\sin^2 x\}\Delta^2]\frac{E}{\cos^{p-1}x} - \frac{\sin x}{\cos^{p-2}x}\Delta^3\right\} \ldots\ldots\ldots \text{(LI)}$$

Voor evene p kan men als eindintegralen gebruiken, wanneer men $p=2$ stelt, de vroeger gevonden integralen (159), (157) en (156); voor onevene p daarentegen, als men $p=3$ stelt, de integralen (161), (160), (153).

Er blijft nu slechts de herleidingsformule (XLIV) over: in hare rechtstreeks gevonden, niet herleide gedaante voere men nu de goniometrische vergelijking in

$$\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^l\frac{1}{2}x} = \frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^l\frac{1}{2}x} = \frac{1-\cos^2\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^l\frac{1}{2}x} = \left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^l\frac{1}{2}x} - \frac{1}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{l-2}\frac{1}{2}x}\right),$$

dan verkrijgt men

B 20

$$(p-1)\left\{\frac{1}{\cos^p \frac{1}{2}x}E-\frac{1}{2}p\left(\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p+1}\frac{1}{2}x}E-\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}E\right)\right\}=$$

$$=\frac{\sin x}{\cos^p\frac{1}{2}x}\Delta^3+[(p-2)+(p-4)4k^2]\left\{\frac{1}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}E-\frac{1}{2}(p-2)\left(\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}E-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p-3}\frac{1}{2}x}E\right)\right\}-(p-6)\,8k^2\left\{\frac{1}{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}E-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}(p-4)\left(\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p-3}\frac{1}{2}x}E-\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p-5}\frac{1}{2}x}E\right)\right\}+$$

$$+(p-8)4k^2\left\{\frac{1}{\cos^{p-6}\frac{1}{2}x}E-\frac{1}{2}(p-6)\left(\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p-5}\frac{1}{2}x}E-\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-7}\frac{1}{2}x}E\right)\right\}.$$

In deze vergelijking moet men vooreerst $p-1$ voor p in de plaats stellen, daarop de gelijknamige integralen bijeenvoegen, en eindelijk de noodige herleidingen uitvoeren, om te komen tot de volgende herleidingsformule.

$$\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^p\frac{1}{2}x}E=\frac{1}{(p-1)(p-2)}\left\{[(2p^2-9p+11)+(p-3)(p-5)4k^2]\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}E-\right.$$

$$-[(p-3)^2+(p-5)(3p-17)4k^2]\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}E+$$

$$+(p-7)(3p-19)4k^2\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p-6}\frac{1}{2}x}E-$$

$$-(p-7)(p-9)4k^2\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\cos^{p-8}\frac{1}{2}x}E-[6\cos x-\{(p-1)-$$

$$\left.-(p-7)\cos x\}\Delta^2]\frac{E}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}-\frac{2\sin x}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}\Delta^3\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(LII)}$$

Voor de eindintegralen vindt men hier voor evene p, als men $p=2$ stelt, de integralen (183), (181), (180) en (179) terug: en onevene p, als men $p=3$ stelt, evenzeer de vroegere integralen (186), (185), (184) en (175).

8. Voordat wij verder gaan, willen wij eerst de gebezigde nieuwe transcendenten iets nader beschouwen. Men kan op alle de methode van het gedeeltelijk integreeren toepassen, en daarna nog soms die van het ontwikkelen van een factor onder het integraalteeken in eene reeks.

$$\alpha_{\mathrm{I}}=\int\frac{dx}{\cos x}E=\int E\,dx\frac{d}{dx}.L tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x\right)=E.L tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x\right)-\int L tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x\right).\Delta dx=$$

$$=E.L tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x\right)-2\sum_0^\infty\frac{(-1)^n}{2n+1}\int\sin(2n+1)x.\Delta\,dx\,,\ldots\ldots\ldots \text{(149)}$$

$$\beta_1 = \int \frac{dx}{\sin x} E = \int E dx \frac{d}{dx} . L \tang \tfrac{1}{2} x = E . L \tang \tfrac{1}{2} x - \int L \tang \tfrac{1}{2} x . \Delta dx =$$

$$= E . L \tang \tfrac{1}{2} x - 2 \sum_0^\infty \frac{1}{2n+1} \int \cos (2n+1) x . \Delta dx , \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (156)$$

$$\gamma_1 = \int \frac{\sin x}{\cos x} E dx = - \int E dx \frac{d}{dx} . L \cos x = - E . L \cos x + \int L \cos x . \Delta dx = - E . L \cos x +$$

$$+ \int \Delta dx \Big[- L 2 - \sum_1^\infty (-1)^n \frac{\cos 2nx}{n} \Big] = - E . L (2 \cos x) - \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} \int \cos 2nx . \Delta dx , \;. \; (154)$$

$$\delta_1 = \int \frac{\cos x}{\sin x} E dx = \int E dx \frac{d}{dx} . L \sin x = E . L \sin x - \int L \sin x . \Delta dx = E . L \sin x - \int \Delta dx \Big[-$$

$$- L 2 - \sum_1^\infty \frac{\cos 2nx}{n} \Big] = E . L (2 \sin x) + \sum_1^\infty \frac{1}{n} \int \cos 2nx . \Delta dx , \ldots\ldots\ldots\ldots (160)$$

$$\varepsilon_1 = \int E dx = x . E - \int x . \Delta dx , \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (162)$$

$$\zeta_1 = \int \frac{dx}{\cos \tfrac{1}{2} x} E = 2 \int E dx \frac{d}{dx} . L \tang \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} x \right) = 2 E . L \tang \tfrac{1}{4} (\pi + x) -$$

$$- 2 \int L \tang \tfrac{1}{4} (\pi + x) . \Delta dx = 2 E . L \tang \tfrac{1}{4} (\pi + x) - 4 \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} \int \sin (2n+1) \tfrac{1}{2} x . \Delta dx , . \; (170)$$

$$\eta_1 = \int \frac{dx}{\sin \tfrac{1}{2} x} E = 2 \int E dx \frac{d}{dx} . L \tang \tfrac{1}{4} x = 2 E . L \tang \tfrac{1}{4} x - \int L \tang \tfrac{1}{4} x . \Delta dx =$$

$$= 2 E . L \tang \tfrac{1}{4} x - 4 \sum_0^\infty \frac{1}{2n+1} \int \cos (2n+1) \tfrac{1}{2} x . \Delta dx ; \ldots\ldots\ldots\ldots (179)$$

uit welke uitkomsten duidelijk blijkt, dat de integralen α_1 tot η_1 werkelijk nieuwe transcendenten zijn.

9. Ook bij deze soort van integralen kunnen wij overgaan tot het onderzoek van zulke, die behalve de elliptische integraal E, ook nog eene zekere macht van Δ onder het integraalteeken als factor bezitten. Is die macht eene onevene, zoo wordt de integraal in dit opzicht irrationeel; is zij eene evene, dan blijft de integraal daarentegen rationeel. Met dit doel voor oogen, vindt men door de methode van gedeeltelijk integreeren

*

$$\int \varphi(x) \frac{dx}{\Delta^{n-3}} = \frac{\varphi(x)}{\Delta^{n-2}} E - \int E\,dx \left[\frac{1}{\Delta^{n-2}} \frac{d}{dx} . \varphi(x) - \varphi(x) \frac{n-2}{2} \frac{-2k^2 sinx.cosx}{\Delta^n} \right] =$$

$$= \frac{\varphi(x)}{\Delta^{n-2}} E - \int \frac{dx}{\Delta^n} E . \left[\Delta^2 \frac{d}{dx} . \varphi(x) + (n-2) k^2 \sin x . \cos x . \varphi(x) \right], \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (\mathbf{d})$$

bij welke herleiding ondersteld is, dat de term buiten het integraalteeken, $\frac{\varphi(x)}{\Delta^{n-2}} E$, voor $n = 0$ verdwijnt, hetgeen met den factor E het geval is. De bruikbaarheid van deze herleidingsformule hangt echter geheel af van den vorm, dien de grootheid tusschen haakjes in de laatste integraal verkrijgt, en deze is wederom afhankelijk van iederen vorm van de functie φ.

Beginnen wij nu met de onderstelling $\varphi(x) = sin^{p+1} x$, dan verkrijgt de herleidingsformule ($\mathbf{d}$) de gedaante

$$\int sin^{p+1} x . \frac{dx}{\Delta^{n-3}} = \frac{sin^{p+1} x}{\Delta^{n-2}} E - \int E \frac{dx}{\Delta^n} \{ \Delta^2 (p+1) sin^p x . cos x + (n-2) k^2 sin^{p+2} x . cos x \}, . \quad (K)$$

$$= \frac{sin^{p+1}}{\Delta^{n-2}} E - \int E \frac{dx}{\Delta^n} sin^p x . cos x . \{ (p+1) + (n-p-3) k^2 sin^2 x \}, \ldots . (K_1)$$

$$= \frac{sin^{p+1} x}{\Delta^{n-2}} E - \int E \frac{dx}{\Delta^n} sin^p x . cos x . \{ (n-2) - (n-p-3) \Delta^2 \} . \ldots \ldots (K_2)$$

De beide laatste herleidingen zijn daarin onderscheiden, dat in de eerste (K_1) de exponent n en in de tweede (K_2) de p standvastig blijft; en dus omgekeerd in de eerste de p, in de tweede daarentegen de n verandert, en wel beide exponenten telkens met 2.

Een oppervlakkige blik op beide doet ons zien, dat zij zeer worden vereenvoudigd door de onderstelling $p = n - 3$, omdat alsdan een der termen onder het integraalteeken in het tweede lid verdwijnt, en alzoo de eenig overgeblevene dadelijk kan opgelost worden, waarbij beide hetzelfde leveren.

$$(n-2) \int sin^{n-3} x . cos x . E \frac{dx}{\Delta^n} = \frac{sin^{n-2} x}{\Delta^{n-2}} E - \int sin^{n-2} x \frac{dx}{\Delta^{n-3}} . \ldots . . (K_3)$$

Maar ook de vergelijkingen (K_1) en (K_2) kunnen zelve opgelost worden, en alsdan komt er, nadat bij de eerste de p door $p - 2$ vervangen geworden is,

$$\int sin^p x . cos x . E \frac{dx}{\Delta^n} = \frac{1}{n-2} \left\{ \frac{sin^{p+1} x}{\Delta^{n-2}} E - \int sin^{p+1} x \frac{dx}{\Delta^{n-3}} + \right.$$

$$\left. + (n-p-3) \int sin^p x . cos x . E \frac{dx}{\Delta^{n-2}} \right\}, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . (K_4)$$

$$= \frac{1}{(n-p-1)k^2} \left\{ \frac{\sin^{p-1} x}{\Delta^{n-2}} E - \int \sin^{p-1} x \frac{dx}{\Delta^{n-3}} - (p-1) \int \sin^{p-2} x \cdot \cos x \cdot E \frac{dx}{\Delta^n} \right\} \ldots \text{(LIII)}$$

Beide algemeene herleidingsformulen kan men, naar de behoefte, tot zeer verschillende oogmerken nuttig gebruiken, en alzoo ons doel bereiken, om voor bepaalde waarden van n niet alleen de herleidingsvergelijking, maar evenzeer ook de daarbij behoorende eindintegralen afteleiden.

Vooreerst stelle men daartoe $n = 3$, $= 1$ en $= -1$ in de bijzondere vergelijking (K_3), zoo verkrijgt men

$$\int \cos x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{\sin x}{\Delta} E - \int \sin x \,.\, dx = \frac{\sin x}{\Delta} E + \cos x - 1, \ldots \ldots \ldots \ldots (193)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} E \frac{dx}{\Delta} = - \frac{\Delta}{\sin x} E + \int \Delta^2 \frac{dx}{\sin x} = - \frac{\Delta}{\sin x} E + \int \left(\frac{1}{\sin x} - k^2 \sin x \right) dx =$$

$$= - \frac{\Delta}{\sin x} E + k^2 \cos x - k^2 + L \tan g \tfrac{1}{2} x, \ldots \ldots \ldots \ldots (194)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} E \,.\, \Delta \, dx = \frac{1}{3} \left\{ - \frac{\Delta^3}{\sin^3 x} E + \int \Delta^4 \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{3} \right\{ - \frac{\Delta^3}{\sin^3 x} E +$$

$$+ \int \left(\frac{1}{\sin^3 x} - \frac{2k^2}{\sin x} + k^4 \sin x \right) dx \left\} = \frac{1}{3} \right\{ - \frac{\Delta^3}{\sin^3 x} E +$$

$$+ \frac{1}{2} (1 - 4k^2) L \tan g \tfrac{1}{2} x + k^4 - (1 + 2k^4 \sin^2 x) \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} \right\} \ldots \ldots \ldots \ldots (195)$$

Bij de herleidingsformule (K_4) zijn deze integralen alleen te gebruiken, wanneer p even is, maar niet voor onevene p, wegens den factor $n - 2$; alsdan moet men de afzonderlijke integralen telkens rechtstreeks trachten te vinden, als volgt.

$$\int \sin x \,.\, \cos x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \int E \, dx \frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{k^2} \left\{ \frac{1}{\Delta} E - \int \frac{1}{\Delta} \Delta \, dx \right\} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{\Delta} E - x \right), \ldots (196)$$

$$\int \sin x \,.\, \cos x \,.\, E \frac{dx}{\Delta} = - \frac{1}{k^2} \int E \, dx \frac{d}{dx} \,.\, \Delta = - \frac{1}{k^2} \left\{ \Delta \,.\, E - \int \Delta \,.\, \Delta \, dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{2k^2} \{ -2 \Delta \,.\, E + (2 - k^2) x + k^2 \sin x \,.\, \cos x \} \ldots \ldots \ldots \ldots (197)$$

Voor de volgende integraal, stelle men eerst $n = 3$ en $= 1$ in de herleidingsformule (K_4)

$$\int sin^p x . cos x . E \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{sin^{p+1} x}{\Delta} E - \int sin^{p+1} x\, dx - p \int sin^p x . cos x . E \frac{dx}{\Delta}, \ldots (K_5)$$

$$\int sin^p x . cos x . E \frac{dx}{\Delta} = -sin^{p+1} x . \Delta . E + \int sin^{p+1} x . \Delta^2 dx + (p+2) \int sin^p x . cos x . E . \Delta dx, . (K_6)$$

welke laatste vergelijking voor $p = 1$, en wanneer men dan daarin de integraal (197) overbrengt, voor ons doel oplevert

$$\int sin\, x . cos\, x . E . \Delta\, dx = \frac{1}{3} \left\{ \int sin\, x . cos\, x . E \frac{dx}{\Delta} + sin^2 x . \Delta . E - \int sin^2 x . \Delta^2 dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{24 k^2} \left\{ - 8 \Delta^3 . E + (8 - 8 k^2 + 3 k^4) x + [3(2-k^2) + 2 \Delta^2] k^2 sin\, x . cos\, x \right\} . . (198)$$

Nu is men zoo verre gereed gekomen, dat men met vrucht in de algemeene herleidingsformule (LIII) $n = 3$, $= 1$ en $= - 1$ kan stellen, om het volgende stel te erlangen.

$$\int sin^p x . cos x . E \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{(p-2) k^2} \left\{ - \frac{sin^{p-1} x}{\Delta} E + \int sin^{p-1} x dx + (p-1) \int sin^{p-2} x . cos x . E \frac{dx}{\Delta^3} \right\}, . . (LIV)$$

$$\int sin^p x . cos x . E \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{p k^2} \left\{ - sin^{p-1} x . \Delta . E + \int sin^{p-1} x . \Delta^2 dx + (p-1) \int sin^{p-2} x . cos x . E \frac{dx}{\Delta} \right\}, . . (LV)$$

$$\int sin^p x . cos x . E . \Delta\, dx = \frac{1}{(p + 2) k^2} \left\{ - sin^{p-1} x . \Delta^3 . E + \int sin^{p-1} x . \Delta^4 dx + \right.$$

$$\left. + (p - 1) \int sin^{p-2} x . cos x . E . \Delta\, dx \right\} . \ldots \ldots \ldots \ldots (LVI)$$

Wat de eindintegralen aangaat voor dit drietal herleidingsformulen: wanneer de exponent p onevene waarden heeft, zoo komt men voor $p = 3$ tot de integralen (196), (197) en (198). Maar wanneer de p daarentegen evene waarden heeft, kunnen de voorafgaande integralen (193), (194) en (195) niet dienen als eindintegralen, omdat voor $p = 2$, $= 0$ en $= - 2$, de overeenkomstige herleidingsformulen (LIV), (LV) en (LVI) oneindige, of liever onbepaalde, uitkomsten opleveren. Het is dus noodzakelijk die integralen zelve rechtstreeks te bepalen.

$$\int \sin^2 x \,.\, \cos x \,.\, E\frac{d\,x}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2}\int (1-\Delta^2)\cos x \,.\, E\frac{d\,x}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2}\left\{\int \cos x\,.\,E\frac{d\,x}{\Delta^3} - \int \cos x\,.\,E\frac{d\,x}{\Delta}\right\},$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} E\,.\,\Delta\,d\,x = \int \frac{1-k^2\sin^2 x}{\sin^2 x}\,\frac{\cos x}{\Delta}\,E\,d\,x = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,E\frac{d\,x}{\Delta} - k^2\int \cos x\,.\,E\frac{d\,x}{\Delta}.$$

In beide herleidingen zijn de eerste integralen de zoo even vermelde; maar de laatste is telkens dezelfde, die bij de herleidingsformule (LV) voor $p=0$ ontstaat. Men kan haar wel vervormen door gedeeltelijke integratie, en wel aldus

$$\int \cos x\,.\,E\frac{d\,x}{\Delta} = \frac{1}{k}\int \frac{d\,x}{\Delta}\,E\frac{d}{d\,x}.(k\sin x) = \frac{1}{k}\int E\,d\,x\,\frac{d}{d\,x}.\,Bg\,\sin\,(k\sin x) =$$

$$= \frac{1}{k}\left\{E\,.\,Bg\,\sin\,(k\sin x) - \int Bg\,\sin\,(k\sin x).\,\Delta\,d\,x\right\} = \theta_1; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (199)$$

maar, zooals men duidelijk inziet, blijft zij toch eene afzonderlijke nieuwe transcendente. Voert men haar nu echter in, dan worden de beide vorige, gezochte integralen

$$\int \sin^2 x\,.\,\cos x\,.\,E\frac{d}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2}\left\{-\theta_1 + \frac{\sin x}{\Delta}\,E + \cos x - 1\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (200)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,E\,.\,\Delta\,d\,x = -\,k^2\,\theta_1 - \frac{\Delta}{\sin x}\,E + k^2\cos x - k^2 - L\,tang\,\tfrac{1}{2}\,x. \quad \ldots\ldots\ldots (201)$$

Zoodra men overgaat tot evene waarden van n, worden de integralen daarmede van een rationeelen vorm; de negatieve exponenten n komen alsdan niet in aanmerking, omdat men alsdan met geheele machten van Δ^2, dat is van $(1-k^2\sin^2 x)$, te werken heeft; en deze integralen zijn in het begin van dit Hoofdstuk behandeld. Iets anders is het, wanneer wij de Δ in den noemer behouden, en dus positieve waarden aan n geven; bijv. $=1$, $=2$, $=4$.

Begint men met de waarden $n=2$, dan kan men uit de vergelijkingen (K_3) en (K_4) niets afleiden; men heeft echter rechtstreeks, wanneer men dergelijke transcendenten als in (85) en (86) invoert,

$$\int \sin x.\cos x.\,E\frac{d\,x}{\Delta^2} = -\frac{1}{2\,k^2}\int E\frac{d\,x}{\Delta^2}\frac{d}{d\,x}.\Delta^2 = \frac{1}{2\,k^2}\left\{-E.L\Delta^2 + \int L\,\Delta^2\,.\,\Delta\,d\,x\right\} = \iota_1, \ldots (202)$$

$$\int \cos x.\,E\frac{d\,x}{\Delta^2} = \frac{1}{2k}\int E\frac{2\,d\,x}{1-k^2\sin^2 x}\frac{d}{d\,x}.(k\sin x) = \frac{1}{2k}\left\{E.L\frac{1+k\sin x}{1-k\sin x} - \int L\frac{1+k\sin x}{1-k\sin x}.\Delta\,d\,x\right\} = \varkappa_1; . (203)$$

welke integralen echter beide nieuwe transcendenten blijken te zijn. En nu kan men uit de algemeene herleidingsformule (LIII) voor $n=2$ de meer bijzondere afleiden

$$\int sin^p x . cos x . E\frac{dx}{\Delta^2}=\frac{1}{(p-1)k^2}\left\{-sin^{p-1}x.E+\int sin^{p-1}x.\Delta dx+(p-1)\int sin^{p-2}x.cos x.E\frac{dx}{\Delta^2}\right\}, \ldots (LVII)$$

waarbij nu de vorige (202) en (203) als eindintegralen behooren, naarmate $p=3$ of $=2$ wordt.

Stelt men vervolgens in dezelfde algemeene vergelijking (LIII) $n=4$, zoodat er komt

$$\int sin^p x . cos x . E\frac{dx}{\Delta^4}=\frac{1}{(p-3)k^2}\left\{-\frac{sin^{p-1}x}{\Delta^2}E+\int sin^{p-1}x\frac{dx}{\Delta}+(p-1)\int sin^{p-2}x.cos x.E\frac{dx}{\Delta^4}\right\}, \ldots (LVIII)$$

dan moet men nog voor deze de eindintegralen zoeken.

Voor evene waarden van p, stelle men eerst $n=4$ in (K_4), dat is

$$\int sin^p x . cos x . E\frac{dx}{\Delta^4}=\frac{1}{2}\left\{\frac{sin^{p+1}x}{\Delta^2}E-\int sin^{p+1}x\frac{dx}{\Delta}-(p-1)\int sin^p x . cos x . E\frac{dx}{\Delta^2}\right\} \ldots (K_7)$$

Ten einde deze te kunnen gebruiken, moet men eerst de laatste integraal tusschen de haakjes voor $p=2$ trachten te vinden; daartoe zij $p=2$ in de herleidingsformule (LVII).

$$\int sin^2 x . cos x . E\frac{dx}{\Delta^2}=\frac{1}{k^2}\left\{-sin x . E+\int sin x . \Delta\, dx+\int cos x . E\frac{dx}{\Delta^2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{k^2}\left\{\varkappa_1-sin x . E+\frac{1}{2k}(1-k^2)L\frac{1+k}{\Delta+k cos x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cos x . \Delta\right\}, \ldots \ldots (204)$$

naar (δ_8); en thans kan men uit de vergelijking (K_7) voor $p=2$ afleiden

$$\int sin^2 x . cos x . E\frac{dx}{\Delta^4}=\frac{1}{2}\left\{\frac{sin^3 x}{\Delta^2}E-\int sin^3 x\frac{dx}{\Delta}-\int sin^2 x . cos x . E\frac{dx}{\Delta^2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2k^2}\left\{\varkappa_1+\frac{sin x}{\Delta^2}E-\frac{1}{k}L\frac{1+k}{\Delta+k cos x}\right\}, \ldots \ldots (205)$$

waarbij de volgende integraal gebruikt werd, die uit de herleidingsformule (C_1) volgt,

$$\int sin^3 x\frac{dx}{\Delta}=\frac{1}{2k^2}\left\{cos x . \Delta+\frac{1}{k}(1+k^2)L\frac{1+k}{k cos x+\Delta}-1\right\}. \ldots \ldots (\theta_1)$$

Nu alzoo de eindintegraal voor evene p gevonden is, moeten wij eene dergelijke nog voor onevene waarden van p zoeken, bijv. voor $p = 1$. Daartoe neme men $n = 4$ in de vergelijking (K_3); dan volgt

$$\int sin\,x\,.\,cos\,x\,.\,E\frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2}\left\{\frac{sin^2 x}{\Delta^2}E - \int sin^2 x\frac{dx}{\Delta}\right\} = \frac{1}{2k^2}\left\{\frac{1}{\Delta^2}E - F\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (206)$$

Ten slotte stelle men achtereenvolgens in de herleidingsformulen (LVII) en (K_7) den exponent $p = 3$, waardoor men verkrijgt

$$\int sin^3 x\,.\,cos\,x\,.\,E\frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{2k^2}\left\{-sin^2 x\,.\,E + \int sin^2 x\,.\,\Delta\,dx + 2\int sin\,x\,.\,cos\,x\,.\,E\frac{dx}{\Delta^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{6k^4}\left\{6k^2\iota_1 + (1-k^2)F - [2(2-k^2) - 3\Delta^2]E - k^2 sin\,x\,.\,cos\,x\,.\,\Delta\right\}, \; . \; (207)$$

en hiermede weder

$$\int sin^3 x\,.\,cos\,x\,.\,E\frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2}\left\{\frac{sin^4 x}{\Delta^2}E - \int sin^4 x\frac{dx}{\Delta} - 2\int sin^3 x\,.\,cos\,x\,.\,E\frac{dx}{\Delta^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2k^4}\left\{-2k^2\iota + \frac{1}{\Delta^2}E - F\right\}, \; . \; (208)$$

zoodat nu de gezochte eindintegralen alle gevonden zijn.

10. Stappen wij over tot de onderstelling $\varphi(x) = cos^{p+1} x$, dan leiden wij uit het algemeene theorema (***d***), na herleiding, achtereenvolgens af

$$\int cos^{p+1} x\frac{dx}{\Delta^{n-3}} = \frac{cos^{p+1} x}{\Delta^{n-2}}E - \int E\frac{dx}{\Delta^n}\left\{-(p+1)\,cos^p x\,.\,sin\,x\,.\,\Delta^2 + \right.$$

$$\left. + (n-2)\,k^2 sin\,x\,.\,cos^{p+2} x\right\}, \; . \; (L)$$

$$= \frac{cos^{p+1} x}{\Delta^{n-2}}E + \int E\frac{dx}{\Delta^n} sin\,x\,.\,cos^p x\,.\{(p+1)(1-k^2) - (n-p-3)\,k^2 cos^2 x\}, \; . \; (L_1)$$

$$= \frac{cos^{p+1} x}{\Delta^{n-2}}E + \int E\frac{dx}{\Delta^n} sin\,x\,.\,cos^p x\,.\{(n-2)(1-k^2) - (n-p-3)\,\Delta^2\}\; ; \; . \; (L_2)$$

de eerste van welke vormen (L_1) naar de machten van $cos\,x$ is gerangschikt, zoodat de exponent Δ niet, maar de exponent p wel verandert: terwijl de tweede

(L_2) gerangschikt is naar de machten van Δ, zoodat nu omgekeerd de exponent n wel, doch de andere p niet verandert.

Vooreerst kan men uit beide door de bijzondere onderstelling $p = n - 3$, waardoor telkens de laatste term tusschen de haakjes verdwijnt, de volgende veel eenvoudiger vergelijking afleiden.

$$(n-2)(1-k^2)\int \sin x \,.\, \cos^{n-3} x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^n} = - \frac{\cos^{n-2} x}{\Delta^{n-2}} E + \int \cos^{n-2} x \frac{dx}{\Delta^{n-3}} \, . \, . \, . \quad (L_3)$$

Maar men kan ook even goed uit de algemeene herleidingsformulen (L_1) en (L_2) zelve telkens de laatste integraal oplossen; wanneer men daarbij in (L_1) de p door $p - 2$ vervangt, zal men verkrijgen

$$\int \sin x \,.\, \cos^p x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^n} = \frac{1}{(n-2)(1-k^2)} \left\{ - \frac{\cos^{p+1} x}{\Delta^{n-2}} E + \int \cos^{p+1} x \frac{dx}{\Delta^{n-3}} + \right.$$

$$\left. + (n-p-3) \int \sin x \,.\, \cos^p x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^{n-2}} \right\}, \, . \quad (L_4)$$

$$= \frac{1}{(n-p-1)k^2} \left\{ \frac{\cos^{p-1} x}{\Delta^{n-2}} E - \int \cos^{p-1} x \frac{dx}{\Delta^{n-3}} + (p-1)(1-k^2) \int \sin x . \cos^{p-2} x . E \frac{dx}{\Delta^n} \right\} . \, . \quad (LIX)$$

Thans stelle men $n = 3$, $= 1$ en $= -1$ in de herleidingsvergelijking (L_3) om tot de volgende uitkomsten te geraken.

$$\int \sin x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{1-k^2} \left\{ - \frac{\cos x}{\Delta} E + \int \cos x \,.\, dx \right\} = \frac{1}{1-k^2} \left\{ - \frac{\cos x}{\Delta} E + \sin x \right\}, \, . \quad (209)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} E \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{1-k^2} \left\{ \frac{\Delta}{\cos x} E - \int \frac{\Delta^2}{\cos x} dx \right\} = \frac{1}{1-k^2} \left\{ \frac{\Delta}{\cos x} E - \right.$$

$$\left. - k^2 \sin x - (1-k^2) \, L \, tang \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} x \right) \right\}, \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (210)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} E \,.\, \Delta \, dx = \frac{1}{3(1-k^2)} \left\{ \frac{\Delta^3}{\cos^3 x} E - \int \frac{\Delta^4}{\cos^3 x} dx \right\} = \frac{1}{3(1-k^2)} \left\{ \frac{\Delta^3}{\cos^3 x} E - \right.$$

$$\left. - [(1-k^2)(1-3k^2) - 2k^2 \Delta^2] \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2}(1-k^2)(1+3k^2) \, L \, tang \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} x \right) \right\} . . \quad (211)$$

Bij de herleidingsformulen (L_4) kunnen deze drie integralen alleen dienst bewijzen, wanneer de exponent p even is. Bij onevene waarden van p daar-

entegen weigert de herleidingsformule (L_3) haar dienst, dewijl alsdan de factor $n-2$ nul wordt: wanneer men in die gevallen de integralen rechtstreeks zoekt te bepalen, wordt men tot de vorige integralen (196), (197) en (198) teruggevoerd. Men zoude deze echter ook hier hebben kunnen afleiden, door eerst in de herleidingsformule (L_4) $n=3$ en $n=1$ aantenemen, zoodat men daardoor komt tot het volgende.

$$\int sin\, x \,.\, cos^p x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{1-k^2} \left\{ -\frac{cos^{p+1} x}{\Delta} E + \int cos^{p+1} x\, dx - p \int sin\, x \,.\, cos^p x \,.\, E \frac{dx}{\Delta} \right\}, \ldots (L_5)$$

$$\int sin\, x \,.\, cos^p x \,.\, E \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{1-k^2} \left\{ cos^{p+1} x \,.\, \Delta \,.\, E - \int cos^{p+1} x \,.\, \Delta^2 dx + \right.$$

$$\left. + (p+2) \int sin\, x \,.\, cos^p x \,.\, E \,.\, \Delta\, dx \right\} \ldots \ldots (L_6)$$

En stelt men nu in de algemeene herleidingsformule (LIX), $n=3$, $=1$ en $=-1$, zoo verschijnt er het volgende drietal vergelijkingen.

$$\int sin\, x \,.\, cos^p x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{(p-2)\, k^2} \left\{ -\frac{cos^{p-1} x}{\Delta} E + \int cos^{p-1} x\, dx - \right.$$

$$\left. -(p-1)(1-k^2) \int sin\, x \,.\, cos^{p-2} x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^3} \right\}, \ldots \ldots (LX)$$

$$\int sin\, x \,.\, cos^p x \,.\, E \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{p\, k^2} \left\{ -cos^{p-1} x \,.\, \Delta \,.\, E + \int cos^{p-1} x \,.\, \Delta^2 dx - \right.$$

$$\left. -(p-1)(1-k^2) \int sin\, x \,.\, cos^{p-2} x \,.\, E \frac{dx}{\Delta} \right\}, \ldots \ldots (LXI)$$

$$\int sin\, x \,.\, cos^p x \,.\, E \,.\, \Delta\, dx = \frac{1}{(p+2)\, k^2} \left\{ -cos^{p-1} x \,.\, \Delta^3 \,.\, E + \int cos^{p-1} x \,.\, \Delta^4 dx - \right.$$

$$\left. -(p-1)(1-k^2) \int sin\, x \,.\, cos^{p-2} x \,.\, E \,.\, \Delta\, dx \right\}; \ldots \ldots (LXII)$$

waarbij nu voor het geval dat p oneven is, voor $p=3$, de bovengemelde integralen (196), (197) en (198) als eindintegralen behooren. Indien daarentegen die exponent p even is, kunnen de integralen (209), (210) en (211) hier geen dienst doen, omdat in die gevallen de noemers $p-2$, p en $p+2$ zelve verdwijnen, en derhalve de vergelijkingen een onbepaalden, zoo niet oneindigen,

*

vorm bekomen. Dientengevolge blijkt de noodzakelijkheid, om die eindintegralen rechtstreeks te bepalen, hetgeen voorloopig aldus geschiedt.

$$\int sin\,x\,.\,cos^2 x\,.\,E\frac{dx}{\Delta^3}=\frac{1}{k^2}\int(\Delta^2-1+k^2)sin\,x\,.\,E\frac{dx}{\Delta^3}=\frac{1}{k^2}\left\{\int sin\,x\,.\,E\frac{dx}{\Delta}-(1-k^2)\int sin x.E\frac{dx}{\Delta^3}\right\},$$

$$\int\frac{sin\,x}{cos^2 x}E.\Delta\,dx=\int\frac{1-k^2+k^2\,cos^2 x}{cos^2 x}\frac{sin\,x}{\Delta}E\,dx=(1-k^2)\int\frac{sin\,x}{cos^2 x}E\,dx+k^2\int sin\,x\,.\,E\frac{dx}{\Delta}.$$

En nu ziet men dadelijk, dat beide zijn teruggebracht tot eene nieuwe integraal, die ook in de herleidingsformule (LXI) voorkomt, als men aldaar $p=0$ stelt; doch zij blijkt weder eene nieuwe transcendente te vormen, al kan men haar dan ook herleiden door de methode van gedeeltelijk integreeren.

$$\int sin x.E\frac{dx}{\Delta}=-\frac{1}{k}\int E\frac{dx}{\sqrt{1+\frac{k^2\,cos^2 x}{1-k^2}}}\frac{d}{dx}\cdot\frac{k\,cos\,x}{\sqrt{1-k^2}}=-\frac{1}{k}\int E\,dx\frac{d}{dx},L\frac{k\,cos\,x+\Delta}{\sqrt{1-k^2}}=$$

$$=-\frac{1}{k}E.L\frac{k\,cos\,x+\Delta}{\sqrt{1-k^2}}+\frac{1}{4}\int L\frac{k\,cos\,x+\Delta}{\sqrt{1-k^2}}\,.\,\Delta\,dx=$$

$$=-\frac{1}{4}E.L(k\,cos\,x+\Delta)+\frac{1}{4}\int L\,(k\,cos\,x+\Delta)\,.\,\Delta\,dx=\lambda_1\,;\;\ldots\ldots\ldots\;(212)$$

en hiermede worden nu de vorige integralen

$$\int sin\,x\,.\,cos^2 x\,.\,E\,\frac{dx}{\Delta^3}=\frac{1}{k^2}\left\{\lambda_1+\frac{cos\,x}{\Delta}E-sin\,x\right\},\;\ldots\ldots\ldots\;(213)$$

$$\int\frac{sin\,x}{cos^2 x}E.\Delta\,dx=k^2\lambda_1+\frac{\Delta}{cos\,x}E-k^2\,sin\,x-(1-k^2)\,L\,tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x\right)\ldots\;(214)$$

Gaan wij nu van de onevene waarden van n tot de evene over, dan heeft men met rationeele integralen te doen; en hier wordt de toestand zeer verschillend, naarmate de Δ^2 in den teller of in den noemer voorkomt. In het eerste geval toch wordt altijd $\Delta^{2l}=\{(1-k^2)+k^2 cos^2 x\}^l$, dus na ontwikkeling, eene som van positieve evene machten van de cosinus; dat wil zeggen, men is teruggekeerd tot de algemeene integraal van de herleidingsformule in den aanvang van dit Hoofdstuk. Geheel anders is het, wanneer de factor Δ^{2l} in den noemer blijft, en dus de exponent n positief is. Laat ons beginnen

met de bijzondere waarde $n = 2$; de herleidingsvergelijkingen (L_3) en (L_4) zijn alsdan onbruikbaar; men moet dus de eindintegralen rechtstreeks afleiden, dat is de vorige integraal (202), en vervolgens

$$\int \sin x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^2} = -\frac{1}{k} \int E \frac{dx}{1 - k^2 + k^2 \cos^2 x} \frac{d}{dx} \,.\, (k \cos x) =$$

$$= \frac{-1}{k\sqrt{1-k^2}} \left\{ Bg\, tang \frac{k \cos x}{\sqrt{1-k^2}} \,.\, E - \int Bg\, tang \frac{k \cos x}{\sqrt{1-k^2}} \,.\, \Delta\, dx \right\} = \mu_1, \quad \ldots \quad (215)$$

wederom eene nieuwe transcendente, zoo als duidelijk uit de herleiding blijkt.

Vervolgens kan men in de herleidingsformule (LIX) $n = 2$ en $n = 4$ stellen, waardoor de volgende uitkomsten ontstaan.

$$\int \sin x \,.\, \cos^p x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{(p-1) k^2} \left\{ -\cos^{p-1} x \,.\, E + \int \cos^{p-1} x \,.\, \Delta\, dx - \right.$$

$$\left. - (p-1)(1-k^2) \int \sin x \,.\, \cos^{p-2} x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^2} \right\}, \quad \ldots \quad \text{(LXIII)}$$

$$\int \sin x \,.\, \cos^p x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{(p-3) k^2} \left\{ -\frac{\cos^{p-1} x}{\Delta^2} \,.\, E + \int \cos^{p-1} x \frac{dx}{\Delta} - \right.$$

$$\left. - (p-1)(1-k^2) \int \sin x \,.\, \cos^{p-2} x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^4} \right\} \quad \ldots \quad \text{(LXIV)}$$

Voor de herleidingsvergelijking (LXIII) zijn de eindintegralen reeds gevonden: naar gelang immers de exponent p even of oneven is, zijn zij de integralen (215) of (202). Wat daarentegen de andere herleidingsformule (LXIV) betreft, heeft men vooreerst als eindintegraal de integraal (206); en verder vindt men, door in de vergelijking (LXIII) $p = 2$ te nemen,

$$\int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{k^2} \left\{ -\cos x \,.\, E + \int \cos x \,.\, \Delta\, dx - (1-k^2) \int \sin x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{k^2} \left\{ -\cos x \,.\, E - (1-k^2)\, \mu_1 + \frac{1}{2k} Bg \sin (k \sin x) + \frac{1}{2} \sin x \,.\, \Delta \right\} \quad \ldots \quad (216)$$

Thans kan men verder slagen, door in de herleidingsvergelijking (L_4) $n = 4$, $p = 2$ te onderstellen; want dan wordt

$$\int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2(1-k^2)} \left\{ -\frac{\cos^3 x}{\Delta^2} E + \int \cos^3 x \frac{dx}{\Delta} - \right.$$

$$\left. - \int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^2} \right\} = \frac{1}{2k^2} \left\{ -\mu_1 + \frac{\cos x}{\Delta^2} E - \frac{1}{k} Bg\sin(k \sin x) \right\}, \;.\;.\;. \quad (217)$$

waarbij men de volgende integraal noodig had, afgeleid uit het algemeene herleidingstheorema (C_2),

$$\int \cos^3 x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k^2} \left\{ \sin x \,.\, \Delta - \frac{1}{k}(1 - 2k^2)\, Bg\sin(k \sin x) \right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (\theta_2)$$

Op dezelfde wijze stelle men nog $p = 3$ in de formule (LXIII), — hetgeen wegens den factor $p - 3$ niet mogelijk zoude geweest zijn in de volgende vergelijking (LXIV); dan komt er

$$\int \sin x \,.\, \cos^3 x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{2k^2} \left\{ -\cos^2 x \,.\, E + \int \cos^2 x \,.\, \Delta\, dx - 2(1-k^2) \int \sin x \,.\, \cos x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{6k^4} \{ -6(1-k^2) k^2 \iota + [2(2-k^2) - 3\Delta^2] E - (1-k^2) F + k^2 \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \}; \;.\; (218)$$

en nu kan men in de vorige vergelijking (L_4) $n = 4$ en $p = 3$ onderstellen, en vervolgens deze laatste uitkomst invoeren, om langs dien omweg te geraken tot

$$\int \sin x \,.\, \cos^3 x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2(1-k^2)} \left\{ -\frac{\cos^4 x}{\Delta^2} E + \int \cos^4 x \frac{dx}{\Delta} - 2 \int \sin x \,.\, \cos^3 x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2k^2} \left\{ 2k^2 \iota - \frac{1 - k^2 \cos 2x}{\Delta^2} E + (1-k^2) F \right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (219)$$

Geleid door de ondervinding, opgedaan in N°. 11 van Hoofdst. II, behoeven wij hier geene andere substitutiën voor $\varphi(x)$ in het algemeene theorema (**d**) te beproeven, dewijl wij toch hier, evenmin als daar, tot bruikbare uitkomsten zouden gevoerd worden.

11. Gaan wij dus over tot de algemeene herleidingsformulen (F_1) tot (F_8), in Hoofdstuk I gevonden. Ten einde hier tot vruchtbare toepassing van het theorema (**c**) te kunnen komen, is het allereerst noodzakelijk, om de hier te huis behoorende eindintegralen te zoeken. Enkele dezer integralen zijn reeds vroeger gevonden, namelijk

$\int \sin x \,.\, E dx$, . . . (127) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} E$, . . . (131) $\int \cos x \,.\, E dx$, . . . (126)

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} E$, . . (128) $\int tang x \,.\, \cos^2 x \,.\, E dx$, . . (121) $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{1}{2} x} E$, . . (138)

$\int \sin \frac{1}{2} x \,.\, E dx$, . . (146) $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2} x} E$, . . (137) $\int \cos \frac{1}{2} x \,.\, E dx$, . . (143)

$\int tang \frac{1}{2} x \,.\, \cos^4 \frac{1}{2} x \,.\, E dx$, ... (133) $\int tang^3 \frac{1}{2} x \,.\, \cos^4 \frac{1}{2} x \,.\, E dx$; . . . . . (132)

terwijl daartoe nog behooren

$$\int \sin^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, E dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos x)\, E dx = \frac{1}{2} \Big\{ \varepsilon_1 - \sin x \,.\, E + \frac{1}{2} -$$
$$- \frac{1}{2k}(1 - k^2)\, L \frac{\Delta + k \cos x}{1 + k} - \frac{1}{2} \cos x \,.\, \Delta \Big\}, \ldots \ldots (220)$$

$$\int \cos^2 \tfrac{1}{2} x \,.\, E dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x)\, E dx = \frac{1}{2} \Big\{ \varepsilon_1 + \sin x \,.\, E - \frac{1}{2} +$$
$$+ \frac{1}{2k}(1 - k^2)\, L \frac{\Delta + k \cos x}{1 + k} + \frac{1}{2} \cos x \,.\, \Delta \Big\} \ldots \ldots (221)$$

Verder zal men de nog ontbrekende eindintegralen moeten afleiden uit de in Hoofdstuk I gevonden integralen (ξ_1) tot (ξ_{15}), en wel door middel van het theorema (**c**). Daar hier de $\varphi(x)$ overal uit een produkt van twee factoren of een quotient ontstaat, zal $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ steeds twee termen bevatten; waarvan na herleiding de eerste eene der bovengemelde bekende integralen zal blijken te zijn, terwijl daarnaast de tweede de nieuwe, gezochte eindintegralen opleveren zal. Langs dezen weg verkrijgt men achtereenvolgens het volgende zestiental, — de eerste formule (ξ_1) toch levert met behulp der integraal (161) twee uitkomsten —

$$\int \sin^2 x \,.\, E dx = \frac{1}{2} \Big\{ \varepsilon_1 - \sin x \,.\, \cos x \,.\, E + \frac{1}{3k^2}(1 - \Delta^3) \Big\}, \ldots \ldots (222)$$

$$\int \cos^2 x \,.\, E dx = \frac{1}{2} \Big\{ \varepsilon_1 + \sin x \,.\, \cos x \,.\, E - \frac{1}{3k^2}(1 - \Delta^3) \Big\}, \ldots \ldots (223)$$

$$\int sin^4 x \,.\, E dx = \frac{1}{8} \Big\{ 3\,\varepsilon_1 - (3 + 2\,sin^2 x)\, sin\, x \,.\, cos\, x \,.\, E +$$

$$+ \frac{1}{15\,k^4} [\,(2 + 3\,k^2)\, 5\,(1 - \Delta^3) - 6\,(1 - \Delta^5)\,] \Big\}, \quad (224)$$

$$\int cos^4 x \,.\, E dx = \frac{1}{8} \Big\{ 3\,\varepsilon_1 + (3 + 2\,cos^2 x)\, sin\, x \,.\, cos\, x \,.\, E +$$

$$+ \frac{1}{15\,k^4} [\,(2 - 5\,k^2)\, 5\,(1 - \Delta^3) - 6\,(1 - \Delta^5)\,] \Big\}, \quad (225)$$

$$\int sin^3 x \,.\, E dx = \frac{1}{24\,k^3} \{ - (2 + sin^2 x)\, 8\,k^3 cos\, x \,.\, E +$$

$$+ (1 + 8\,k^2)\, Bg\,sin\,(k\,sin\,x) + (1 + 8\,k^2 - 2\,\Delta^2)\, k\,sin\,x \,.\, \Delta \}, \quad (226)$$

$$\int cos^3 x \,.\, E dx = \frac{1}{24\,k^3} \Big\{ (2 + cos^2 x)\, 8\,k^3 sin\, x \,.\, E - (1 - 9\,k^2)(1 - k^2)\, L \frac{\Delta + k\,cos\,x}{1 + k} -$$

$$- k\,(1 + 9\,k^2) - [\,(1 - 9\,k^2) - 2\,\Delta^2\,]\, k\,cos\,x \,.\, \Delta \Big\}, \quad (227)$$

$$\int tang^4 x \,.\, cos^2 x \,.\, E dx = -\frac{3}{2}\varepsilon_1 + \frac{1}{2}(2 + cos^2 x)\, tang\, x \,.\, E -$$

$$- \sqrt{1 - k^2}\, L \frac{\sqrt{1 - k^2} + \Delta}{(1 + \sqrt{1 - k^2})\, cos\, x} - \frac{1}{6\,k^2} \{ (1 - \Delta^3) + 6\,k^2 (1 - \Delta) \}, \quad (228)$$

$$\int \frac{cos^2 x}{tang^2 x} E dx = -\frac{3}{2}\varepsilon_1 - \frac{1}{2}(2 + sin^2 x)\, cot\, x \,.\, E + L \frac{2\,sin\,x}{1 + \Delta} +$$

$$+ \frac{1}{6k^2} \{ (1 - \Delta^3) - 6\,k^2 (1 - \Delta) \}, \quad (229)$$

$$\int sin^3 \tfrac{1}{2} x \,.\, E dx = -\frac{1}{3}(5 - cos\,x)\, cos\, \tfrac{1}{2} x \,.\, E + \frac{2}{45\,k\sqrt{2\,k}} \Big\{ (1 + 8\,k)(1 - k)\, 3\,F(l, z) -$$

$$- (1 - 8\,k^2)\, 6\,E\,(l, z) - \Big[(1 - 16\,k + 4\,k^2) - 4\,(1 + k)\, k\,cos\,x -$$

$$- \frac{2\,(4 + 5\,k + 20\,k^2) - (1 + 4\,k)\,\Delta^2}{1 + k - k\,cos\,x} \Big]\, 2\,sin\, \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta \sqrt{2\,k} \Big\}, \quad (230)$$

$$\int \cos^3 \tfrac{1}{2} x . E dx = \frac{1}{3}(5 + \cos x) \sin \tfrac{1}{2} x . E + \frac{2}{45 k \sqrt{2k}} \Big\{ (1 + 8k)(1 - k) 3 F(l, y) -$$

$$- (1 - 8k^2) 6 E(l, y) - \Big[(1 - 16k + 4k^2) - 4(1 + k) k \cos x -$$

$$- \frac{2(4 + 5k + 20k^2) - (1 + 4k)\Delta^2}{1 + k + k \cos x} \Big] \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big\}, \quad \ldots \ldots \ldots (231)$$

$$\int \sin^4 \tfrac{1}{2} x . E dx = \frac{1}{24 k^2} \Big\{ 9 k^2 \varepsilon_1 - (4 - \cos x) 3 k^2 \sin x . E -$$

$$- 6k(1 - k^2) L \frac{\Delta + k \cos x}{1 + k} - 1 + 6k^2 - 6k^2 \cos x . \Delta + \Delta^3 \Big\}, \quad \ldots \ldots \ldots (232)$$

$$\int \cos^4 \tfrac{1}{2} x . E dx = \frac{1}{24 k^2} \Big\{ 9 k^2 \varepsilon_1 + (4 + \cos x) 3 k^2 \sin x . E +$$

$$+ 6k(1 - k^2) L \frac{\Delta + k \cos x}{1 + k} - 1 - 6k^2 + 6k^2 \cos x . \Delta + \Delta^3 \Big\}, \quad \ldots \ldots \ldots (233)$$

$$\int \sin^5 \tfrac{1}{2} x . E dx = -\frac{1}{6}(43 - 14 \cos x + 3 \cos^2 x) \cos \tfrac{1}{2} x . E +$$

$$+ \frac{1}{63 k^2 \sqrt{2k}} \Big\{ (-1 + 16k + 96k^2) 3(1 - k) F(l, z) - (17 - 96k^2) 6k E(l, z) -$$

$$- \Big[(-3 + 16k - 160k^2 + 64k^3) + 64(1 + k) k^2 \cos x -$$

$$- 2k \frac{67 + 80k + 224k^2 + (1 + 4k) 5 \Delta^2}{1 + k - k \cos x} \Big] \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big\}, \quad \ldots \ldots \ldots (234)$$

$$\int \cos^5 \tfrac{1}{2} x . E dx = \frac{1}{6}(43 + 14 \cos x + 3 \cos^2 x) \sin \tfrac{1}{2} x . E +$$

$$+ \frac{1}{63 k^2 \sqrt{2k}} \Big\{ (-1 + 16k + 96k^2) 3(1 - k) F(l, y) -$$

$$- (17 - 96k^2) 6k E(l, y) - 9 - \Big[(-3 + 16k - 160k^2 + 64k^3) + 64(1 + k) k^2 \cos x -$$

$$- 2k \frac{67 + 80k + 224k^2 + (1 + 4k) 5 \Delta^2}{1 + k + k \cos x} \Big] \cos \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big\}, \quad \ldots \ldots \ldots (235)$$

$$\int \frac{\cos^4 \frac{1}{2}x}{tang^2 \frac{1}{2}x} E dx = -\frac{15}{8}\varepsilon_1 - \frac{1}{8}[(4+\cos x)5k^2 \sin x + 16\cos^4\tfrac{1}{2}x \, . \cot \tfrac{1}{2}x]E + 2L\frac{2(\Delta - \cos x)}{1+\Delta} +$$

$$-\frac{1}{2k}(1-5k^2)\,L\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + \frac{1}{24k^2}\{(1-36k^2) + (4-\cos x)\,12k^2\Delta - \Delta^3\}, \;.. (236)$$

$$\int tang^6 \tfrac{1}{2}x \, . \cos^4 \tfrac{1}{2}x \, . E dx = -\frac{15}{8}\varepsilon_1 + \frac{1}{8}[(4-\cos x)\,5k^2 \sin x + 16 \sin^4 \tfrac{1}{2}x \, . tang \tfrac{1}{2}x]\,E -$$

$$-2L\frac{(\Delta - \cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2k}(1-5k^2)\,L\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} +$$

$$+\frac{1}{24k^2}\{(1-60k^2) + (4+\cos x)\,12k^2\Delta - \Delta^3\} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (237)$$

Terwijl later nog blijken zal, dat men verder de volgende integralen bij de herleidingen behoeft

$\int E dx$, . . (162) $\int \frac{\cos^2 x}{tang\, x} E$, . . (161) $\int tang^3 x \, . \cos^2 x \, . E dx$, . . (155)

$\int \cot \frac{1}{2}x \, . \cos^4 \frac{1}{2}x \, . E dx$, ... (186) $\int tang^5 \frac{1}{2}x \, . \cos^4 \frac{1}{2}x \, . E dx$, ... (178)

$\int \frac{dx}{\cos x} E$, . . (149) $\int \frac{dx}{\cos \frac{1}{2}x} E$. . . (170).

12 En hiermede zijn nu alle noodige uitkomsten gereed, zoodat wij kunnen overgaan tot de toepassing van het theorema (**c**), of liever van (**c**$_1$), op het stelsel algemeene herleidingsvergelijkingen (F_1) tot (F_8), om daaruit een ander stel afteleiden, dat den factor E bevat.

Vooreerst geeft deze toepassing bij de formule (F_1)

$$(p+2)\,k^2 \left\{ \sin^p x \, . \cos x \, . E - \int E dx\,[\,p \sin^{p-1} x \, . \cos^2 x - \sin^{p+1} x\,] \right\} = -\sin^{p-1} x \, . \Delta^3 +$$

$$+ (p-1) \left\{ \sin^{p-2} x \, . \cos x \, . E - \int E dx\,[(p-2) \sin^{p-3} x \, . \cos^2 x - \sin^{p-1} x] \right\}.$$

Door telkens de herleiding

$$A \sin^{a-1} x \, . \cos^2 x - \sin^{a+1} x = A \sin^{a-1} x - (A+1) \sin^{a+1} x$$

toetepassen, en daarna $p-1$ voor p te stellen, verkrijgt men

$$\int \sin^p x \,.\, E dx = \frac{1}{(p+1)\,p k^2} \Big\{ [\,(p-2)^2 + (p^2-1)\,k^2\,] \int \sin^{p-2} x \,.\, E dx -$$

$$- (p-2)(p-3) \int \sin^{p-4} x \,.\, E dx + [\,-3 +$$

$$+ (p+1)\,\Delta^2\,]\, \sin^{p-3} x \,.\, \cos x \,.\, E - \sin^{p-2} x \,.\, \Delta^3 \Big\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(LXV)}$$

Hierbij moeten als eindintegralen dienst doen, bij evene waarden van den exponent p, voor $p=2$, de integralen (131), (162), (222) en (224); en bij onevene waarden van p, voor $p=3$, de integralen (127) en (226).

Wanneer wij de herleidingsformule (F_2) op dezelfde wijze behandelen, zoo komt er

$$(p+2)\,k^2 \Big\{ \sin x \,.\, \cos^p x \,.\, E - \int E dx\, [\,\cos^{p+1} x - p \sin^2 x \,.\, \cos^{p-1} x\,] \Big\} = 1 -$$

$$- \cos^{p-1} x \,.\, \Delta^3 - (p-1)(1-k^2) \Big\{ \sin x . \cos^{p-2} x . E - \int E dx [\cos^{p-1} x - (p-2) \sin^2 x . \cos^{p-3} x] \Big\}.$$

Hier behoeven wij de herleiding

$$\cos^{a+1} x - A \sin^2 x \,.\, \cos^{a-1} x = (A+1) \cos^{a+1} x - A \cos^a x;$$

vervangen wij dan later p door $p-1$, dan wordt

$$\int \cos^p x \,.\, E dx = \frac{1}{(p+1)\,p k^2} \Big\{ [\,(p-2)^2 (1-k^2) + (p^2-1)\,k^2\,] \int \cos^{p-2} x \,.\, E dx -$$

$$- (p-2)(p-3)(1-k^2) \int \cos^{p-4} x \,.\, E dx + [\,-3\,(1-k^2) +$$

$$+ (p+1)\,\Delta^2\,]\, \sin x \,.\, \cos^{p-3} x \,.\, E - 1 + \cos^{p-2} x \,.\, \Delta^3 \Big\} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(LXVI)}$$

Wat de eindintegralen betreft, moeten wij wederom onderscheid maken tusschen evene en onevene waarden van p; voor het geval dat p even is, stelle men $p=2$, dan vindt men de integralen (128), (162), (223) en (225); evenzoo voor het geval dat p oneven is, de integralen (126) en (227).

Ook op de formule (F_3) kan men hetzelfde algemeene theorema toepassen, zoodat er komt

$$(p-3)(1-k^2)\left\{ tang^p x \,.\, cos^2 x \,.\, E - \int E\,dx\,[\,p\,tang^{p-1} x - 2\,tang^p x \,.\, sin\,x \,.\, cos\,x\,]\right\} =$$

$$= tang^{p-3} x \,.\, \Delta^3 - [\,2\,(p-3) - p\,k^2\,]\left\{ tang^{p-2} x \,.\, cos^2 x \,.\, E - \right.$$

$$\left. - \int E\,dx[(p-2)\,tang^{p-3} x - 2\,tang^{p-2} x \,.\, sin\,x \,.\, cos\,x\,]\right\} - (p-3)\left\{ tang^{p-4} x \,.\, cos^2 x \,.\, E - \right.$$

$$\left. - \int E\,dx\,[\,(p-4)\,tang^{p-5} x - 2\,tang^{p-4} x \,.\, sin\,x \,.\, cos\,x\,]\right\}.$$

De goniometrische herleidingsformule, die wij hier telkens hebben toetepassen, luidt

$$A\,tang^{a-1} x - 2\,tang^a x \,.\, sin\,x \,.\, cos\,x = (A-2)\,tang^{a+1} x \,.\, cos^2 x + A\,tang^{a-1} x \,.\, cos^2 x.$$

En stellen wij daarna $p-1$ voor p in de plaats, zoo erlangen wij

$$\int tang^p x \,.\, cos^2 x \,.\, E\,dx = \frac{1}{(p-3)(p-4)(1-k^2)}\left\{ - [\,(p-4)(3p-11) - \right.$$

$$- (p-1)(2p-9)\,k^2\,]\int tang^{p-2} x \,.\, cos^2 x \,.\, E\,dx - [\,(p-4)(3p-13) -$$

$$-(p-1)(p-3)k^2]\int tang^{p-4} x \,.\, cos^2 x \,.\, E\,dx - (p-4)(p-5)\int tang^{p-6} x \,.\, cos^2 x \,.\, E\,dx +$$

$$\left. + [\,-3\,cos^2 x + \{\,(p-4) + 3\,cos^2 x\,\}\,\Delta^2\,]\,\frac{tang^{p-5} x}{cos^2 x}\,E - tang^{p-4} x \,.\, \Delta^3 \right\}; \quad \text{(LXVII)}$$

waarbij nu de volgende eindintegralen behooren. Vooreerst bij evene waarden van p, voor $p=8$, de integralen (229), (223), (222) en (228); en bij onevene waarden van p, voor $p=5$ de integralen (161), (121) en (155).

10. Het volgende drietal herleidingsvergelijkingen, waarin $\frac{1}{2}x$ het argument is, laten ook eene dergelijke toepassing van ons theorema toe; dit levert toch vooreerst bij de formule (F_4) de volgende uitkomst.

$$(p-3)4\,k^2\left\{ sin^p \tfrac{1}{2} x \,.\, cos \tfrac{1}{2} x \,.\, E - \int E\,dx\,\frac{1}{2}\,[p\,sin^{p-1} \tfrac{1}{2} x \,.\, cos^2 \tfrac{1}{2} x - sin^{p+1} \tfrac{1}{2} x]\right\} = 2\,sin^{p-3} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta^3 +$$

$$+ 4\,pk^2\left\{ sin^{p-2} \tfrac{1}{2} x \,.\, cos \tfrac{1}{2} x \,.\, E - \int E\,dx\,\frac{1}{2}\,[(p-2)\,sin^{p-3} \tfrac{1}{2} x \,.\, cos^2 \tfrac{1}{2} x - sin^{p-1} \tfrac{1}{2} x]\right\} -$$

$$- (p-3)\left\{ sin^{p-4} \tfrac{1}{2} x \,.\, cos \tfrac{1}{2} x \,.\, E - \int E\,dx\,\frac{1}{2}\,[\,(p-4)\,sin^{p-5} \tfrac{1}{2} x \,.\, cos^2 \tfrac{1}{2} x - sin^{p-3} \tfrac{1}{2} x]\right\}.$$

Wanneer men den tweeledigen vorm, die hier overal onder het integraalteeken voorkomt, goniometrisch aldus herleidt,

$$A\,\sin^{a-2}\tfrac{1}{2}x\,.\cos^2\tfrac{1}{2}x - \sin^a\tfrac{1}{2}x = A\,\sin^{a-2}\tfrac{1}{2}x - (A+1)\sin^a\tfrac{1}{2}x,$$

en vervolgens den exponent p met de eenheid vermindert, verkrijgt men na oplossing de gezochte integraal

$$\int \sin^p\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx = \frac{1}{(p+2)\,4\,p\,k^2}\Big\{(p-1)\,8\,p\,k^2\int \sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx - [(p-4)^2 +$$

$$+ (p-1)(p-3)\,4\,k^2]\int \sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx + (p-4)(p-5)\int \sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx +$$

$$+ [6(1-k^2) + 6\,k^2\cos x - (p+2)\Delta^2]\sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\sin x\,.\,E + 4\sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta^3\Big\}\,.\,.\,\text{(LXVIII)}$$

Als eindintegralen treden hier op, voor het geval dat de exponent p evene waarden heeft, voor $p = 4$, de integralen (138), (162), (220) en (232); voor het andere geval daarentegen dat p onevene waarden heeft, voor $p = 7$, de integralen (146), (230) en (234).

Wat de algemeene herleidingsformule (F_5) betreft, zij geeft na toepassing van ons theorema

$$(p+3)\,4\,k^2\Big\{\sin\tfrac{1}{2}x\,.\cos^p\tfrac{1}{2}x\,.\,E - \int E\,dx\,\frac{1}{2}[\cos^{p+1}\tfrac{1}{2}x - p\sin^2\tfrac{1}{2}x\,.\cos^{p-1}\tfrac{1}{2}x]\Big\} =$$

$$= 2 - 2\cos^{p-3}\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta^3 + 4\,p\,k^2\Big\{\sin\tfrac{1}{2}x\,.\cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,E -$$

$$-\int E\,dx\,\frac{1}{2}[\cos^{p-1}\tfrac{1}{2}x - (p-2)\sin^2\tfrac{1}{2}x\,.\cos^{p-3}\tfrac{1}{2}x]\Big\} - (p-3)\Big\{\sin\tfrac{1}{2}x\,.\cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,E -$$

$$-\int E\,dx\,\frac{1}{2}[\cos^{p-3}\tfrac{1}{2}x - (p-4)\sin^2\tfrac{1}{2}x\,.\cos^{p-5}\tfrac{1}{2}x]\Big\}.$$

De goniometrische herleidingsformule

$$\cos^a\tfrac{1}{2}x - A\sin^2\tfrac{1}{2}x\,.\cos^{a-2}\tfrac{1}{2}x = (A+1)\cos^a\tfrac{1}{2}x - A\cos^{a-2}\tfrac{1}{2}x$$

moeten wij hier telkens gebruiken bij iederen vorm onder het integraalteeken, en daarna den exponent p door $p-1$ vervangen. Op deze wijze geraakt men tot de herleidingsvergelijking

$$\int \cos^p \tfrac{1}{2} x \,.\, E\,dx = \frac{1}{(p+2)\,4\,p\,k^2} \Big\{ (p-1)\,8\,p\,k^2 \int \cos^{p-2} \tfrac{1}{2} x \,.\, E\,dx -$$

$$- \left[(p-4)^2 + (p-1)(p-3)4\,k^2\right] \int \cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x \,.\, E\,dx + (p-4)(p-5) \int \cos^{p-6} \tfrac{1}{2} x \,.\, E\,dx -$$

$$-\left[6(1-k^2) - 6\,k^2 \cos x - (p+2)\Delta^2\right] \cos^{p-6} \tfrac{1}{2} x \,.\, \sin x \,.\, E - 4 + 4 \cos^{p-4} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta^3 \Big\} \quad . . \text{(LXIX)}$$

Ook voor haar zijn de eindintegralen reeds allen bekend en moet men ook hier onderscheid maken, naarmate de exponent p eene evene of onevene waarde heeft. Bij evene p stelle men $p = 4$ en vindt alsdan de integralen (137), (162), (221) en (233); bij onevene p, stelle men $p = 7$ en vindt dan de integralen (143), (231) en (235).

Eindelijk hebben wij ons theorema nog op de herleidingsformule (F_6) toetepassen, waardoor men verkrijgt

$$(p-5)\Big\{ \tan g^p \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^4 \tfrac{1}{2} x \,.\, E - \int E\,dx \frac{1}{2}\left[p \tan g^{p-1} \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^2 \tfrac{1}{2} x - 4 \tan g^p \tfrac{1}{2} x \,.\, \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^3 \tfrac{1}{2} x\right] \Big\} =$$

$$= 2 \tan g^{p-5} \tfrac{1}{2} x \,.\, \Delta^3 - \left[3(p-5) - (p-8)\,4\,k^2\right] \Big\{ \tan g^{p-2} \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^4 \tfrac{1}{2} x \,.\, E -$$

$$- \int E\,dx \frac{1}{2}\left[(p-2) \tan g^{p-3} \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^2 \tfrac{1}{2} x - 4 \tan g^{p-2} \tfrac{1}{2} x \,.\, \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^3 \tfrac{1}{2} x\right] \Big\} -$$

$$-\left[3(p-5) - (p-2)\,4k^2\right] \Big\{ \tan g^{p-4} \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^4 \tfrac{1}{2} x \,.\, E - \int E\,dx \frac{1}{2}\left[(p-4) \tan g^{p-5} \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^2 \tfrac{1}{2} x -\right.$$

$$\left.- 4 \tan g^{p-4} \tfrac{1}{2} x \,.\, \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^3 \tfrac{1}{2} x\right] \Big\} - (p-5) \Big\{ \tan g^{p-6} \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^4 \tfrac{1}{2} x \,.\, E -$$

$$- \int E\,dx \frac{1}{2}\left[(p-6) \tan g^{p-7} \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^2 \tfrac{1}{2} x - 4 \tan g^{p-6} \tfrac{1}{2} x \,.\, \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^3 \tfrac{1}{2} x\right] \Big\}.$$

Hier hebben wij de goniometrische herleiding

$$A \tan g^{a-2} \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^2 \tfrac{1}{2} x - 4 \tan g^{a-1} \tfrac{1}{2} x \,.\, \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^3 \tfrac{1}{2} x = (A-4) \tan g^a \tfrac{1}{2} x \,.\, \cos^4 \tfrac{1}{2} x +$$

$$+ A \tan g^{a-2} x \,.\, \cos^4 \tfrac{1}{2} x$$

noodig: tevens moeten wij $p-1$ voor p in de plaats stellen. Langs dezen weg komt er

$$\int tang^p \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . E dx = \frac{1}{(p-5)(p-6)} \Big\{ -[(p-6)(2p-11) -$$

$$-(p-7)(p-9) 2k^2] 2 \int tang^{p-2} \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . E dx - [3(p-6)^2 -$$

$$-(p-3)(p-9) 4k^2] 2 \int tang^{p-4} \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . E dx - [(p-6)(2p-13) -$$

$$-(p-3)(p-5) 2k^2] 2 \int tang^{p-6} \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . E dx -$$

$$-(p-6)(p-7) \int tang^{p-8} \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . E dx + [-3 \cos x +$$

$$+(p-6+3\cos x)\Delta^2] \frac{4 tang^{p-6} \tfrac{1}{2}x}{\sin x} E - 4 tang^{p-6} \tfrac{1}{2}x . \Delta^3 \Big\} \ldots\ldots\ldots \text{(LXX)}$$

Ten aanzien der eindintegralen, waarbij men weder de gevallen moet scheiden, dat de exponent p even en oneven is, verkrijgt men in het eerste geval, voor $p=8$, de integralen (236), (233), (222), (232) en (237), en in het tweede geval, voor $p=7$ de integralen (186), (133), (132), (178).

14. Ten slotte blijven er nog de twee laatste der algemeene herleidingsformulen (F) uit Hoofdstuk I over. Beginnen wij met de toepassing van ons theorema op de vergelijking (F_7), dan komt er

$$(p-1)(1-k^2) \Big\{ \frac{\sin x}{\cos^p x} E - \int E dx \Big[\frac{1}{\cos^{p-1} x} + p \frac{\sin^2 x}{\cos^{p+1} x} \Big] \Big\} = \frac{\Delta^3}{\cos^{p-1} x} -$$

$$-1-(p-4)k^2 \Big\{ \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x} E - \int E dx \Big[\frac{1}{\cos^{p-3} x} + (p-2) \frac{\sin^2 x}{\cos^{p-1} x} \Big] \Big\}.$$

Wanneer wij de goniometrische herleiding

$$\frac{1}{\cos^{a-2} x} + A \frac{\sin^2 x}{\cos^a x} = A \frac{1}{\cos^a x} - (A-1) \frac{1}{\cos^{a-2} x}$$

hier toepassen, en daarna p vervangen door $p-1$, erlangen wij

$$\int \frac{dx}{\cos^p x} E = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)} \Big\{ [(p-2)^2 - (2p^2 - 12p + 19)k^2] \int \frac{dx}{\cos^{p-2} x} E +$$

$$+(p-4)(p-5)k^2 \int \frac{dx}{\cos^{p-4} x} E + [3(1-k^2) + (p-5)\Delta^2] \frac{\sin x}{\cos^{p-1} x} E - \frac{\Delta^3}{\cos^{p-2} x} + 1 \Big\} \ldots \text{(LXXI)}$$

Hierbij zijn nu de trouwens reeds vroeger gevonden eindintegralen bijeen te zoeken; is de exponent p even, dan vindt men daarvoor de integralen (128) en (162): is hij echter oneven, alsdan de integralen (126) en (149).

Ten laatste heeft men nog de herleidingsformule (F_8), die door middel van het steeds gebruikte theorema (**c**) dadelijk levert

$$(p-1)\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^p\frac{1}{2}x}E-\int E\,dx\,\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}+p\,\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{\cos^{p+1}\frac{1}{2}x}\right]\right\}=\frac{2\Delta^3}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}-2+$$
$$+(p-4)\,4k^2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}E-\int E\,dx\,\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\cos^{p-3}\frac{1}{2}x}+(p-2)\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}\right]\right\}-$$
$$-(p-7)\,4k^2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}E-\int E\,dx\,\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\cos^{p-5}\frac{1}{2}x}+(p-4)\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{\cos^{p-3}\frac{1}{2}x}\right]\right\}.$$

Geheel overeenkomstig met het vorige gebruike men hier telkens de goniometrische herleidingsformule

$$\frac{1}{\cos^{a-2}\frac{1}{2}x}+A\,\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{\cos^a\frac{1}{2}x}=A\,\frac{1}{\cos^a\frac{1}{2}x}-(A-1)\,\frac{1}{\cos^{a-2}\frac{1}{2}x},$$

en stelle vervolgens $p-1$ voor p in de plaats, zoo komt er eindelijk

$$\int\frac{dx}{\cos^p\frac{1}{2}x}E=\frac{1}{(p-1)(p-2)}\left\{\left[(p-2)^2+(p-3)(p-5)\,4k^2\right]\int\frac{dx}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}E-\right.$$
$$-(p-5)(p-6)\,8k^2\int\frac{dx}{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}E+(p-6)(p-8)\,4k^2\int\frac{dx}{\cos^{p-6}\frac{1}{2}x}E+$$
$$\left.+\left[6(1-k^2)-6k^2\cos x+(p-8)\Delta^2\right]\frac{\sin x}{\cos^p\frac{1}{2}x}E+4-\frac{4\Delta^3}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}\right\}\quad . \; . \;(\mathrm{LXXII})$$

Voor de eindintegralen moet men weder onderscheid maken tusschen de gevallen, dat de exponent evene dan wel onevene waarden bezit. In het eerste dezer gevallen komt men voor $p=4$ tot de integralen (137) en (162); in het tweede tot de integralen (143) en (170).

TAFELS 69—102.

VERKLARING.

$$\int = \int_0^x, \qquad \Delta = \sqrt{1-k^2 sin^2 x}, \qquad F = \int_0^x \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}}, \qquad E = \int_0^x d\varphi \sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}.$$

Verder is bij $\Delta(l,y)$, $F(l,y)$, $E(l,y)$, en $\Delta(l,z)$, $F(l,z)$, $E(l,z)$,

$$tang\,\tfrac{1}{2}y = cos\,\tfrac{1}{2}x . \sqrt{2k}, \qquad l^2 = \frac{1}{2}(1+k),$$

$$tang\,\tfrac{1}{2}z = sin\,\tfrac{1}{2}x . \sqrt{2k}, \qquad r^2 = \frac{1}{8k}(1+2k)^2.$$

Er komen als nieuwe transcendenten

$$\alpha_1 = \int \frac{dx}{cos\,x} E, \qquad \eta_1 = \int \frac{dx}{sin\,\frac{1}{2}x} E,$$

$$\beta_1 = \int \frac{dx}{sin\,x} E, \qquad \theta_1 = \int cos\,x . E \frac{dx}{\Delta},$$

$$\gamma_1 = \int \frac{sin\,x}{cos\,x} E dx, \qquad \iota_1 = \int sin\,x . cos\,x . E \frac{dx}{\Delta^2},$$

$$\delta_1 = \int \frac{cos\,x}{sin\,x} E dx, \qquad \varkappa_1 = \int cos\,x . E \frac{dx}{\Delta^2},$$

$$\varepsilon_1 = \int E dx, \qquad \lambda_1 = \int sin\,x . E \frac{dx}{\Delta},$$

$$\xi_1 = \int \frac{dx}{cos\,\frac{1}{2}x} E, \qquad \mu_1 = \int sin\,x . E \frac{dx}{\Delta^2}.$$

B 23

TAFEL 69.

$$\int \sin^p x \,.\, E dx = \frac{1}{(p+1)\,p k^2} \Big\{ [\,(p-2)^2 + (p^2-1)\,k^2\,] \int \sin^{p-2} x \,.\, E dx -$$
$$-(p-2)(p-3)\int \sin^{p-4} x \,.\, E dx + [-3+(p+1)\Delta^2]\sin^{p-3} x \,.\, \cos x \,.\, E - \sin^{p-2} x \,.\, \Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} E = -\cot x \,.\, E - 1 + L\frac{2\sin x}{1+\Delta} + \Delta. \qquad \int \frac{dx}{\sin x} E = \beta_1.$$

$$\int E dx = \varepsilon_1. \qquad \int \sin x \,.\, E dx = -\cos x \,.\, E + \frac{1}{2k} Bg\sin(k\sin x) + \frac{1}{2}\sin x \,.\, \Delta.$$

$$\int \sin^2 x \,.\, E dx = \frac{1}{2}\Big\{ \varepsilon_1 - \sin x \,.\, \cos x \,.\, E + \frac{1}{3k^2}(1-\Delta^3) \Big\}.$$

$$\int \sin^3 x \,.\, E dx = \frac{1}{24k^3}\{-(2+\sin^2 x)8k^3\cos x.E + (1+8k^2)Bg\sin(k\sin x) + (1+8k^2-2\Delta^2)k\sin x.\Delta\}.$$

$$\int \sin^4 x \,.\, E dx = \frac{1}{8}\Big\{3\varepsilon_1 - (3+2\sin^2 x)\sin x \,.\, \cos x.E + \frac{1}{15k^4}[(2+3k^2)5(1-\Delta^3) - 6(1-\Delta^5)]\Big\}.$$

TAFEL 70.

$$\int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, E dx = \frac{1}{(p+1)(p+2))k^2}\Big\{[(p-1)+(p+1)k^2](p-1)\int \sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, E dx -$$
$$-(p-2)(p-3)\int \sin^{p-4} x.\cos x.E dx - [3\cos^2 x + \{1-(p+2)\cos^2 x\}\Delta^2]\sin^{p-3} x.E - \sin^{p-2} x.\cos x.\Delta^3\Big\}.$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} E dx = -\frac{1}{\sin x}E + L\frac{\Delta - \cos x}{\sin x} + kL\frac{\Delta + k\cos x}{1+k}. \qquad \int \frac{\cos x}{\sin x} E dx = \delta_1.$$

$$\int \cos x \,.\, E dx = \sin x \,.\, E - \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}(1-k^2)\,L\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + \frac{1}{2}\cos x \,.\, \Delta.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos x \,.\, E dx = \frac{1}{6k^2}\{(4-2k^2-3\Delta^2)E - (1-k^2)F + k^2\sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\}.$$

$$\int \sin^2 x.\cos x.E dx = \frac{1}{24k^2}\Big\{8k^2\sin^3 x.E + (1-3k^2) + \frac{1}{k^2}(1-k^2)(1+3k^2)L\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + (1+3k^2-2\Delta^2)\cos x.\Delta\Big\}.$$

$$\int \sin^3 x \,.\, \cos x \,.\, E dx = \frac{1}{60k^4}\{(2+3k^2-8k^4+15k^4\sin^4 x)E - (1-k^2)(1+2k^2)\,2F +$$
$$+ [\,2(1+2k^2) - 3\Delta^2\,]\,k^2\sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\}.$$

---

*

TAFEL 71.

$$\int sin^p x \,.\, E \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{(p-1)\,p\,k^2} \Big\{ [(p-3)^2 + (p-1)(2p-3)k^2] \int sin^{p-2} x \,.\, E \frac{dx}{\cos x} -$$

$$-[(2p^2-15p+29)+(p-3)(p-1)k^2] \int sin^{p-4} x \,.\, E \frac{dx}{\cos x} + (p-4)(p-5) \int sin^{p-6} x \,.\, E \frac{dx}{\cos x} +$$

$$+ [3\cos^2 x + (1 - p\cos^2 x)\Delta^2]\, sin^{p-5} x \,.\, E + sin^{p-4} x \,.\, \cos x \,.\, \Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \,.\, \cos x} E = \gamma_1 + \delta_1. \qquad \int \frac{dx}{\cos x} E = \alpha_1. \qquad \int \frac{\sin x}{\cos x} E\, dx = \gamma_1.$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} E\, dx = \alpha_1 - \sin x \,.\, E + \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}(1-k^2)\, L \frac{\Delta + k\cos x}{1+k} - \frac{1}{2}\cos x \,.\, \Delta.$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} E\, dx = \gamma_1 - \frac{1}{6k^2} \{ (4 - 2k^2 - 3\Delta^2) E - (1-k^2) F + k^2 \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \}.$$

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos x} E\, dx = \alpha_1 + \frac{1}{24k^2} \Big\{ (3 + \sin^2 x)\, 8k^2 \sin x \,.\, E + (1 - 15k^2) +$$

$$+ \frac{1}{k}(1-k^2)(1+15k^2)\, L \frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + [(1+15k^2) - 2\Delta^2] \cos x \,.\, \Delta \Big\}.$$

TAFEL 72.

$$\int sin^p x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \,.\, E\, dx = \frac{1}{(p+2)k^2} \Big\{ - sin^{p-1} x \,.\, \Delta^3 \,.\, E + \int sin^{p-1} x \,.\, \Delta^4\, dx +$$

$$+ (p-1) \int sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \,.\, E\, dx \Big\}.$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} \Delta \,.\, E\, dx = \frac{1}{3} \Big\{ -\frac{1}{\sin^3 x} \Delta^3 \,.\, E + \frac{1}{2}(1-4k^2)\, L\, tang\, \tfrac{1}{2} x + k^4 - (1 + 2k^4 \sin^2 x) \frac{\cos x}{2\sin^2 x} \Big\}.$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \Delta \,.\, E\, dx = -k^2 \theta_1 - \frac{\Delta}{\sin x} E + k^2 \cos^2 x - k^2 - L\, tang\, \tfrac{1}{2} x.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \,.\, E\, dx = \frac{1}{24k^2} \{ [8(1-k^2) + 3k^4] x + 8\Delta^3 \,.\, E + [3(2-k^2) + 2\Delta^2]\, k^2 \sin x \,.\, \cos x \}.$$

TAFEL 73.

$$\int sin^p x \,.\, cos\, x \,.\, E \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{p\,k^2} \Big\{ - sin^{p-1} x \,.\, \Delta \,.\, E + \int sin^{p-1} x \,.\, \Delta^2 dx + \\ + (p-1) \int sin^{p-2} x \,.\, cos\, x \,.\, E \frac{dx}{\Delta} \Big\}.$$

$$\int \frac{cos\, x}{sin^2 x} E \frac{dx}{\Delta} = - \frac{\Delta}{sin\, x} E + k^2 cos\, x - k^2 + L\, tang\, \tfrac{1}{2} x. \qquad \int cos\, x \,.\, E \frac{dx}{\Delta} = \theta_1.$$

$$\int sin\, x \,.\, cos\, x \,.\, E \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k^2} \{(2-k^2)\, x - 2\,\Delta \,.\, E + k^2 sin\, x \,.\, cos\, x\}.$$

TAFEL 74.

$$\int sin^p x.cos\,x.\,E \frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{(p-1)k^2} \Big\{ - sin^{p-1}x.E + \int sin^{p-1}x.\Delta\, dx + (p-1) \int sin^{p-2}x.cos\,x.\,E \frac{dx}{\Delta^2} \Big\}.$$

$$\int cos\, x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^2} = \varkappa_1. \qquad \int sin\, x \,.\, cos\, x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^2} = \iota_1.$$

$$\int sin^2 x \,.\, cos\, x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{k^2} \Big\{ \varkappa_1 - sin\, x \,.\, E - \frac{1}{2k} (1-k^2)\, L \frac{\Delta + k\, cos\, x}{1+k} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} cos\, x \,.\, \Delta \Big\}.$$

$$\int sin^3 x \,.\, cos\, x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{6k^4} \{ 6k^2 \iota_1 + (1-k^2) F - [2(2-k^2) - 3\Delta^2] E - k^2 sin\, x \,.\, cos\, x \,.\, \Delta \}.$$

TAFEL 75.

$$\int sin^p x \,.\, cos\, x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{(p-2)k^2} \Big\{ - \frac{sin^{p-1} x}{\Delta} E + \int sin^{p-1} x\, dx + (p+1) \int sin^{p-2} x.cos\,x.\,E \frac{dx}{\Delta^3} \Big\}.$$

$$\int cos\, x . E \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{sin\, x}{\Delta} E + cos\, x - 1. \qquad \int sin\, x \,.\, cos\, x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \Big\{ \frac{1}{\Delta} E - x \Big\}.$$

$$\int sin^2 x \,.\, cos\, x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \Big\{ - \theta_1 + \frac{sin\, x}{\Delta} E + cos\, x - 1 \Big\}.$$

TAFEL 76.

$$\int sin^p x \,.\, cos\, x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{(p-3)k^2} \left\{ -\frac{sin^{p-1} x}{\Delta^2} E + \int sin^{p-1} x \frac{dx}{\Delta} + (p-1) \int sin^{p-2} x \,.\, cos\, x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^4} \right\}.$$

$$\int sin\, x \,.\, cos\, x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2\,k^2} \left\{ \frac{1}{\Delta^2} E - F \right\}.$$

$$\int sin^2 x \,.\, cos\, x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2\,k^2} \left\{ -\varkappa_1 + \frac{sin\, x}{\Delta^2} E + \frac{1}{k} L \frac{\Delta + k\, cos\, x}{1 + k} \right\}.$$

$$\int sin^3 x \,.\, cos\, x \,.\, E \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2\,k^4} \left\{ -2\,k^2\, \iota_1 + \frac{1}{\Delta^2} E - F \right\}$$

TAFEL 77.

$$\int cos^p x \,.\, E dx = \frac{1}{(p+1)\, p\, k^2} \left\{ [\,(p-2)^2 (1-k^2) + (p^2-1)\, k^2\,] \int cos^{p-2} x \,.\, E dx - \right.$$

$$- (p-2)(p-3)(1-k^2) \int cos^{p-4} x \,.\, E dx + [\,-3\,(1-k^2) +$$

$$\left. + (p+1)\, \Delta^2\,]\, sin\, x \,.\, cos^{p-3} x \,.\, E - 1 + cos^{p-2} x \,.\, \Delta^3 \right\}.$$

$$\int \frac{dx}{cos^2 x} E = tang\, x \,.\, E - 1 - \sqrt{1-k^2}\, L \frac{\sqrt{1-k^2} + \Delta}{(1 + \sqrt{1-k^2}) cos\, x} + \Delta. \qquad \int \frac{dx}{cos\, x} E = \alpha_1.$$

$$\int E dx = \varepsilon_1. \qquad \int cos\, x \,.\, E dx = sin\, x \,.\, E - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\,k} (1-k^2)\, L \frac{\Delta + k\, cos\, x}{1 + k} + \frac{1}{2} cos\, x \,.\, \Delta.$$

$$\int cos^2 x \,.\, E dx = \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_1 + sin\, x \,.\, cos\, x \,.\, E - \frac{1}{3\,k^2} (1 - \Delta^3) \right\}.$$

$$\int cos^3 x \,.\, E dx = \frac{1}{24\,k^3} \left\{ (2 + cos^2 x)\, 8\,k^3 sin\, x \,.\, E - (1 - 9\,k^2)(1-k^2)\, L \frac{\Delta + k\, cos\, x}{1 + k} - \right.$$

$$\left. - k(1 + 9\,k^2) - [(1 - 9\,k^2) - 2\,\Delta^2]\, k\, cos\, x \,.\, \Delta \right\}.$$

$$\int cos^4 x \,.\, E dx = \frac{1}{8} \left\{ 3\,\varepsilon_1 + (3 + 2\, cos^2 x) sin\, x \,.\, cos\, x . E + \frac{1}{15 k^4} [(2 - 5k^2) 5 (1 - \Delta^3) - 6 (1 - \Delta^5)] \right\}.$$

TAFEL 78.

$$\int \sin x \,.\, \cos^p x \,.\, E\,dx = \frac{1}{(p+1)(p+2)k^2}\Big\{-[(p-1)-2pk^2](p-1)\int \sin x \,.\, \cos^{p-2} x \,.\, E\,dx +$$

$$+ (p-2)(p-3)(1-k^2)\int \sin x \,.\, \cos^{p-4} x \,.\, E\,dx +$$

$$+ [\,3\cos^2 x - \{\,4-(p+2)\sin^2 x\,\}\,\Delta^2\,]\cos^{p-3} x \,.\, E + \sin x \,.\, \cos^{p-2} x \,.\, \Delta^3\Big\}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} E\,dx = \frac{1}{\cos x} E - k\,Bg\sin(k\sin x) - \sqrt{1-k^2}\, L\frac{\sin x.\sqrt{1-k^2}+\Delta}{\cos x}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} E\,dx = \gamma_1. \qquad \int \sin x \,.\, E\,ax = -\cos x \,.\, E + \frac{1}{2k}\,Bg\sin(k\sin x) + \frac{1}{2}\sin x \,.\, \Delta.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos x \,.\, E\,dx = \frac{1}{6k^2}\,\{\,(4-2k^2-3\Delta^2)\,E-(1-k^2)\,F + k^2\sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\,\}.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos^2 x \,.\, E\,dx = \frac{1}{24k^2}\Big\{-8k^2\cos^3 x.E - \frac{1}{k}(1-4k^2)Bg\sin(k\sin x) - (1-4k^2-2\Delta^2)\sin x.\Delta\Big\}.$$

$$\int \sin x \,.\, \cos^3 x \,.\, E\,dx = \frac{1}{60k^4}\,\{\,(1-k^2)(1-3k^2)\,2F -$$

$$-(2-7k^2-3k^4+15k^4\cos^4 x)\,E - [\,2(1-3k^2)-3\Delta^2\,]\,k^2\sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta\,\}.$$

TAFEL 79.

$$\int cos^p x \,.\, E \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{(p-1)\,p\,k^2} \Big\{ -\left[(p-3)^2 - (3p^2 - 11p + 12)k^2\right] \int cos^{p-2} x \,.\, E \frac{dx}{\sin x} +$$

$$+ \left[(2p^2 - 15p + 29) - (3p^2 - 19p + 32)k^2\right] \int cos^{p-4} x \,.\, E \frac{dx}{\sin x} -$$

$$-(p-4)(p-5)(1-k^2) \int cos^{p-6} x . E \frac{dx}{\sin x} - [3\cos^2 x - (4 - p\sin^2 x)\Delta^2] cos^{p-5} x . E - \sin x . cos^{p-4} x . \Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \,.\, \cos x} E = \gamma_1 + \delta_1. \qquad \int \frac{dx}{\sin x} E = \beta_1. \qquad \int \frac{\cos x}{\sin x} E\,dx = \delta_1.$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} E\,dx = \beta_1 + \cos x \,.\, E - \frac{1}{2k} Bg\sin\,(k \sin x) - \frac{1}{2} \sin x \,.\, \Delta.$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} E\,dx = \delta_1 - \frac{1}{6k^2} \{ (4 - 2k^2 - 3\Delta^2) E - (1 - k^2) F + k^2 \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \}.$$

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin x} E\,dx = \beta_1 + \frac{1}{24k^2} \Big\{ (3 + \cos^2 x)\, 8k^2 \cos x \,.\, E +$$

$$+ \frac{1}{k}(1 - 16k^2)\, Bg\sin\,(k \sin x) + (1 - 16k^2 - 2\Delta^2) \sin x \,.\, \Delta \Big\}.$$

TAFEL 80.

$$\int \sin x \,.\, cos^p x \,.\, \Delta \,.\, E\,dx = \frac{1}{(p+2)\,k^2} \Big\{ - cos^{p-1} x \,.\, \Delta^3 \,.\, E + \int cos^{p-1} x \,.\, \Delta^4\,dx -$$

$$- (p-1)(1-k^2) \int \sin x \,.\, cos^{p-2} x \,.\, \Delta \,.\, E\,dx \Big\}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} \Delta . E dx = \frac{1}{3(1-k^2)} \Big\{ \frac{\Delta^3}{\cos^3 x} E + [(1-k^2)(1-3k^2) - 2k^2\Delta^2] \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}(1-k^2)(1+3k^2) L tang \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right) \Big\}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Delta \,.\, E\,dx = k^2 \lambda_1 + \frac{\Delta}{\cos x} E - k^2 \sin x - (1 - k^2)\, L tang \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} x \right).$$

$$\int \sin x \,.\, \cos x \,.\, \Delta \,.\, E\,dx = \frac{1}{24k^2} \{ -8\Delta^3 . E + (8 - 8k^2 + 3k^4)x + [3(2-k^2) + 2\Delta^2] k^2 \sin x . \cos x \}.$$

TAFEL 81.

$$\int sin x . cos^p x . E \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{pk^2} \left\{ - cos^{p-1} x . \Delta . E + \int cos^{p-1} x . \Delta^2 dx - (p-1)(1-k^2) \int sin x . cos^{p-2} x . E \frac{dx}{\Delta} \right\}.$$

$$\int \frac{sin\, x}{cos^2 x} E \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{1-k^2} \left\{ \frac{\Delta}{cos\, x} E - k^2 sin\, x - (1-k^2)\, L\, tang \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} x \right) \right\}.$$

$$\int sin\, x . E \frac{dx}{\Delta} = \lambda_1. \qquad \int sin\, x . cos\, x . E \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k^2} \{ -2\Delta . E + (2-k^2) x + k^2 sin\, x . cos\, x \}.$$

TAFEL 82.

$$\int sin\, x . cos^p x . E \frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{(p-1)k^2} \left\{ - cos^{p-1} x . E + \int cos^{p-1} x . \Delta\, dx - \right.$$

$$\left. - (p-1)(1-k^2) \int sin\, x . cos^{p-2} x . E \frac{dx}{\Delta^2} \right\}.$$

$$\int sin\, x . E \frac{dx}{\Delta^2} = \mu_1. \qquad \int sin\, x . cos\, x . E \frac{dx}{\Delta^2} = \iota_1.$$

$$\int sin\, x . cos^2 x . E \frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{k^2} \left\{ -(1-k^2)\mu_1 - cos\, x . E + \frac{1}{2k} Bg\, sin\, (k\, sin\, x) + \frac{1}{2} sin\, x . \Delta \right\}.$$

$$\int sin\, x . cos^3 x . E \frac{dx}{\Delta^2} = \frac{1}{6k^4} \{ -6(1-k^2)k^2 \iota + [2(2-k^2) - 3\Delta^2] E - (1-k^2) F + k^2 sin x . cos x . \Delta \}.$$

TAFEL 83.

$$\int sin x . cos^p x . E \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{(p-2)k^2} \left\{ - \frac{cos^{p-1} x}{\Delta} E + \int cos^{p-1} x\, dx - (p-1)(1-k^2) \int sin x . cos^{p-2} x . E \frac{dx}{\Delta^3} \right\}.$$

$$\int sin\, x . E \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{1-k^2} \left\{ - \frac{cos\, x}{\Delta} E + sin\, x \right\}.$$

$$\int sin\, x . cos\, x . E \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{\Delta} E - x \right). \qquad \int sin\, x . cos^2 x . E \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \left\{ \lambda_1 + \frac{cos\, x}{\Delta} E - sin\, x \right\}.$$

B 24

TAFEL 84.

$$\int \sin x . \cos^p x . E \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{(p-3) k^2} \left\{ - \frac{\cos^{p-1} x}{\Delta^2} E + \int \cos^{p-1} x \frac{dx}{\Delta} - \right.$$

$$\left. - (p-1)(1-k^2) \int \sin x . \cos^{p-2} x . E \frac{dx}{\Delta^4} \right\}.$$

$$\int \sin x . \cos x . E \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2k^2} \left\{ \frac{1}{\Delta^2} E - F \right\}. \qquad \int \sin x . \cos^2 x . E \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2k^2} \left\{ -\mu_1 + \frac{\cos x}{\Delta^2} E - \frac{1}{k} Bg\sin(k \sin x) \right\}.$$

$$\int \sin x . \cos^3 x . E \frac{dx}{\Delta^4} = \frac{1}{2k^2} \left\{ 2k^2 \iota - \frac{1-k^2 \cos x}{\Delta^2} E + (1-k^2) F \right\}.$$

TAFEL 85.

$$\int \tan g^p x . E dx = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)} \left\{ - [(2p^2 - 15p + 20) - \right.$$

$$- (p-1)(2p-5) k^2] \int \tan g^{p-2} x . E dx - [(3p^2 - 21p + 38) -$$

$$- (p-1)(p-3) k^2] \int \tan g^{p-4} x . E dx - (p-4)(p-5) \int \tan g^{p-6} x . E dx -$$

$$\left. - [3 \cos^2 x - (p - 1 - \sin^2 x) \Delta^2] \frac{\sin^{p-5} x}{\cos^{p-1} x} E - \frac{\tan g^{p-3} x}{\sin x . \cos x} \Delta^3 \right\}.$$

$$\int \frac{dx}{\tan g x} E dx = \delta_1 . \qquad \int E dx = \varepsilon_1 . \qquad \int \tan g x . E dx = \gamma_1 .$$

$$\int \tan g^2 x . E dx = - \varepsilon_1 + \tan g x . E - 1 - \sqrt{1-k^2} L \frac{\sqrt{1-k^2} + \Delta}{(1 + \sqrt{1-k^2}) \cos x} + \Delta .$$

$$\int \tan g^3 x . E dx = - \gamma_1 + \frac{1}{2} \{ (1 + \sec^2 x) E - F - \tan g x . \Delta \} .$$

$$\int \tan g^4 x . E dx = \varepsilon_1 + \frac{1}{6(1-k^2)} \left\{ (1 - 4\cos^2 x)(1-k^2) \frac{2 \tan g x}{\cos^2 x} E + 9(1-k^2) + \right.$$

$$\left. + (8 - 9k^2) \sqrt{1-k^2} L \frac{\sqrt{1-k^2} + \Delta}{(1 + \sqrt{1-k^2}) \cos x} - (1 + 8 \cos^2 x)(1-k^2) \frac{\Delta}{\cos^2 x} \right\}.$$

TAFEL 86.

$$\int tang^p x \,.\, E \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{p\,(p+1)\,(1-k^2)} \Big\{ -\,[\,2\,(p-1) - (p+1)k^2\,]\,(p-1) \int tang^{p-2} x \,.\, E \frac{dx}{\cos^2 x} - (p-2)(p-3) \int tang^{p-4} x \,.\, E \frac{dx}{\cos^2 x} - [\,3 \cos^2 x - (p + \cos^2 x)\,\Delta^2\,]\,\frac{tang^{p-3} x}{\cos^4 x}\, E - \frac{tang^p x}{\sin^2 x}\,\Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \frac{1}{tang^2 x}\, E \frac{dx}{\cos^2 x} = -\cot x \,.\, E - 1 + L\,\frac{2 \sin x}{1+\Delta} + \Delta. \qquad \int \frac{1}{tang\, x}\, E \frac{dx}{\cos^2 x} = \gamma_1 + \delta_1.$$

$$\int E \frac{dx}{\cos^2 x} = tang\, x \,.\, E - 1 - \sqrt{1-k^2}\; L\,\frac{\sqrt{1-k^2} + \Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x} + \Delta.$$

$$\int tang\, x \,.\, E \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{2}\,\{\,(1 + \sec^2 x)\,E - F - tang\, x \,.\, \Delta\,\}.$$

$$\int tang^2 x \,.\, E \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{6\,(1-k^2)} \Big\{ (1-k^2)\,2\, tang^3 x \,.\, E + 3\,(1-k^2) + (2 - 3k^2)\sqrt{1-k^2}\; L\,\frac{\sqrt{1-k^2} + \Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\cos x} - (1 + 2\cos^2 x)\,(1-k^2)\,\frac{\Delta}{\cos^2 x} \Big\}.$$

$$\int tang^3 x \,.\, E \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{12\,(1-k^2)} \Big\{ (1-k^2)\,4F - [\,(7 - 8k^2) - 3\,(1-k^2)\, tang^4 x\,]\,E + [\,4\,(1-k^2) + 4\cos^2 x - 5\Delta^2\,]\,\frac{\sin x}{\cos^3 x}\,\Delta \Big\}.$$

---

*

TAFEL 87.

$$\int tang^p x \,.\, cos^2 x \,.\, E\,dx = \frac{1}{(p-3)(p-4)(1-k^2)} \Big\{ -[(p-4)(3p-11) -$$

$$-(p-1)(2p-9)k^2] \int tang^{p-2} x \,.\, cos^2 x \,.\, F\,dx - [(p-4)(3p-13) -$$

$$-(p-1)(p-3)k^2] \int tang^{p-4} x \,.\, cos^2 x \,.\, E\,dx - (p-4)(p-5) \int tang^{p-6} x \,.\, cos^2 x \,.\, E\,dx -$$

$$-[3 cos^2 x - \{(p-4) + 3 cos^2 x\} \Delta^2] \frac{tang^{p-5} x}{cos^2 x} E - tang^{p-4} x \,.\, \Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \frac{1}{tang^2 x} cos^2 x \,.\, E\,dx = -\frac{3}{2}\varepsilon_1 - \frac{1}{2}(2 + sin^2 x) cot\, x \,.\, E +$$

$$+ L \frac{2 sin\, x}{1+\Delta} + \frac{1}{6k^2}\{(1-\Delta^3) - 6(1-\Delta)\}.$$

$$\int \frac{1}{tang\, x} cos^2 x \,.\, E\,dx = \delta_1 - \frac{1}{6k^2}\{(4-2k^2-3\Delta^2)E - (1-k^2)F + k^2 sin\, x \,.\, cos\, x \,.\, \Delta\}.$$

$$\int cos^2 x \,.\, E\,dx = \frac{1}{2}\Big\{\varepsilon_1 + sin\, x \,.\, cos\, x \,.\, E - \frac{1}{3k^2}(1-\Delta^3)\Big\}.$$

$$\int tang\, x \,.\, cos^2 x \,.\, E\,dx = \frac{1}{6k^2}\{(4-2k^2-3\Delta^2)E - (1-k^2)F + k^2 sin\, x \,.\, cos\, x \,.\, \Delta\}.$$

$$\int tang^2 x \,.\, cos^2 x \,.\, E\,dx = \frac{1}{2}\Big\{\varepsilon_1 - sin\, x \,.\, cos\, x \,.\, E + \frac{1}{3k^2}(1-\Delta^3)\Big\}.$$

$$\int tang^3 x \,.\, cos^2 x \,.\, E\,dx = \gamma_1 - \frac{1}{6k^2}\{(4-2k^2-3\Delta^2)E - (1-k^2)F + k^2 sin\, x \,.\, cos\, x \,.\, \Delta\}.$$

$$\int tang^4 x \,.\, cos^2 x \,.\, E\,dx = -\frac{3}{2}\varepsilon_1 + \frac{1}{2}(2 + cos^2 x) tang\, x \,.\, E -$$

$$-\sqrt{1-k^2}\, L \frac{\sqrt{1-k^2}+\Delta}{(1+\sqrt{1-k^2})\, cos\, x} - \frac{1}{6k^2}\{(1-\Delta^3) + 6k^2(1-\Delta)\}.$$

TAFEL 88.

$$\int \frac{dx}{\cos^p x} E = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)} \Big\{ [(p-2)^2 - (2p^2 - 12p + 19)k^2] \int \frac{dx}{\cos^{p-2} x} E +$$

$$+ (p-4)(p-5)k^2 \int \frac{dx}{\cos^{p-4} x} E + [3(1-k^2) + (p-5)\Delta^2] \frac{\sin x}{\cos^{p-1} x} E - \frac{\Delta^3}{\cos^{p-2} x} + 1 \Big\}.$$

$$\int \cos x . E dx = \sin x . E - \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}(1-k^2) \, L \frac{\Delta + k \cos x}{1+k} + \frac{1}{2} \cos x . \Delta \qquad \int E dx = \varepsilon.$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} E = \alpha_1. \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} E = \tang x . E - 1 - \sqrt{1-k^2} \, L \frac{\sqrt{1-k^2} + \Delta}{(1+\sqrt{1-k^2}) \cos x} + \Delta.$$

TAFEL 89.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^p x} E dx = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)} \Big\{ [(p-3) - (p-4)2k^2](p-3) \int \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x} E dx +$$

$$+ (p-5)(p-6) \int \frac{\sin x}{\cos^{p-4} x} E dx + [3 \cos^2 x -$$

$$- \{ 4 + (p-6) \sin^2 x \} \Delta^2] \frac{1}{\cos^{p-1} x} E + \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x} \Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \sin x . E dx = - \cos x . E + \frac{1}{2k} Bg \sin (k \sin x) + \frac{1}{2} \sin x . \Delta. \qquad \int \frac{\sin x}{\cos x} E dx = \gamma_1.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} E dx = \frac{1}{\cos x} E - k \, Bg \sin (k \sin x) - \sqrt{1-k^2} \, L \frac{\sin x . \sqrt{1-k^2} + \Delta}{\cos x}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} E dx = \frac{1}{2} \{ (1 + \sec^2 x) E - F - \tang x . \Delta \}.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} E dx = \frac{1}{12(1-k^2)} \Big\{ (2 - k^2 + \sec^4 x) E - (1-k^2) 2F - [(3-2k^2) - (2-k^2)\sin^2 x] \frac{\sin x}{\cos^3 x} \Delta \Big\}.$$

TAFEL 90.

$$\int \frac{dx}{\sin x \, . \cos^p x} E = \frac{1}{(p-1)(p-2)(1-k^2)} \Big\{ [(2p^2 - 9p + 11) -$$

$$- (3p^2 - 17p + 26) 4k^2] \int \frac{dx}{\sin x \, . \cos^{p-2} x} E - [(p-3)^2 -$$

$$-(3p^2 - 25p + 54)k^2] \int \frac{dx}{\sin x \, . \cos^{p-4} x} E + (p-5)(p-6)k^2 \int \frac{dx}{\sin x \, . \cos^{p-6} x} E -$$

$$- [3\cos^2 x - \{ 4 + (p-6) \sin^2 x \} \Delta^2] \frac{E}{\cos^{p-1} x} + \frac{\sin x}{\cos^{p-2} x} \Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} E dx = \delta_1 - \frac{1}{6k^2} \{ (4 - 2k^2 - 3\Delta^2) E - (1-k^2) F + k^2 \sin x \, . \cos x \, . \Delta \}.$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} E dx = \beta_1 + \cos x \, . E - \frac{1}{2k} Bg \sin (k \sin x) - \frac{1}{2} \sin x \, . \Delta.$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} E dx = \delta_1 . \qquad \int \frac{dx}{\sin x} E = \beta_1 . \qquad \int \frac{dx}{\sin x \, . \cos x} E = \gamma_1 + \delta_1 .$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \, . \cos^2 x} E = \beta_1 + \frac{1}{\cos x} E - k Bg \sin (k \sin x) - \sqrt{1-k^2} \, L \frac{\sin x \, . \sqrt{1-k^2} + \Delta}{\cos x} .$$

TAFEL 91.

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2}x . E dx = \frac{1}{(p+2)\,4pk^2} \Big\{ (p-1)\,8pk^2 \int \sin^{p-2} \tfrac{1}{2}x . E dx - [(p-4)^2 +$$

$$+ (p-1)(p-3)\,4k^2] \int \sin^{p-4} \tfrac{1}{2}x . E dx + (p-4)(p-5) \int \sin^{p-6} \tfrac{1}{2}x . E dx +$$

$$+ [6(1-k^2) + 6k^2 \cos x - (p+2)\Delta^2] \sin^{p-6} \tfrac{1}{2}x . \sin x . E + 4 \sin^{p-4} \tfrac{1}{2}x . \Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 \frac{1}{2}x} E = 2 \Big\{ -\cot \tfrac{1}{2}x . E - 1 + k\,L \frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + L \frac{2(\Delta - \cos x)}{1+\Delta} + \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin \frac{1}{2}x} E = \eta_1 . \qquad \int E dx = \varepsilon_1 .$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2}x . E dx = -2\cos\tfrac{1}{2}x . E + \frac{4}{3\sqrt{2k}} \Big\{ 2kE(l,z) + (1-k)F(l,z) + \frac{1-k-k\cos x}{1+k-k\cos x} \sin\tfrac{1}{2}x . \Delta\sqrt{2k} \Big\}.$$

$$\int \sin^2 \tfrac{1}{2}x . E dx = \frac{1}{2} \Big\{ \varepsilon_1 - \sin x . E + \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}(1-k^2)\,L \frac{\Delta + k\cos x}{1+k} - \frac{1}{2}\cos x . \Delta \Big\}.$$

$$\int \sin^3 \tfrac{1}{2}x . E dx = -\frac{1}{3}(5-\cos x)\cos\tfrac{1}{2}x . E + \frac{2}{45k\sqrt{2k}} \Big\{ (1+8k)(1-k)\,3F(l,z) -$$

$$-(1-8k^2)\,6E(l,z) - \Big[(1-16k+4k^2) - 4(1+k)\,k\cos x -$$

$$- \frac{2(4+5k+20k^2) - (1+4k)\Delta^2}{1+k-k\cos x} \Big] 2\sin\tfrac{1}{2}x . \Delta\sqrt{2k} \Big\}.$$

$$\int \sin^4 \tfrac{1}{2}x . E dx = \frac{1}{24k^2} \Big\{ 9k^2\varepsilon_1 - (4-\cos x)\,3k^2 \sin x . E -$$

$$-6k(1-k^2)\,L \frac{\Delta + k\cos x}{1+k} - 1 + 6k^2 - 6k^2\cos x . \Delta + \Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \sin^5 \tfrac{1}{2}x . E dx = -\frac{1}{6}(43 - 14\cos x + 3\cos^2 x)\cos\tfrac{1}{2}x . E + \frac{1}{63k^2\sqrt{2k}} \Big\{ (-1+16k+96k^2)\,3(1-k)F(l,z) -$$

$$-(17-96k^2)\,6kE(l,z) - \Big[(-3+16k-160k^2+64k^3) +$$

$$+ 64(1+k)\,k^2\cos x - 2k \frac{67+80k+224k^2+(1+4k)5\Delta^2}{1+k-k\cos x} \Big] \sin\tfrac{1}{2}x . \Delta\sqrt{2k} \Big\}.$$

TAFEL 92.

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2}x \,.\, \cos\tfrac{1}{2}x \,.\, E\,dx = \frac{1}{(p+1)(p+3)4k^2}\Big\{(p^2-1)8k^2\int \sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,\cos\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx - [(p-3)+$$

$$+(p-1)4k^2](p-3)\int \sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,\cos\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx + (p-4)(p-5)\int \sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,\cos\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx +$$

$$+[6\cos x - \{(p-5)+(p+3)\cos x\}\Delta^2]\sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x\,.\,E + 2\sin x\,.\,\sin^{p-5}\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta^3\Big\}.$$

$$\int \frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin^2\frac{1}{2}x}E\,dx = -2\,\mathrm{cosec}\,\tfrac{1}{2}x\,.\,E + \frac{8k\cos\frac{1}{2}x\,.\,\Delta}{1+k+k\cos x} + \frac{2\sqrt{2k}}{1+2k}\Big\{2kF(l,y) -$$

$$-(1+2k)2E(l,y) - \frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,y)\Big\} - L\frac{(\Delta+\cos\frac{1}{2}x)^2}{(1+k-2r)2k(1+\cos x)+\Delta^2}.$$

$$\int \frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}E\,dx = \beta_1 + \delta_1.$$

$$\int \cos\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx = 2\sin\tfrac{1}{2}x\,.\,E + \frac{4}{3\sqrt{2k}}\Big\{(1-k)F(l,y) + 2kE(l,y) + \frac{1-k+k\cos x}{1+k+k\cos x}\cos\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x\,.\,\cos\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx = -\frac{1}{2}\cos x\,.\,E + \frac{1}{4k}\,Bg\sin(k\sin x) + \frac{1}{4}\sin x\,.\,\Delta.$$

$$\int \sin^2\tfrac{1}{2}x\,.\,\cos\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx = \frac{2}{3}\sin^3\tfrac{1}{2}x\,.\,E - \frac{2}{45k\sqrt{2k}}\Big\{(1-2k)(1-k)3F(l,y) - (1+2k^2)6E(l,y) -$$

$$-\Big[(1+14k+4k^2) - 4(1+k)k\cos x - \frac{2(4+5k+10k^2)-(1+4k)\Delta^2}{1+k+k\cos x}\Big]\cos\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int \sin^3\tfrac{1}{2}x\,.\,\cos\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx = \frac{1}{24k^2}\{-[4-2k^2(1-3\cos x)-3\Delta^2]E + (1-k^2)F +$$

$$+3k\,Bg\sin(k\sin x) + (3-\cos x)k^2\sin x\,.\,\Delta\}.$$

$$\int \sin^4\tfrac{1}{2}x\,.\,\cos\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx = \frac{1}{35k^2}\Big\{14k^2\sin^5\tfrac{1}{2}x\,.\,E - \frac{1}{3\sqrt{2k}}\Big[(1+12k-12k^2)(1-k)F(l,y) -$$

$$-(11+12k^2)2kE(l,y) - \Big[(-1+4k+44k^2+16k^3) - 16(1+k)k^2\cos x -$$

$$-3\Delta^2 - 2k\frac{(15+20k+28k^2)-(1+4k)2\Delta^2}{1+k+k\cos x}\Big]\cos\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta\sqrt{2k}\Big]\Big\}.$$

TAFEL 93.

$$\int \sin^p \tfrac{1}{2}x \,.\, E \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} = \frac{1}{(p^2-1)4k^2}\Big\{(p-1)(3p-5)4k^2 \int \sin^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} - [(p-5)^2 +$$

$$+ (p-3)(3p-7)4k^2] \int \sin^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} + [(2p^2-23p+67) +$$

$$+ (p-3)(p-5)4k^2] \int \sin^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} - (p-6)(p-7)\int \sin^{p-8}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} -$$

$$- [6\cos x - \{(p-7)+(p+1)\cos x\}\Delta^2]\sin^{p-7}\tfrac{1}{2}x\,.\,E - 2\sin^{p-7}\tfrac{1}{2}x\,.\,\sin x\,.\,\Delta^3\Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x\,.\,\cos\frac{1}{2}x}E = 2\beta_1. \qquad \int \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x}E = \zeta_1. \qquad \int \sin\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} = \beta_1 - \delta_1.$$

$$\int \sin^2\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} = \zeta_1 - 2\sin\tfrac{1}{2}x\,.\,E - \frac{4}{3\sqrt{2k}}\Big\{2kE(l,y) + (1-k)F(l,y) + \frac{1-k+k\cos x}{1+k+k\cos x}\cos\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int \sin^3\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} = \beta_1 - \delta_1 + \frac{1}{2}\cos x\,.\,E - \frac{1}{4k}\,Bg\sin(k\sin x) - \frac{1}{4}\sin x\,.\,\Delta\,.$$

$$\int \sin^4\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} = \zeta_1 - \frac{1}{3}(7-\cos x)\sin\tfrac{1}{2}x\,.\,E + \frac{2}{45k\sqrt{2k}}\Big\{(1-k)(1-12k)3F(l,y) - (1+12k^2)6E(l,y) -$$

$$-\Big[(1+44k+4k^2) - 4(1+k)k\cos x - \frac{2(4+5k+40k^2)-(1+4k)\Delta^2}{1+k+k\cos x}\Big]\cos\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int \sin^5\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} = \beta_1 - \delta_1 + \frac{1}{24k^2}\{[4-(1-9\cos x)2k^2 - 3\Delta^2]E -$$

$$- (1-k^2)F - 9k\,Bg\sin(k\sin x) - (9-\cos x)k^2\sin x\,.\,\Delta\}.$$

$$\int \sin^6\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x} = \zeta_1 - \frac{1}{30}(73-16\cos x + 3\cos^2 x)\sin\tfrac{1}{2}x\,.\,E +$$

$$+ \frac{1}{315k^2\sqrt{2k}}\Big\{(1+26k-180k^2)(1-k)3F(l,y) - (5+36k^2)30kE(l,y) +$$

$$+ \Big[(-3+26k+728k^2+104k^3) + 104(1+k)k^2\cos x + 9\Delta^3 -$$

$$- 2k\frac{(68+95k-364k^2)-(1+4k)13\Delta^2}{1+k+k\cos x}\Big]\cos\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

B 25

TAFEL 94.

$$\int \cos^p \tfrac{1}{2}x \,.\, E\,dx = \frac{1}{(p+2)\,4pk^2}\Big\{ (p-1)\,8pk^2 \int \cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx -$$

$$- [(p-4)^2 + (p-1)(p-3)4k^2]\int \cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx + (p-4)(p-5)\int \cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx -$$

$$- [\,6(1-k^2) - 6k^2\cos x - (p+2)\Delta^2\,]\cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x\,.\,\sin x\,.\,E - 4 + 4\cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta^3\Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2\frac{1}{2}x}\,E = 2\Big\{ \tang\tfrac{1}{2}x\,.\,E - 1 - k\,L\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} - L\frac{(\Delta - \cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x} + \Delta\Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}x}\,E = \zeta_1. \qquad\qquad \int E\,dx = \varepsilon_1.$$

$$\int \cos\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx = 2\sin\tfrac{1}{2}x\,.\,E + \frac{4}{3\sqrt{2k}}\Big\{(1-k)F(l,y) + 2k\,E(l,y) + \frac{1-k+k\cos x}{1+k+k\cos x}\cos\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int \cos^2\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx = \frac{1}{2}\Big\{\varepsilon_1 + \sin x\,.\,E - \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}(1-k^2)\,L\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + \frac{1}{2}\cos x\,.\,\Delta\Big\}.$$

$$\int \cos^3\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx = \frac{1}{3}(5+\cos x)\sin\tfrac{1}{2}x\,.\,E + \frac{2}{45k\sqrt{2k}}\Big\{(1+8k)(1-k)\,3F(l,y) -$$

$$- (1-8k^2)\,6E(l,y) - \Big[(1-16k+4k^2) - 4(1+k)\cos x -$$

$$- \frac{2(4+5k+20k^2) - (1+4k)\Delta^2}{1+k+k\cos x}\Big]\cos\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int \cos^4\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,dx = \frac{1}{24k^2}\Big\{9k^2\varepsilon_1 + (4+\cos x)\,3k^2\sin x\,.\,E +$$

$$+ 6k(1-k^2)\,L\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} - 1 - 6k^2 + 6k^2\cos x\,.\,\Delta + \Delta^3\Big\}.$$

$$\int \cos^5\tfrac{1}{2}x.E\,dx = \frac{1}{6}(43+14\cos x+3\cos^2 x)\sin\tfrac{1}{2}x.E + \frac{1}{63k^2\sqrt{2k}}\Big\{(-1+16k+96k^2)3(1-k)F(l,y) -$$

$$- (17-96k^2)\,6kE(l,y) - 9 - \Big[(-3+16k-160k^2+64k^3) + 64(1+k)k^2\cos x -$$

$$- 2k\frac{67+80k+224k^2+(1+4k)\,5\Delta^2}{1+k+k\cos x}\Big]\cos\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

TAFEL 95.

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^p\tfrac{1}{2}x.E\,dx = \frac{1}{(p+1)(p+3)4k^2}\Big\{(p^2-1)8k^2\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^{p-2}\tfrac{1}{2}x.E\,dx -$$

$$-[(p-3)+(p-1)4k^2](p-3)\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x.E\,dx + (p-4)(p-5)\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x.E\,dx +$$

$$+[6\cos x + \{(p-5)-(p+3)\cos x\}\Delta^2]\cos^{p-5}\tfrac{1}{2}x.E + 2\sin x.\cos^{p-5}\tfrac{1}{2}x.\Delta^3\Big\}.$$

$$\int \frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}x}E\,dx = 2\sec\tfrac{1}{2}x.E + \frac{8k\sin\frac{1}{2}x.\Delta}{1+k-k\cos x} - \frac{2\sqrt{2k}}{1+2k}\Big\{(1+2k)2E(l,z) -$$

$$-2kF(l,z) + \frac{1-2k}{4k}\Pi(-r,l,z)\Big\} - L\frac{(\Delta+\sin\frac{1}{2}x)^2}{(1+k-2r)2k(1-\cos x)+\Delta^2}.$$

$$\int \frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x}E\,dx = \beta_1 - \delta_1.$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x.E\,dx = -2\cos\tfrac{1}{2}x.E + \frac{4}{3\sqrt{2k}}\Big\{2kE(l,z)+(1-k)F(l,z)+\frac{1-k-k\cos x}{1+k-k\cos x}\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos\tfrac{1}{2}x.E\,dx = -\frac{1}{2}\cos x.E + \frac{1}{4k}Bg\sin(k\sin x) + \frac{1}{4}\sin x.\Delta.$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^2\tfrac{1}{2}x.E\,dx = -\frac{2}{3}\cos^3\tfrac{1}{2}x.E + \frac{2}{45k\sqrt{2k}}\Big\{(1+2k^2)6E(l,z)-(1-2k)(1-k)3F(l,z) +$$

$$+\Big[(1+14k+4k^2)-4(1+k)k\cos x - \frac{2(4+5k+10k^2)-(1+4k)\Delta^2}{1+k-k\cos x}\Big]\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^3\tfrac{1}{2}x.E\,dx = \frac{1}{24k^2}\Big\{[4-2k^2(1+3\cos x)-3\Delta^2]E -$$

$$-(1-k^2)F + 3kBg\sin(k\sin x) + (3+\cos x)k^2\sin x.\Delta\Big\}.$$

$$\int \sin\tfrac{1}{2}x.\cos^4\tfrac{1}{2}x.E\,dx = \frac{1}{35k^2}\Big\{-14k^2\cos^5\tfrac{1}{2}x.E + \frac{1}{3\sqrt{2k}}\Big[(11+12k^2)2kE(l,z) -$$

$$-(1+12k-12k^2)(1-k)F(l,z) + \Big[(-1+4k+44k^2+16k^3) -$$

$$-16(1+k)k^2\cos x + 3\Delta^3 - 2k\frac{(15-20k+28k^2)-(1+4k)2\Delta^2}{1+k-k\cos x}\Big]\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big]\Big\}.$$

TAFEL 96.

$$\int \cos^p \tfrac{1}{2}x . E \frac{dx}{\sin \frac{1}{2}x} = \frac{1}{(p^2-1)4k^2} \Big\{ (p-1)(3p-5)4k^2 \int \cos^{p-2} \tfrac{1}{2}x . E \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x} -$$

$$- [(p-5)^2 + (p-3)(3p-7)4k^2] \int \cos^{p-4}\tfrac{1}{2}x . E \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x} + [(2p^2-23p+67) +$$

$$+ (p-3)(p-5)4k^2] \int \cos^{p-6}\tfrac{1}{2}x . E \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x} - (p-6)(p-7) \int \cos^{p-8}\tfrac{1}{2}x . E \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x} -$$

$$- [6\cos x + \{(p-7)-(p+1)\cos x\} \Delta^2] \cos^{p-7}\tfrac{1}{2}x . E - 2\cos^{p-7}\tfrac{1}{2}x . \sin x . \Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x . \cos\frac{1}{2}x} E = 2\beta_1 . \qquad \int \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x} E = \eta_1 . \qquad \int \frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x} E dx = \beta_1 + \delta_1 .$$

$$\int \frac{\cos^2\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x} E dx = \eta_1 + 2\cos\tfrac{1}{2}x . E - \frac{4}{3\sqrt{2k}} \Big\{ 2kE(l,z) + (1-k)F(l,z) + \frac{1-k-k\cos x}{1+k-k\cos x} \sin\tfrac{1}{2}x . \Delta\sqrt{2k} \Big\}.$$

$$\int \frac{\cos^3\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x} E dx = \beta_1 + \delta_1 + \frac{1}{2}\cos x . E - \frac{1}{4k} Bg\sin(k\sin x) - \frac{1}{4}\sin x . \Delta .$$

$$\int \frac{\cos^4\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x} E dx = \eta_1 + \frac{1}{3}(7+\cos x)\cos\tfrac{1}{2}x . E - \frac{2}{45k\sqrt{2k}} \Big\{ (1+12k^2)6E(l,z) - (1-k)(1-12k)3F(l,z) +$$

$$+ \Big[(1+44k+4k^2) - (1+k)4k\cos x - \frac{2(4+5k+40k^2)-(1+4k)\Delta^2}{1+k-k\cos x} \Big] \sin\tfrac{1}{2}x . \Delta\sqrt{2k} \Big\};$$

$$\int \frac{\cos^5\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x} E dx = \beta_1 + \delta_1 + \frac{1}{24k^2} \{ [-4 + 2k^2(1-9\cos x) + 3\Delta^2] E +$$

$$+ (1-k^2) F - 9k Bg\sin(k\sin x) - (9+\cos x)k^2 \sin x . \Delta \}.$$

$$\int \frac{\cos^6\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x} E dx = \eta_1 + \frac{1}{30}(73+16\cos x+3\cos^2 x)\cos\tfrac{1}{2}x . E - \frac{1}{315k^2\sqrt{2k}} \Big\{ (5+36k^2)30kE(l,z) -$$

$$- (1+26k-180k^2)3(1-k)F(l,z) + \Big[(-3+26k+728k^2+104k^3) -$$

$$-104(1+k)k^2\cos x + 9\Delta^3 - 2k \frac{(63+95k+364k^2)-(1+4k)13\Delta^2}{1+k-k\cos x} \Big] \sin\tfrac{1}{2}x . \Delta\sqrt{2k} \Big\}.$$

TAFEL 97.

$$\int tang^p \tfrac{1}{2}x.Edx = \frac{1}{(p-1)(p-2)}\Big\{-[(2p^2-11p+16)-(p-3)(p-5)2k^2]2\int tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x.Edx -$$

$$-[(3p^2-24p+50)-(p-3)(p-5)4k^2]\,2\int tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x.Edx-[(2p^2-21p+56)-$$

$$-(p-3)(p-5)2k^2]\,2\int tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x.Edx-(p-6)(p-7)\int tang^{p-8}\tfrac{1}{2}x.Edx-$$

$$-[3\cos x-(p-4+\cos x)\Delta^2]\frac{2\sin^{p-7}\frac{1}{2}x}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}E-\frac{4\,tang^{p-6}\frac{1}{2}x}{\cos^4\frac{1}{2}x}\Delta^3\Big\}.$$

$$\int\frac{dx}{tang\,\frac{1}{2}x}E=\beta_1+\delta_1. \qquad \int Edx=\varepsilon_1. \qquad \int tang\,\tfrac{1}{2}x.Edx=\beta_1-\delta_1.$$

$$\int tang^2\tfrac{1}{2}x.Edx=-\varepsilon_1+2\,tang\,\tfrac{1}{2}x.E-2kL\frac{\Delta+k\cos x}{1+k}-2L\frac{(\Delta-\cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x}+2\Delta-2.$$

$$\int tang^3\tfrac{1}{2}x.Edx=\delta_1-\beta_1+(2+\sec^2\tfrac{1}{2}x)E-(1-k^2)2F-2k\,Bg\sin(k\sin x)-2tang\,\tfrac{1}{2}x.\Delta.$$

$$\int tang^4\tfrac{1}{2}x.Edx=\varepsilon_1+\frac{2}{3}\Big\{-(1+2\cos x)\frac{tang\,\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}x}E+2(2+k^2)L\frac{(\Delta-\cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x}+$$

$$+6kL\frac{\Delta+k\cos x}{1+k}-(3+2\cos x)\frac{\Delta}{\cos^2\frac{1}{2}x}+5\Big\}.$$

$$\int tang^5\tfrac{1}{2}x.Edx=\beta_1-\delta_1+\frac{1}{6}\Big\{(1-k^2)20F-\Big[(23+8k^2)-\frac{3}{4\cos^4\frac{1}{2}x}(3+6\cos x-\cos^2 x)\Big]E+$$

$$+24k\,Bg\sin(k\sin x)+[(7+2k^2)+(4+k^2)2\cos x]\frac{\sin x}{\cos^6\frac{1}{2}x}\Delta\Big\}.$$

$$\int tang^6\tfrac{1}{2}x.Edx=-\varepsilon_1+\frac{1}{30}\Big\{[(1+12k^2)+(23+6k^2)\cos x]\,2\frac{tang\,\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}x}E-$$

$$-180kL\frac{\Delta+k\cos x}{1+k}-(23+28k^2-6k^4)4L\frac{(\Delta-\cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x}-2(65+6k^2)-$$

$$-[3\cos x-(2+\cos x)\Delta^2]\frac{3}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^5\frac{1}{2}x}-[3(13+2k^2)+(34+3k^2)2\cos x+23\cos^2 x]\frac{\Delta}{\cos^4\frac{1}{2}x}\Big\}.$$

TAFEL 98.

$$\int tang^p \tfrac{1}{2}x \,.\, E\frac{dx}{cos^2\frac{1}{2}x}=\frac{1}{p(p+1)}\Big\{-[(3p-4)-(p-3)4k^2](p-1)\int tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{cos^2\frac{1}{2}x}-$$

$$-[(3p-8)-(p-1)4k^2)](p-3)\int tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x.E\frac{dx}{cos^2\frac{1}{2}x}-(p-4)(p-5)\int tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x.E\frac{dx}{cos^2\frac{1}{2}x}-$$

$$-[\,3\cos x-(p-2+\cos x)\,\Delta^2\,]\,\frac{2\,sin^{p-5}\frac{1}{2}x}{cos^{p+1}\frac{1}{2}x}-\frac{4\,tang^{p-4}\frac{1}{2}x}{cos^4\frac{1}{2}x}\,\Delta^3\Big\}.$$

$$\int\frac{1}{tang^2\frac{1}{2}x}\,E\,\frac{dx}{cos^2\frac{1}{2}x}=2\Big\{-cot\tfrac{1}{2}x\,.\,E-1+k\,L\frac{\Delta+k\cos x}{1+k}+L\frac{2\,(\Delta-\cos x)}{1+\Delta}+\Delta\Big\}.$$

$$\int\frac{1}{tang\frac{1}{2}x}\,E\,\frac{dx}{cos^2\frac{1}{2}x}=2\,\beta_1.$$

$$\int E\frac{dx}{cos^2\frac{1}{2}x}=2\Big\{tang\tfrac{1}{2}x\,.\,E-1-k\,L\frac{\Delta+k\cos x}{1+k}-L\frac{(\Delta-\cos x)\,(1+\Delta)}{2\,sin^2 x}+\Delta\Big\}.$$

$$\int tang\tfrac{1}{2}x\,.\,E\frac{dx}{cos^2\frac{1}{2}x}=(2+sec^2\tfrac{1}{2}x)\,E-(1-k^2)\,2\,F-2\,k\,Bg\sin(k\sin x)-2\,tang\tfrac{1}{2}x\,.\,\Delta.$$

$$\int tang^2\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,\frac{dx}{cos^2\frac{1}{2}x}=\frac{2}{3}\Big\{tang^3\tfrac{1}{2}x\,.\,E+3\,k\,L\,\frac{\Delta+k\cos x}{1+k}+$$

$$+(1+2\,k^2)\,L\frac{(\Delta-\cos x)\,(1+\Delta)}{2\,sin^2 x}-(1+cos^2\tfrac{1}{2}x)\,\frac{\Delta}{cos^2\frac{1}{2}x}+2\Big\}.$$

$$\int tang^3\tfrac{1}{2}x\,.\,E\,\frac{dx}{cos^2\frac{1}{2}x}=\frac{1}{6}\Big\{(1-k^2)\,8\,F-(11+8\,k^2-3\,tang^4\tfrac{1}{2}x)\,E+$$

$$+12\,k\,Bg\sin(k\sin x)+[\,(1+2\,k^2)+(1+k^2)\,2\cos x\,]\,\frac{\sin x}{cos^4\frac{1}{2}x}\,\Delta\Big\}.$$

$$\int tang^4\tfrac{1}{2}x.E\frac{dx}{cos^2\frac{1}{2}x}=\frac{1}{10}\Big\{-[\,(3-4k^2)-(1+2\,k^2)\cos x\,]\,2\,\frac{tang\frac{1}{2}x}{cos^2\frac{1}{2}x}\,E-$$

$$-20\,k\,L\frac{\Delta+k\cos x}{1+k}+(1+6\,k^2-2\,k^4)\,4\,L\frac{(\Delta-\cos x)\,(1+\Delta)}{2\,sin^2 x}-2\,(5+2\,k^2)-$$

$$-[3\cos x-(2+\cos x)\,\Delta^2]\,\frac{1}{sin\frac{1}{2}x\,.\,cos^5\frac{1}{2}x}+[(3+2\,k^2)+(3+k^2)2\cos x+cos^2 x]\,\frac{\Delta}{cos^4\frac{1}{2}x}\Big\}.$$

TAFEL 99.

$$\int tang^p \tfrac{1}{2}x . cos^4 \tfrac{1}{2}x . E dx = \frac{1}{(p-5)(p-6)} \Big\{ -[(p-6)(2p-11)-(p-7)(p-9)2k^2]2\int tang^{p-2}\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . Edx -$$

$$- [3(p-6)^2 - (p-3)(p-9)4k^2]2\int tang^{p-4}\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . Edx - [(p-6)(2p-13) -$$

$$- (p-3)(p-5)2k^2]2\int tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . Edx - (p-6)(p-7)\int tang^{p-8}\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . Edx -$$

$$- [3\cos x - (p-6+3\cos x)\Delta^2]\frac{4\,tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x}{\sin x} - 4\,tang^{p-6}\tfrac{1}{2}x . \Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \frac{cos^4\tfrac{1}{2}x}{tang^2\tfrac{1}{2}x} E dx = -\frac{15}{8}\varepsilon_1 - \frac{1}{8}[(4+\cos x+5k^2\sin x+16cos^4\tfrac{1}{2}x . cot\tfrac{1}{2}x]E + 2L\frac{2(\Delta-\cos x)}{1+\Delta} -$$

$$-\frac{1}{2k}(1-5k^2)L\frac{\Delta+k\cos x}{1+k} + \frac{1}{24k^2}\{(1-36k^2)+(4-\cos x)12k^2\Delta - \Delta^3\}.$$

$$\int \frac{cos^4\tfrac{1}{2}x}{tang\tfrac{1}{2}x} E dx = \beta_1 + \delta_1 + \frac{1}{24k^2}\{[-4+2k^2(1-9\cos x)+3\Delta^2]E +$$

$$+(1-k^2)F - 9k\,Bg\sin(k\sin x) - (9+\cos x)k^2\sin x . \Delta\}.$$

$$\int cos^4\tfrac{1}{2}x . Edx = \frac{1}{24k^2}\Big\{9k^2\varepsilon_1 + (4+\cos x)3k^2\sin x . E + 6k(1-k^2)L\frac{\Delta+k\cos x}{1+k} - 1 - 6k^2 + 6k^2\cos x . \Delta + \Delta^3\Big\}.$$

$$\int tang\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . Edx = \frac{1}{24k^2}\{[4-2k^2(1+3\cos x)-3\Delta^2]E -$$

$$-(1-k^2)F + 3k\,Bg\sin(k\sin x) + (3+\cos x)k^2\sin x . \Delta\}.$$

$$\int tang^2\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . Edx = \frac{1}{8}\Big\{\varepsilon_1 - \sin x . \cos x . E + \frac{1}{3k^2}(1-\Delta^3)\Big\}.$$

$$\int tang^3\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . Edx = \frac{1}{24k^2}\{(1-k^2)F - [4-2k^2(1-3\cos x)-3\Delta^2]E +$$

$$+3k\,Bg\sin(k\sin x) + (3-\cos x)k^2\sin x . \Delta\}.$$

$$\int tang^4\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . Edx = \frac{1}{24k^2}\Big\{9k^2\varepsilon_1 - (4-\cos x)3k^2\sin x . E -$$

$$-6k(1-k^2)L\frac{\Delta+k\cos x}{1+k} - 1 + 6k^2 - 6k^2\cos x . \Delta + \Delta^3\Big\}.$$

$$\int tang^5\tfrac{1}{2}x . cos^4\tfrac{1}{2}x . Edx = \beta_1 - \delta_1 + \frac{1}{24k^2}\{[4-(1-9\cos x)2k^2-3\Delta^2]E -$$

$$-(1-k^2)F - 9k\,Bg\sin(k\sin x) - (9-\cos x)k^2\sin x . \Delta\}.$$

TAFEL 100.

$$\int \frac{dx}{\cos^p \frac{1}{2}x} E = \frac{1}{(p-1)(p-2)} \Big\{ [(p-2)^2 + (p-3)(p-5)4k^2] \int \frac{dx}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x} E -$$

$$- (p-5)(p-6)8k^2 \int \frac{dx}{\cos^{p-4}\frac{1}{2}x} E + (p-6)(p-8)4k^2 \int \frac{dx}{\cos^{p-6}\frac{1}{2}x} E +$$

$$+ [6(1-k^2) - 6k^2 \cos x + (p-8)\Delta^2] \frac{\sin x}{\cos^p \frac{1}{2}x} E + 4 - \frac{4\Delta^3}{\cos^{p-2}\frac{1}{2}x} \Big\}.$$

$$\int \cos^3 \tfrac{1}{2}x \,.\, E dx = \frac{1}{3}(5+\cos x)\sin \tfrac{1}{2}x.E + \frac{2}{45k\sqrt{2k}} \Big\{ (1+8k)(1-k)3F(l,y) - (1-8k^2)6E(l,y) -$$

$$- \Big[(1-16k+4k^2) - 4(1+k)k\cos x - \frac{2(4+5k+20k^2)-(1+4k)\Delta^2}{1+k+k\cos x} \Big] \cos \tfrac{1}{2}x \,.\, \Delta\sqrt{2k} \Big\}.$$

$$\int \cos^2 \tfrac{1}{2}x \,.\, E dx = \frac{1}{2} \Big\{ \varepsilon_1 + \sin x \,.\, E - \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}(1-k^2) L \frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + \frac{1}{2}\cos x \,.\, \Delta \Big\}.$$

$$\int \cos \tfrac{1}{2}x \,.\, E dx = 2\sin \tfrac{1}{2}x \,.\, E + \frac{4}{3\sqrt{2k}} \Big\{ (1-k)F(l,y) + 2kE(l,y) + \frac{1-k+k\cos x}{1+k+k\cos x} \cos\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k} \Big\}.$$

$$\int E dx = \varepsilon_1. \qquad \int \frac{dx}{\cos \frac{1}{2}x} E = \eta_1.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2}x} E = 2 \Big\{ \tan \tfrac{1}{2}x \,.\, E - 1 - kL\frac{\Delta + k\cos x}{1+k} + L\frac{(\Delta - \cos x)(1+\Delta)}{2\sin^2 x} + \Delta \Big\}.$$

TAFEL 101.

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^p \frac{1}{2} x} E\,dx = \frac{1}{(p-1)(p-2)} \Big\{ [(p-3) + (p-5)\,4k^2](p-3) \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-2} \frac{1}{2} x} E\,dx -$$

$$- (p-5)(p-7)\,8k^2 \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-4} \frac{1}{2} x} E\,dx + (p-7)(p-9)\,4k^2 \int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^{p-6} \frac{1}{2} x} E\,dx +$$

$$+ [6 \cos x - \{(p-1) - (p-9) \cos x\} \Delta^2] \frac{1}{\cos^{p-1} \frac{1}{2} x} E - \frac{2 \sin x}{\cos^{p-1} \frac{1}{2} x} \Delta^3 \Big\}.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos^2 \tfrac{1}{2} x . E\,dx = -\frac{2}{3} \cos^3 \tfrac{1}{2} x . E + \frac{2}{45 k \sqrt{2k}} \Big\{ (1+2k^2)\,6\,E(l,z) - (1-2k)(1-k)\,3\,F(l,z) +$$

$$+ \Big[(1+14k+4k^2) - 4(1+k)\,k \cos x - \frac{2(4+5k+10k^2) - (1+4k)\Delta^2}{1+k-k\cos x} \Big] \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big\}.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . \cos \tfrac{1}{2} x . E\,dx = -\frac{1}{2} \cos x . E + \frac{1}{4k}\, Bg \sin (k \sin x) + \frac{1}{4} \sin x . \Delta.$$

$$\int \sin \tfrac{1}{2} x . E\,dx = -2 \cos \tfrac{1}{2} x . E + \frac{4}{3\sqrt{2k}} \Big\{ 2k E(l,z) + (1-k) F(l,z) + \frac{1-k-k\cos x}{1+k-k\cos x} \sin \tfrac{1}{2} x . \Delta \sqrt{2k} \Big\}.$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} E\,dx = \beta_1 - \delta_1.$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} E\,dx = 2 \sec \tfrac{1}{2} x . E + \frac{8k \sin \frac{1}{2} x . \Delta}{1+k-k\cos x} - \frac{2\sqrt{2k}}{1+2k} \Big\{ (1+2k)\,2\,E(l,z) -$$

$$- 2k F(l,z) + \frac{1-2k}{4k} \Pi(-r,l,z) \Big\} - L \frac{(\Delta + \sin \frac{1}{2} x)^2}{(1+k-2r)\,2k\,(1-\cos x) + \Delta^2}.$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^3 \frac{1}{2} x} E\,dx = (2 + \sec^2 \tfrac{1}{2} x) E - (1-k^2)\,2F - 2k\, Bg \sin (k \sin x) - 2 \tang \tfrac{1}{2} x . \Delta.$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^5 \frac{1}{2} x} E\,dx = \frac{1}{6} \Big\{ (4 - 8k^2 + 3 \sec^4 \tfrac{1}{2} x) E - (1-k^2)\,4F - [2(1-k^2) + (1-2k^2)\cos x] \frac{\sin x}{\cos^4 \frac{1}{2} x} \Delta \Big\}.$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^7 \frac{1}{2} x} E\,dx = \frac{1}{45} \Big\{ (16 + 24k^2 - 64k^4 + 15 \sec^6 \tfrac{1}{2} x) E - (1+2k^2)(1-k^2)\,16F -$$

$$- [4(1-k^2)(1+4k^2) + (1+2k^2)(3-4k^2)\,2\cos x + 2\cos^2 x + (3-8k^2)\Delta^2] \frac{\sin x}{\cos^6 \frac{1}{2} x} \Delta \Big\}.$$

TAFEL 102.

$$\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^p\frac{1}{2}x}E=\frac{1}{(p-1)(p-2)}\Big\{[(2p^2-9p+11)+(p-3)(p-5)4k^2]\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-2}\frac{1}{2}x}E-$$

$$-[(p-3)^2+(p-5)(3p-17)4k^2]\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-4}\frac{1}{2}x}E+$$

$$+(p-7)(3p-19)4k^2\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-6}\frac{1}{2}x}E-(p-7)(p-9)4k^2\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos^{p-8}\frac{1}{2}x}E-$$

$$-[6\cos x-\{(p-1)-(p-7)\cos x\}\Delta^2]\frac{E}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}-\frac{2\sin x}{\cos^{p-1}\frac{1}{2}x}\Delta^3\Big\}.$$

$$\int\frac{\cos^6\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}E\,dx=\eta_1+\frac{1}{30}(73+16\cos x+3\cos^2x)\cos\frac{1}{2}x.E-\frac{1}{315k^2\sqrt{2k}}\Big\{(5+36k^2)30kE(l,z)-$$

$$-(1+26k-180k^2)3(1-k)F(l,z)+\Big[(-3+26k+728k^2+104k^3)-$$

$$-104(1+k)k^2\cos x+9\Delta^3-2k\frac{(63+95k+364k^2)-(1+4k)13\Delta^2}{1+k-k\cos x}\Big]\sin\frac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int\frac{\cos^5\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}E\,dx=\beta_1+\delta_1+\frac{1}{24k^2}\{[-4+2k^2(1-9\cos x)+3\Delta^2]E+$$

$$+(1-k^2)F-9k\,Bg\sin(k\sin x)-(9+\cos x)k^2\sin x.\Delta\}.$$

$$\int\frac{\cos^4\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}E\,dx=\eta_1+\frac{1}{3}(7+\cos x)\cos\tfrac{1}{2}x.E-\frac{2}{45k\sqrt{2k}}\Big\{(1+12k^2)6E(l,z)-(1-k)(1-12k)3F(l,z)+$$

$$+\Big[(1+44k+4k^2)-(1+k)4k\cos x-\frac{2(4+5k+40k^2)-(1+4k)\Delta^2}{1+k-k\cos x}\Big]\sin\frac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int\frac{\cos^3\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}E\,dx=\beta_1+\delta_1+\frac{1}{2}\cos x.E-\frac{1}{4k}Bg\sin(k\sin x)-\frac{1}{4}\sin x.\Delta.$$

$$\int\frac{\cos^2\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}E\,dx=\eta_1+2\cos\tfrac{1}{2}x.E-\frac{4}{3\sqrt{2k}}\Big\{2kE(l,z)+(1-k)F(l,z)+\frac{1-k-k\cos x}{1+k-k\cos x}\sin\tfrac{1}{2}x.\Delta\sqrt{2k}\Big\}.$$

$$\int\frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}E\,dx=\beta_1+\delta_1. \qquad \int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x}E=\eta_1.$$

$$\int\frac{dx}{\sin\frac{1}{2}x.\cos\frac{1}{2}x}E=2\beta_1.$$

HOOFDSTUK IV.

ONDERZOEK VAN INTEGRALEN, DIE BEHALVE GONIOMETRISCHE FUNCTIËN NOG PRODUKTEN OF MACHTEN VAN ELLIPTISCHE INTEGRALEN BEVATTEN.

1. Wanneer men nagaat, dat in de beide laatste Hoofdstukken algemeene herleidingsformulen gevonden zijn voor integralen, die onder het integraalteeken den factor $F\frac{1}{\Delta}$ of $E.\Delta$ bevatten, dan ziet men lichtelijk in, dat men voor deze factoren ook $\frac{1}{2}\frac{d}{dx}.F^2$ of $\frac{1}{2}\frac{d}{dx}.E^2$ schrijven kan. En evenzeer bij die integralen, waar de overeenkomstige gedeeltelijke factoren $\frac{1}{\Delta}$ of Δ voorkomen, zal men deze ook kunnen vervangen door de andere $\frac{d}{dx}.F$ en $\frac{d}{dx}.E$. Uit deze opmerking blijkt verder, dat men in zoodanige gevallen de nieuwe theoremas kan afleiden.

$$\int \varphi.F\frac{dx}{\Delta} = \int \varphi\, dx\frac{1}{2}\frac{d}{dx}.F^2 = \frac{1}{2}\varphi.F^2 - \frac{1}{2}\int F^2\frac{d\varphi(x)}{dx}dx\,, \quad \ldots\ldots \quad (e)$$

$$\int \varphi.F.\Delta dx = \int \varphi.F dx\frac{d}{dx}.E = \varphi.E.F - \int E dx \left\{ \frac{\varphi}{\Delta} + F\frac{d\varphi(x)}{dx} \right\}, \quad \ldots \quad (f)$$

$$\int \varphi.E\frac{dx}{\Delta} = \int \varphi.E dx\frac{d}{dx}.F = \varphi.E.F - \int F dx \left\{ \varphi.\Delta + E\frac{d\varphi(x)}{dx} \right\}, \quad \ldots \quad (g)$$

$$\int \varphi.E.\Delta dx = \int \varphi.dx\frac{1}{2}\frac{d}{dx}.E^2 = \frac{1}{2}\varphi.E^2 - \frac{1}{2}\int E^2\frac{d\varphi(x)}{dx}dx. \quad \ldots\ldots \quad (h)$$

Hier leveren nu de eerste en laatste theorema's (*e*) en (*h*) integralen, die den factor F^2 of E^2 bezitten; terwijl de beide middelste theorema's (*f*) en (*g*) integralen doen ontstaan met den factor $E.F$; indien althans de daarbij voorkomende

*

integralen $\int E . \varphi \frac{dx}{\Delta}$ en $\int F . \varphi . \Delta \, dx$ bij de te behandelen gevallen bekend zijn; eigenlijk zijn deze beide laatste theoremas elkanders omgekeerde, zoo als trouwens te verwachten was.

Uit dit nieuw aangegeven oogpunt ons stel Tafels 35 — 102 onderzoekende, blijkt het gereedelijk, dat onze oogst van nieuwe uitkomsten, hoe belangrijk ook, slechts zeer schraal kan zijn.

2. Beginnen wij met de algemeene herleidingsvergelijking (XIX) van Hoofdstuk II, en passen wij daarop het theorema (*e*) toe, dan komt er

$$p k^2 \left\{ sin^p x . cos x . F^2 - \int F^2 dx \left[p \, sin^{p-1} x . cos^2 x - sin^{p+1} x \right] \right\} = - 2 sin^{p-1} x . \Delta . F +$$

$$+ 2 \int sin^{p-1} x \, dx + (p-1) \left\{ sin^{p-2} x . cos x . F^2 - \int F^2 dx \left[(p-2) sin^{p-3} x . cos^2 x - sin^{p-1} x \right] \right\} .$$

Bedenken wij echter, dat algemeen

$$A \, sin^{a-1} x . cos^2 x - sin^{a+1} x = A \, sin^{a-1} x - (A + 1) \, sin^{a+1} x$$

is, en vervangen wij tevens p door $p - 1$, zoo verkrijgen wij na oplossing

$$\int sin^p x . F^2 dx = \frac{1}{(p-1) p k^2} \left\{ \left[(p-2)^2 + (p-1)^2 k^2 \right] \int sin^{p-2} x . F^2 dx - \right.$$

$$- (p-2)(p-3) \int sin^{p-4} x . F^2 dx - \left[1 - (p-1) \Delta^2 \right] sin^{p-3} x . cos x . F^2 +$$

$$\left. + 2 \int sin^{p-2} x \, dx - 2 \, sin^{p-2} x . \Delta . F \right\} \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(LXXIII)}$$

Op dezelfde wijze kunnen wij nog de algemeene herleidingsformule (XXV) van Hoofdstuk II behandelen, en daarop vooreerst het theorema (*e*) toepassen,

$$p k^2 \left\{ sin x . cos^p x . F^2 - \int F^2 dx \left[cos^{p+1} x - p \, sin^2 x . cos^{p-1} x \right] \right\} =$$

$$= - 2 cos^{p-1} x . \Delta . F + 2 \int cos^{p-1} x \, dx - (p-1)(1-k^2) \left\{ sin x . cos^{p-2} x . F^2 - \right.$$

$$\left. - \int F^2 dx \left[cos^{p-1} x - (p-2) sin^2 x . cos^{p-3} x \right] \right\} ;$$

en vervolgens daarbij de bekende goniometrische herleiding

$$\cos^{a+1} x - A \sin^2 x . \cos^{a-1} x = (A + 1) \cos^{a+1} x - A \cos^{a-1} x$$

gebruiken, waarna men den exponent p met de eenheid moet verminderen, om ten slotte te verkrijgen

$$\int \cos^p x . F^2 dx = \frac{1}{(p-1) p k^2} \Big\{ [(p-1)^2 k^2 - (p-2)^2 (1-k^2)] \int \cos^{p-2} x . F^2 dx +$$

$$+ (p-2)(p-3)(1-k^2) \int \cos^{p-4} x . F^2 dx - [(1-k^2) - (p-1) \Delta^2] \sin x . \cos^{p-3} x . F^2 -$$

$$- 2 \int \cos^{p-2} x \, dx + 2 \cos^{p-2} x . \Delta . F \Big\} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(LXXIV)}$$

Ten einde voor deze beide algemeene herleidingsformulen de daarbij noodige eindintegralen te vinden, ga men alzoo te werk in dergelijken zin, als bij genoemde formulen zelve; dat is, men passe het theorema ($\boldsymbol{e}$) toe, vooreerst op de integralen (82) en (95), die dan leveren

$$2 \theta = \cos x . F^2 + \int F^2 . \sin x \, dx,$$

en

$$2 \lambda = \sin x . F^2 - \int F^2 . \cos x \, dx;$$

waaruit door oplossing

$$\int \sin x . F^2 dx = 2 \theta - \cos x . F^2 , \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(238)}$$

$$\int \cos x . F^2 dx = - 2 \lambda + \sin x . F^2 . \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(239)}$$

De integraal (80) geeft evenzoo

$$\frac{2}{k^2} (x - \Delta . F) = \sin x . \cos x . F^2 - \int F dx (\cos^2 x - \sin^2 x).$$

Daar echter

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

is, behoeven wij hier ter bepaling der overige integralen eerst

$$\int F^2\,dx = \nu, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (240)$$

weder eene nieuwe transcendente; daarmede echter verkrijgt men dan uit de vorige vergelijking

$$\int \sin^2 x\,.\,F^2\,dx = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{k^2}(x - \Delta\,.\,F) - \frac{1}{2}\sin x\,.\,\cos x\,.\,F^2\,, \quad \ldots\ldots \quad (241)$$

$$\int \cos^2 x\,.\,F^2\,dx = \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{k^2}(x - \Delta\,.\,F) + \frac{1}{2}\sin x\,.\,\cos x\,.\,F^2. \quad \ldots\ldots \quad (242)$$

Uit de integraal (77) leidt men af

$$-\frac{2\Delta}{\sin x}F + 2\,L\,tang\,\tfrac{1}{2}x = \frac{\cos x}{\sin^2 x}F^2 - \int F^2 dx\left(-\frac{1}{\sin x} - 2\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\right) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}F^2 - \int F^2 dx\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{2}{\sin^3 x}\right).$$

Wanneer men hier de nieuwe transcendente

$$\int F^2 \frac{dx}{\sin x} = \zeta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (243)$$

invoert, vindt men na oplossing

$$\int F^2 \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2}\xi - \frac{\Delta}{\sin x}F + L\,tang\,\tfrac{1}{2}x - \frac{\cos x}{2\sin^2 x}F^2. \quad \ldots\ldots \quad (244)$$

Terwijl men de integraal (93) evenzoo behandelt, komt er

$$\frac{2}{1-k^2}\left\{\frac{\Delta}{\cos x}F - L\,tang\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right)\right\} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}F^2 - \int F^2 dx\left(\frac{1}{\cos x} + 2\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\right) =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x}F^2 - \int F\,dx\left(\frac{2}{\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}\right).$$

Ook hier behoort men weder de integraal

$$\int F^2 \frac{dx}{\cos x} = \varrho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (245)$$

als eene nieuwe transcendente te beschouwen, en is alsdan in staat de integraal optelossen

$$\int F^2 \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\varrho - \frac{1}{1-k^2}\left\{\frac{\Delta}{\cos x} F - L\,tang\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right)\right\} + \frac{\sin x}{2\cos^2 x} F^2 \;.\;.\;.\; (246)$$

Van deze integralen behooren nu (240) en (241) als eindintegralen bij de herleidingsformule (LXXIII) voor evene waarden van p; terwijl bij onevene waarden van p daartoe de integralen (244), (243) en (238) dienen. De eindintegralen voor de herleidingsformule (LXXIV) worden voor het geval, dat de exponent p even is, bepaald door de integralen (240) en (242), en voor het geval, dat p oneven is, door de integralen (246), (245) en (239).

3. Voor de algemeene herleidingsformule (XX) van Hoofdstuk II geldt het tweede theorema (*f*); zijne toepassing levert hier

$$(p+2)k^2 \left\{ \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, E \,.\, F - \int E\,dx\left[\sin^p x \,.\, \cos x \frac{1}{\Delta} + F(p \sin^{p-1} \cos^2 x - \sin^{p+1} x)\right]\right\} =$$

$$= - \sin^{p-1} x \,.\, \Delta^3 \,.\, F + \int \sin^{p-1} x \,.\, \Delta^2 dx + (p-1)\left\{ \sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, E \,.\, F - \right.$$

$$\left. - \int E\,dx\left[\sin^{p-2} x \,.\, \cos x \frac{1}{\Delta} + F\{(p-2)\sin^{p-3} x \,.\, \cos^2 x - \sin^{p-1} x\}\right]\right\}.$$

Van de beide integralen

$$\int E \,.\, \sin^a x \,.\, \cos x \frac{dx}{\Delta},$$

die hier voorkomen, kan men er eene verdrijven door bij deze uitkomst lid bij lid optetellen de herleidingsformule (LV) uit Hoofdstuk III,

$$p\,k^2 \int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, E \frac{dx}{\Delta} = - \sin^{p-1} x \,.\, \Delta \,.\, E + \int \sin^{p-1} x \,.\, \Delta^2 dx + (p-1)\int \sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, E \frac{dx}{\Delta};$$

want dan is

$$(p+2)k^2 \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, E \,.\, F - 2k^2 \int \sin^p x \,.\, \cos x \,.\, E \frac{dx}{\Delta} - (p+2)k^2 \int E \,.\, F \,.\, dx[p \sin^{p-1} x -$$

$$- (p+1)\sin^{p+1} x] = -(\Delta^2 \,.\, F + E)\sin^{p-1} x \,.\, \Delta + 2\int \sin^{p-1} x \,.\, \Delta^2 dx +$$

$$+ (p-1)\sin^{p-2} x \,.\, \cos x \,.\, F \,.\, E - (p-1)\int E \,.\, F dx[(p-2)\sin^{p-3} x - (p-1)\sin^{p-1} x];$$

waaruit door oplossing volgt, indien men tevens p door $p-1$ vervangt,

$$\int \sin^p x . E . F\,dx = \frac{1}{(p+1)\,p\,k^2} \Big\{ [\,(p-2)^2 + (p^2-1)\,k^2\,] \int \sin^{p-2} x . E . F\,dx -$$

$$-(p-2)(p-3) \int \sin^{p-4} x . E . F\,dx - (E + \Delta^2 . F) \sin^{p-2} x . \Delta + 2 \int \sin^{p-2} x . \Delta^2\,dx +$$

$$+ 2\,k^2 \int \sin^{p-1} x . \cos x . E \frac{dx}{\Delta} - [\,3 - (p+1)\,\Delta^2\,] \sin^{p-3} x . \cos x . E . F^2 \Big\} . \; . \quad \text{(LXXV)}$$

Eindelijk kan men het tweede theorema (f) evenzeer toepassen op de algemeene herleidingsformule (XXVI) van Hoofdstuk II.

$$(p+2)k^2 \Big\{ \sin x . \cos^p x . E . F - \int E\,dx \Big[\sin x . \cos^p x \frac{1}{\Delta} + F (\cos^{p+1} x - p \sin^2 x . \cos^{p-1} x) \Big] \Big\} =$$

$$= - \cos^{p-1} x . \Delta^3 . F + \int \cos^{p-1} x . \Delta^2\,dx - (p-1)\,(1-k^2) \Big\{ \sin x . \cos^{p-2} x . E . F -$$

$$- \int E\,dx \Big[\sin x . \cos^{p-2} x \frac{1}{\Delta} + F (\cos^{p-1} x - (p-2) \sin^2 x . \cos^{p-3} x) \Big] \Big\}.$$

Hier komen weder twee integralen van den vorm

$$\int E . \sin x . \cos^p x \frac{dx}{\Delta}$$

voor; eene daarvan kan men elimineeren door de algemeene herleidingsformule (LXI) van Hoofdstuk III,

$$p\,k^2 \int \sin x . \cos^p x . E \frac{dx}{\Delta} = - \cos^{p-1} x . \Delta . E + \int \cos^{p-1} x . \Delta^2\,dx -$$

$$- (p-1)\,(1-k^2) \int \sin x . \cos^{p-2} x . E \frac{dx}{\Delta},$$

lid voor lid bij de verkregen uitkomst optetellen, waardoor inderdaad de volgende verkregen wordt

$$(p+2)k^2 \sin x . \cos^p x . E . F - 2\,k^2 \int \sin x . \cos^p x . E \frac{dx}{\Delta} - (p+2)k^2 \int E . F\,dx [(p+1) \cos^{p+1} x -$$

$$- p \cos^{p-1} x\,] = - (\Delta^2 . F + E) \cos^{p-1} x . \Delta + 2 \int \cos^{p-1} x . \Delta^2\,dx -$$

$$- (p-1)(1-k^2) \sin x . \cos^{p-2} x . E . F + (p-1)(1-k^2) \int E . F\,dx\,[(p-1) \cos^{p-1} x - (p-2) \cos^{p-3} x].$$

Stelt men nu daarin $p-1$ in plaats van den exponent p, zoo komt men door oplossing tot

$$\int cos^p x . E . F\, dx = \frac{1}{(p+1)\,p\,k^2} \Big\{ [\,(p^2-1)k^2-(p-2)^2(1-k^2)\,] \int cos^{p-2} x . E . F\, dx +$$

$$+ (p-2)(p-3)(1-k^2) \int cos^{p-4} x . E . F\, dx + (E + \Delta^2 . F)\, cos^{p-2} x . \Delta -$$

$$- 2 \int cos^{p-2} x . \Delta^2\, dx - 2\, k^2 \int sin\, x . cos^{p-1} x . E \frac{dx}{\Delta} -$$

$$- [\,3\,(1-k^2) - (p+1)\,\Delta^2\,]\, sin\, x . cos^{p-3} x . E . F \Big\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(LXXVI)}$$

Hetzelfde theorema (f) zal ons hier dienst moeten bewijzen bij het afleiden der eindintegralen, noodig voor het nuttige gebruik der zoo even gevonden algemeene herleidingsformulen. Daardoor levert vooreerst de integraal (81)

$$\frac{1}{6\,k^2}\{(2-k^2)x+k^2\, sin\, x . cos\, x-2\Delta^3.F\} = sinx.cosx.E.F - \int Edx\Big[\frac{sinx.cosx}{\Delta}+F(cos^2x-sin^2x)\Big].$$

In het tweede lid dezer vergelijking komen onder het integraalteeken drie termen voor, die dus drie integralen opleveren: de eerste, die hier niet tehuis behoort, kan men elimineeren door lid voor lid de integraal (197) bij te tellen,

$$\frac{1}{2\,k^2}\{(2-k^2)\,x + k^2 sin\, x . cos\, x - 2\,\Delta . E\} = \int sin\, x . cos x . E\, \frac{dx}{\Delta};$$

waardoor er komt

$$\frac{1}{3\,k^2}\{(2-k^2)\, 2\,x + 2\,k^2\, sin\, x . cos\, x - (\Delta^2 . F + 3\,E)\,\Delta\} =$$

$$= sin\, x . cos\, x . E . F - \int E . F\, dx\, (cos^2 x - sin^2 x).$$

Maar men heeft

$$cos^2 x - sin^2 x = 1 - 2\, sin^2 x = 2\, cos^2 x - 1\,;$$

zoodra men dus de integraal

$$\int E . F\, dx = \sigma, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(247)}$$

eene nieuwe transcendente wederom, invoert, leidt men uit het voorgaande af

$$\int sin^2x.E.F\,dx=\frac{1}{2}\sigma+\frac{1}{6k^2}\{(2-k^2)2x+(2-3E.F)k^2 sinx.cosx-(\Delta^2.F+3E)\Delta\}\ ,\ \ldots\ (248)$$

$$\int cos^2x.E.F\,dx=\frac{1}{2}\sigma-\frac{1}{6k^2}\{(2-k^2)2x+(2-3E.F)k^2 sinx.cosx-(\Delta^2.F+3E)\Delta\}.\ \ldots\ (249)$$

Verder geeft de integraal (84) evenzoo

$$-k^2\theta-\frac{\Delta}{sin\,x}F+L\,tang\,\tfrac{1}{2}x=\frac{cos\,x}{sin^2 x}E.F-\int E\,dx\left\{\frac{cos\,x}{sin^2 x}\frac{1}{\Delta}+F\left(-\frac{1}{sin\,x}-2\frac{cos^2 x}{sin^3 x}\right)\right\}.$$

Ten einde hier de vreemde integraal, — die in het tweede lid, als eerste der drie aldaar voorkomende integralen, gevonden wordt — naar behooren te verwijderen, telle men lid voor lid de integraal (194)

$$k^2 cos\,x-k^2-\frac{\Delta}{sin\,x}E+L\,tang\,\tfrac{1}{2}x=\int\frac{cos\,x}{sin^2 x}E\frac{dx}{\Delta}$$

bij, om te verkrijgen

$$-k^2\theta+k^2 cos\,x-k^2-(E+F)\frac{\Delta}{sin\,x}+2\,L\,tang\,\tfrac{1}{2}x=\frac{cos\,x}{sin^2 x}E.F-\int E.F\,dx\left(\frac{1}{sin\,x}-\frac{2}{sin^3 x}\right).$$

Stel dus

$$\int E.F\frac{dx}{sin\,x}=\tau\ ,\ \ldots\ (250)$$

eene nieuwe, hier noodige, transcendente, dan wordt

$$\int E.F\frac{dx}{sin^3 x}=\frac{1}{2}\left\{\tau-k^2\theta-k^2+2L\,tang\tfrac{1}{2}x-(E+F)\frac{\Delta}{sin\,x}-\frac{cos\,x}{sin^2 x}(E.F-1+\Delta^2)\right\}..(251)$$

Eindelijk geeft nog de integraal (97) langs denzelfden weg door het theorema (*I*)

$$k^2\lambda+\frac{\Delta}{cos\,x}F-L\,tang\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x\right)=\frac{sin\,x}{cos^2 x}E.F-\int E\,dx\left\{\frac{sin\,x}{cos^2 x}\frac{1}{\Delta}+F\left(\frac{1}{cos\,x}+2\frac{sin^2 x}{cos^3 x}\right)\right\},$$

waaruit nu weder in het tweede lid de eerste term, die daar onder het integraalteeken voorkomt, moet geëlimineerd worden: dit gelukt, indien men lid voor lid de integraal (210)

$$\frac{1}{1-k^2}\left\{\frac{\Delta}{\cos x}E - k^2 \sin x - (1-k^2)\, L\, tang\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right)\right\} = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} E \frac{dx}{\Delta}$$

bijtelt, want dan komt er

$$k^2\lambda + \frac{1}{1-k^2}\{E + (1-k^2)F\}\frac{\Delta}{\cos x} - \frac{k^2}{1-k^2}\sin x - 2\, L\, tang\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right) =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} E\,.\,F - \int E\,.\,F\, dx \left(\frac{2}{\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}\right).$$

Men is verplicht hier wederom de integraal

$$\int E\,.\,F \frac{dx}{\cos x} = v\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (252)$$

hoezeer eene nieuwere transcendente, in te voeren, maar erlangt dan ook

$$\int E\,.\,F \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\left\{v - k^2\lambda - \frac{1}{1-k^2}\{E + (1-k^2)F\}\frac{\Delta}{\cos x} + \right.$$

$$\left. + 2\, L\, tang\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right) + \left(E\,.\,F + 1 - \frac{\Delta^2}{1-k^2}\right)\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (253)$$

De algemeene herleidingsformule (LXXV) gebruikt van deze uitkomsten als eindintegralen bij onevene waarden van den exponent p, de integralen (251) en (250); bij evene waarden daarentegen de integralen (247) en (248). De andere herleidingsvergelijking (LXXVI) vereischt evenzeer verschillende eindintegralen, naarmate p even of oneven is; in het laatste geval vindt men daarvoor de integralen (253) en (252), in het eerste de integralen (247) en (249).

4. Met hetzelfde recht en met dezelfde hoop op goeden, en niet minder merkwaardigen, uitslag mogen wij nu Hoofdstuk III opslaan. Vooreerst vindt men de algemeene herleidingsformule (LV), geschikt voor de toepassing van het theorema (*g*). Daardoor verkrijgen wij dan ook

$$p k^2 \left\{ \sin^p x . \cos x . E . F - \int F dx [\sin^p x . \cos x . \Delta + E(p \sin^{p-1} x . \cos^2 x - \sin^{p+1} x)] \right\} =$$

$$= - \sin^{p-1} x . \Delta . E + \int \sin^{p-1} x . \Delta^2 dx + (p-1) \left\{ \sin^{p-2} x . \cos x . E . F - \right.$$

$$\left. - \int F dx [\sin^{p-2} x . \cos x . \Delta + E \{ (p-2) \sin^{p-3} x . \cos^2 x - \sin^{p-1} x \}] \right\}.$$

Hier komen twee integralen voor van den vorm

$$\int F dx . \sin^p x . \cos x . \Delta ;$$

eene daarvan kan men gemakkelijk elimineeren, door bij deze uitkomst lid voor lid de algemeene herleidingsformule (XX) van het tweede Hoofdstuk

$$(p+2) k^2 \int \sin^p x . \cos x . \Delta . F dx = - \sin^{p-1} x . \Delta^3 . F +$$

$$+ \int \sin^{p-1} x . \Delta^2 dx + (p-1) \int \sin^{p-2} x . \cos x . \Delta . F dx$$

op te tellen; deze som wordt

$$p k^2 \sin^p x . \cos x . E . F + 2 k^2 \int \sin^p x . \cos x . \Delta . F dx - p k^2 \int E . F dx \{ p \sin^{p-1} x$$

$$- (p+1) \sin^{p+1} x \} = - (\Delta^2 . F + E) \sin^{p-1} x . \Delta + 2 \int \sin^{p-1} x . \Delta^2 dx +$$

$$+ (p-1) \sin^{p-2} x . \cos x . E . F - (p-1) \int E . F dx [(p-2) \sin^{p-3} x - (p-1) \sin^{p-1} x].$$

Vervangt men nu eerst p door $p-1$, dan geeft de eenvoudige oplossing

$$\int \sin^p x . E . F dx = \frac{1}{(p-1) p k^2} \left\{ [(p-2)^2 + (p-1)^2 k^2] \int \sin^{p-2} x . E . F dx - \right.$$

$$- (p-2)(p-3) \int \sin^{p-4} x . E . F dx - (\Delta^2 F + E) \sin^{p-2} x . \Delta + 2 \int \sin^{p-2} x . \Delta^2 dx -$$

$$\left. - 2 k^2 \int \sin^{p-1} x . \cos x . \Delta . F dx - [1 - (p-1) \Delta^2] \sin^{p-3} x . \cos x . E . F \right\} . \; . \; . \; . \; (\text{LXXV}^a)$$

Vervolgens ontmoeten wij daar de algemeene herleidingsformule (LXI), waarop men evenzeer het theorema (*g*) toepassen kan; daardoor ontstaat de vergelijking

$$pk^2 \Big\{ sin\,x \,.\, cos^p x \,.\, E \,.\, F - \int F\,dx \left[sin\,x \,.\, cos^p x \,.\, \Delta + E(cos^{p+1} x - p\, sin^2 x \,.\, cos^{p-1} x) \right] \Big\} =$$

$$= - cos^{p-1} x \,.\, \Delta \,.\, E + \int cos^{p-1} x \,.\, \Delta^2 dx - (p-1)(1-k^2) \Big\{ sin\,x \,.\, cos^{p-2} x \,.\, E \,.\, F -$$

$$- \int F\,dx \left[sin\,x \,.\, cos^{p-2} x \,.\, \Delta + E \left\{ cos^{p-1} x - (p-2) sin^2 x \,.\, cos^{p-3} x \right\} \right] \Big\}.$$

Ten aanzien van de beide integralen van den vorm $\int F\,dx\, sin^2 x \,.\, cos^p x \,.\, \Delta$, die hier eigenlijk niet tehuis behooren, kan men wederom op dezelfde wijze handelen, als reeds vroeger gedaan is; hier telle men bij het vorige, lid voor lid, op de algemeene herleidingsvergelijking (XXVI) uit het tweede Hoofdstuk,

$$(p+2)k^2 \int sin x . cos^p x . \Delta . F dx = -cos^{p-1} x . \Delta^3 . F + \int cos^{p-1} x . \Delta^2 dx - (p-1)(1-k^2) \int sin x . cos^{p-2} x . \Delta . F dx;$$

dan verkrijgt men

$$pk^2 sin x . cos^p x . E . F + 2k^2 \int sin x . cos^p x . \Delta . F dx - pk^2 \int E . F dx \left\{ (p+1) cos^{p+1} x - p\, cos^{p-1} x \right\} =$$

$$= -(\Delta^2 F + E) cos^{p-1} x . \Delta + 2 \int cos^{p-1} x . \Delta^2 dx - (p-1)(1-k^2) sin\,x . cos^{p-2} x . E . F +$$

$$+ (p-1)(1-k^2) \int E . F\,dx \left\{ (p-1) cos^{p-1} x - (p-2) cos^{p-3} x \right\}.$$

Uit deze vergelijking kan men nu, nadat men vooraf den exponent p met de eenheid verminderd heeft, de integraal oplossen, waarom het ons te doen is, als volgt

$$\int cos^p x . E . F\,dx = \frac{1}{(p-1)pk^2} \Big\{ [(p-1)^2 k^2 - (p-2)^2 (1-k^2)] \int cos^{p-2} x . E . F\,dx +$$

$$+ (p-2)(p-3)(1-k^2) \int cos^{p-4} x . E . F dx + (\Delta^2 F + E) cos^{p-2} x . \Delta - 2 \int cos^{p-2} x . \Delta^2 dx +$$

$$+ 2k^2 \int sin\,x . cos^{p-1} x . \Delta . F\,dx - [(1-k^2) - (p-1)\Delta^2]\, sin\,x . cos^{p-3} x . E . F \Big\} .. \text{(LXXVI}^a\text{)}$$

De beide laatste, zoo even gevondene, algemeene herleidingsformulen, zijn met

voorbedacht (LXXV^a) en (LXXVI^a) genoemd, omdat zij voor de herleiding van juist dezelfde integraal dienen, als waarvoor de vroegere formulen (LXXV) en (LXXVI) bestemd waren. De uitkomsten hebben dan ook in vele opzichten eene groote overeenkomst, maar in een bijzonder punt, dat hier als hoofdzaak kan gelden, wijken zij van elkander af. Het is ons toch telkens wel gelukt, om een der hier vreemde integralen $\int sin^a x . cos^b x . E \frac{dx}{\Delta}$ of $\int sin^a x . cos^b x . \Delta . F dx$ te elimineeren, maar de andere integraal, telkens van denzelfden vorm, bleef in de vergelijking bestaan. Vandaar dat, hoezeer de beide theoremas (f) en (g) eigenlijk niet onderscheiden waren, toch de uitkomsten van hunne toepassing in zooverre anders waren, dat in de algemeene herleidingsformulen van N⁰. 3 de eerste der vermelde integralen, in die van dit Nummer daarentegen de tweede van die integralen overbleven; en wel in de beide herleidingsformulen (LXXV) voor $a = p-1$, $b = 1$, en voor de beide herleidingsvergelijkingen (LXXVI) voor $a = 1$, $b = p-1$.

Wat de praktische toepassing der beide stellen herleidingsformulen betreft, kan men in de keuze zich geheel laten leiden door omstandigheden van reeds bekende integralen, enz. Het spreekt dus ook wel van zelf, dat men hier geene nieuwe eindintegralen heeft te zoeken, omdat bij hunne opsporing in N⁰. 3 toch de integraal $\int sin^a x . cos^b x . E \frac{dx}{\Delta}$, die er nog in voorkwam, eerst moest verdreven worden.

5. Maar toch kunnen wij uit het derde Hoofdstuk andere herleidingsformulen nemen, en daarmede tot nieuwe, merkwaardige uitkomsten geraken, wanneer men daarop het laatste theorema (h) toepast. De eerste daarvan is de algemeene herleidingsvergelijking (LVI); en deze levert door de aangegeven bewerking

$$(p+2) k^2 \left\{ sin^p x . cos x . E^2 - \int E^2 dx \left[p \, sin^{p-1} x . cos^2 x - sin^{p+1} x \right] \right\} =$$

$$= -2 \, sin^{p-1} x . \Delta^3 . E + 2 \int sin^{p-1} x . \Delta^4 dx + (p-1) \left\{ sin^{p-2} x . cos x . E^2 - \right.$$

$$\left. - \int E^2 dx \left[(p-2) sin^{p-3} x . cos^2 x - sin^{p-1} x \right] \right\}.$$

Bedenkt men, dat hier algemeen

$$A \, sin^{a-1} x . cos^2 x - sin^{a+1} x = A \, sin^{a-1} x - (A+1) sin^{a+1} x$$

is, en vervangt men tevens p door $p-1$, zoo komt er

$$\int sin^p x \,.\, E^2 dx = \frac{1}{(p+1)\,p\,k^2}\Big\{\,[\,(p-2)^2 + (p^2-1)\,k^2\,]\int sin^{p-2} x \,.\, E^2 dx -$$

$$-(p-2)(p-3)\int sin^{p-4} x \,.\, E^2 dx - 2\,sin^{p-2} x \,.\, \Delta^3 \,.\, E +$$

$$+\,2\int sin^{p-2} x \,.\, \Delta^4 dx - [\,1-(p+1)\,\Delta^2\,]\,sin^{p-3} x \,.\, cos\, x \,.\, E^2\Big\} \;.\;.\;.\;.\;. \;\text{(LXXVII)}$$

Ten slotte is het nog de algemeene herleidingsformule (LXII), waarop men het theorema (***h***) kan toepassen; hierdoor zal men wederom verkrijgen

$$(p+2)\,k^2\,\Big\{\,sin\,x \,.\, cos^p x \,.\, E^2 - \int E^2\,dx\,[\,cos^{p+1} x - p\,sin^2 x \,.\, cos^{p-1} x\,]\,\Big\} =$$

$$= -\,2\,cos^{p-1} x \,.\, \Delta^3 \,.\, E + 2\int cos^{p-1} x \,.\, \Delta^4 dx - (p-1)(1-k^2)\Big\{sin\,x \,.\, cos^{p-2} x \,.\, E^2 -$$

$$-\int E^2\,dx\,[\,cos^{p-1} x - (p-2)\,sin^2 x \,.\, cos^{p-3} x\,]\,\Big\}.$$

Men moet in deze vergelijking telkens de goniometrische herleiding

$$cos^a x - A\,sin^2 x \,.\, cos^{a-2} x = (A+1)\,cos^a x - A\,cos^{a-2} x$$

gebruiken, en vervolgens $p-1$ voor den exponent p in de plaats stellen, ten einde ten slotte daaruit de volgende herleidingsformule af te leiden.

$$\int cos^p x \,.\, E^2\,dx = \frac{1}{(p+1)\,p\,k^2}\Big\{\,[\,(p^2-1)\,k^2 - (p-2)^2(1-k^2)\,]\int cos^{p-2} x \,.\, E^2\,dx +$$

$$+\,(p-2)(p-3)(1-k^2)\int cos^{p-4} x \,.\, E^2 dx + 2\,cos^{p-3} x \,.\, \Delta^3 \,.\, E -$$

$$-\,2\int cos^{p-2} x \,.\, \Delta^4 dx - [\,3\,(1-k^2) - (p+1)\,\Delta^2\,]\,sin\,x \,.\, cos^{p-3} x \,.\, E^2\Big\} \;.\;. \;\text{(LXXVIII)}$$

Ook voor deze beide herleidingsvergelijkingen moet men nog de eindintegralen opzoeken, hetgeen weder geschiedt door de toepassing van hetzelfde theorema (***h***) op daarvoor geschikte, reeds gevonden integralen. Vooreerst geeft langs dezen weg de integraal (198)

$$\frac{1}{12k^2}\{-8\Delta^3.E+(8-8k^2+3k^4)x+[3(2-k^2)+2\Delta^2]k^2 sin x.cos x\}=sin x.cos x.E^2-\int E^2 dx\,[cos^2 x-sin^2 x].$$

Wanneer men zich weder van eene nieuwe transcendente

$$\int E^2 . dx = \varphi \quad \ldots \ldots \quad (254)$$

bedient, verkrijgt men uit de vorige vergelijking, daar toch

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

is, door oplossing

$$\int \sin^2 x . E^2 dx = \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{24 k^2} \{- 8 \Delta^3 . E + (8 - 8 k^2 + 3 k^4) x +$$
$$+ [3 (2 - k^2) + 2 \Delta^2 - 12 E^2] k^2 \sin x . \cos x \}, \quad \ldots \ldots \quad (255)$$

$$\int \cos^2 x . E^2 dx = \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{24 k^2} \{- 8 \Delta^3 . E + (8 - 8 k^2 + 3 k^4) x +$$
$$+ [3 (2 - k^2) + 2 \Delta^2 - 12 E^2] k^2 \sin x . \cos x \}. \quad \ldots \ldots \quad (256)$$

Verder komt er door middel van ons theorema uit de integraal (201)

$$2 (- k^2 \theta_1 - \frac{\Delta}{\sin x} E + k^2 \cos x - k^2 + L \, tang \tfrac{1}{2} x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x} E^2 - \int E^2 dx \left(\frac{-1}{\sin x} - 2 \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} \right).$$

Nu is wel

$$\frac{-1}{\sin x} - 2 \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} = \frac{1}{\sin x} - \frac{2}{\sin^3 x},$$

maar men moet hier toch de integraal

$$\int E^2 \frac{dx}{\sin x} = \chi \quad \ldots \ldots \quad (257)$$

als eene nieuwe transcendente invoeren; eerst dan kan men ook uit het vorige afleiden

$$\int E^2 \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2} \chi - k^2 \theta_1 - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} (E^2 + 2 \Delta^2 - 2) - \frac{\Delta}{\sin x} E - k^2 - L \, tang \tfrac{1}{2} x. \quad . \ (258)$$

Ten laatste blijft ons nog de integraal (214) over, geschikt voor de toepassing van het theorema (***h***): zij geeft hier vooreerst

$$2\left\{k^2\lambda_1+\frac{\Delta}{\cos x}E-k^2\sin x-(1-k^2)L\,tang\left(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x\right)\right\}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}E^2-\int E^2\,dx\left(\frac{1}{\cos x}+2\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\right).$$

Bedenkt men evenwel, dat $\frac{1}{\cos x}+2\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}=-\frac{1}{\cos x}+\frac{2}{\cos^3 x}$ is, zoo is men nog eens verplicht, een nieuwe transcendente in te voeren, de integraal

$$\int E^2\frac{dx}{\cos x}=\psi\,; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (259)$$

en daarmede vindt men eindelijk

$$\int E^2\frac{dx}{\cos^3 x}=\frac{1}{2}\psi-k^2\lambda_1+\frac{\sin x}{2\cos^2 x}\left[E^2-2(1-k^2)+2\Delta^2\right]-\frac{\Delta}{\cos x}E+(1-k^2)L\,tang\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}x\right) \ldots (260)$$

6. En hiermede zijn wij aan het einde van ons onderzoek gekomen, dat tot merkwaardige uitkomsten heeft gevoerd, zoowel wat algemeene herleidingsformulen betreft, als ten opzichte van hare eindintegralen, zonder welke toch de eerste weinig nut hebben. Was het wel is waar noodzakelijk eenige nieuwe transcendenten in te voeren, hetgeen bij integralen van zoo bijzonderen vorm, als de hier behandelde, niet zoo geheel vreemd is; daardoor waren wij dan ook in staat gesteld, om vele onderling zamenhangende integralen op te sporen. Menige soort van symetrie kan men daarbij tusschen deze integralen waarnemen, zooals bij eene aandachtige beschouwing der Tafels achter het 2[de] en 3[de] Hoofdstuk, zoowel als van de hier volgende, herhaaldelijk zal blijken.

Stelt men zich de vraag, of men in deze richting nog verder zoude kunnen gaan, dan schijnt deze ontkennend beantwoord te moeten worden. Immers de onderzoekingen in N°. 9, 10 en 11 van Hoofdstuk II, die aldaar tot geene geschikte uitkomsten konden voeren, snijden dus ook den weg af voor verdere onderzoekingen als in dit Hoofdstuk.

TAFELS 103—108.

VERKLARING.

$$\int = \int_0^x, \quad \Delta = \sqrt{1-k^2 \sin^2 x}, \quad F = \int_0^x \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E = \int_0^x \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$

$$\theta = \int \cos x \,.\, F \frac{dx}{\Delta}, \qquad \nu = \int F^2\, dx, \qquad \upsilon = \int E.F \frac{dx}{\cos x},$$

$$\lambda = \int \sin x \,.\, F \frac{dx}{\Delta}, \qquad \xi = \int F^2 \frac{dx}{\sin x}, \qquad \varphi = \int E^2\, dx,$$

$$\theta_1 = \int \cos x \,.\, E \frac{dx}{\Delta}, \qquad \varrho = \int F^2 \frac{dx}{\cos x}, \qquad \chi = \int E^2 \frac{dx}{\sin x},$$

$$\lambda_1 = \int \sin x \,.\, E \frac{dx}{\Delta}, \qquad \sigma = \int E.F dx, \qquad \psi = \int E^2 \frac{dx}{\cos x}.$$

$$\tau = \int E.F \frac{dx}{\sin x},$$

---

*

TAFEL 103.

$$\int \sin^p x \,.\, F^2 dx = \frac{1}{(p-1)\,p\,k^2} \Big\{ [\,(p-2)^2 + (p-1)^2 k^2\,] \int \sin^{p-2} x \,.\, F^2 dx -$$

$$- (p-2)(p-3) \int \sin^{p-4} x \,.\, F^2 \, dx + 2 \int \sin^{p-2} x \, dx -$$

$$- 2 \sin^{p-2} x \,.\, \Delta \,.\, F - [\, 1 - (p-1)\,\Delta^2\,] \sin^{p-3} x . \cos x \,.\, F^2 \Big\}.$$

$$\int F^2 \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2}\xi - \frac{\Delta}{\sin x} F - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} F^2 + L\, tang\, \tfrac{1}{2} x. \qquad \int F^2 \frac{dx}{\sin x} = \xi.$$

$$\int F^2 dx = \nu. \qquad \int \sin x \,.\, F^2 dx = 2\,\theta - \cos x \,.\, F^2.$$

$$\int \sin^2 x \,.\, F^2 dx = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{k^2}(x - \Delta \,.\, F) - \frac{1}{2} \sin x \,.\, \cos x \,.\, F^2.$$

TAFEL 104.

$$\int \sin^p x \,.\, E \,.\, F dx = \frac{1}{(p+1)\,p\,k^2} \Big\{ [\,(p-2)^2 + (p^2-1)\,k^2\,] \int \sin^{p-2} x \,.\, E \,.\, F dx -$$

$$-(p-2)(p-3) \int \sin^{p-4} x \,.\, E \,.\, F dx + 2 \int \sin^{p-2} x \,.\, \Delta^2 dx + 2 k^2 \int \sin^{p-1} x \,.\, \cos x \,.\, E \frac{dx}{\Delta} -$$

$$- (E^2 + \Delta^2 \,.\, F) \sin^{p-2} x \,.\, \Delta - [\, 3 - (p+1)\,\Delta^2\,] \sin^{p-3} x \,.\, \cos x \,.\, E \,.\, F \Big\}.$$

$$= \frac{1}{(p-1)\,p\,k^2} \Big\{ [\,(p-2)^2 + (p-1)^2 k^2\,] \int \sin^{p-2} x \,.\, E.F\, dx - (p-2)(p-3) \int \sin^{p-4} x.E.F\, dx +$$

$$+ 2 \int \sin^{p-2} x.\Delta^2 dx - 2k^2 \int \sin^{p-1} x.\cos x.\Delta.F dx - (E + \Delta^2.F) \sin^{p-2} x.\Delta - [1-(p-1)\Delta^2] \sin^{p-3} x.\cos x.E.F \Big\}.$$

$$\int E \,.\, F \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2} \Big\{ \tau - k^2 \theta - k^2 + 2\, L\, tang\, \tfrac{1}{2} x - (E+F) \frac{\Delta}{\sin x} - (E\,.\,F - 1 + \Delta^2) \frac{\cos x}{\sin^2 x} \Big\}.$$

$$\int E \,.\, F \frac{dx}{\sin x} = \tau. \qquad \int E \,.\, F\, dx = \sigma.$$

$$\int \sin^2 x \,.\, E \,.\, F dx = \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{6 k^2} \Big\{ (2-k^2) 2 x + (2 - 3\, E \,.\, F)\, k^2 \sin x \,.\, \cos x - (\Delta^2 \,.\, F + 3\, E)\,\Delta \Big\}.$$

TAFEL 105.

$$\int sin^p x \, . \, E^2 \, dx = \frac{1}{(p+1)\,p\,k^2} \Big\{ [\,(p-2)^2 + (p^2-1)\,k^2\,] \int sin^{p-2} x \, . \, E^2 \, dx -$$

$$- (p-2)(p-3) \int sin^{p-4} x \, . \, E^2 \, dx + 2 \int sin^{p-2} x \, . \, \Delta^4 \, dx - 2\, sin^{p-2} x \, . \, \Delta^3 \, . \, E -$$

$$- [\,1 - (p+1)\,\Delta^2\,]\, sin^{p-3} x \, . \, cos\, x \, . \, E^2 \Big\}.$$

$$\int E^3 \frac{dx}{sin^3 x} = \frac{1}{2}\chi - k^2 \theta_1 - (E^2 + 2\,\Delta^2 - 2)\frac{cos\, x}{2\, sin^2 x} - \frac{\Delta}{sin\, x} E - k^2 - L\, tang\, \tfrac{1}{2} x.$$

$$\int {}^2 \frac{dx}{sin\, x} = \chi. \qquad \int E^2 \, dx = \varphi.$$

$$\int sin^2 x . E^2 dx = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{24 k^2} \{ -8\,\Delta^3 . E + (8 - 8k^2 + 3k^4) x + [3(2-k^2) + 2\Delta^2 - 12 E^2] k^2 sin x . cos\, x \}.$$

TAFEL 106.

$$\int cos^p x \, . \, F^2 \, dx = \frac{1}{(p-1)\,p\,k^2} \Big\{ [\,(p-1)^2 k^2 - (p-2)^2 (1-k^2)] \int cos^{p-2} x \, . \, F^2 \, dx +$$

$$+ (p-2)(p-3)(1-k^2) \int cos^{p-4} x \, . \, F^2 \, dx - 2 \int cos^{p-2} x \, dx +$$

$$+ 2\, cos^{p-2} x \, . \, \Delta \, . \, F - [\,(1-k^2) - (p-1)\,\Delta^2\,]\, sin\, x \, . \, cos^{p-3} x \, . \, F^2 \Big\}.$$

$$\int F^2 \frac{dx}{cos^3 x} = \frac{1}{2}\varrho - \frac{1}{1-k^2} \Big\{ \frac{\Delta}{cos\, x} F - L\, tang \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} x \right) \Big\} + \frac{sin\, x}{2\, cos^2 x} F^2.$$

$$\int F^2 \frac{dx}{cos\, x} = \varrho. \qquad \int F^2 \, dx = \nu. \qquad \int cos\, x \, . \, F^2 \, dx = -2\,\lambda + sin\, x \, . \, F^2.$$

$$\int cos^2 x \, . \, F^2 \, dx = \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{k^2}(x - \Delta \, . \, F) + \frac{1}{2} sin\, x \, . \, cos\, x \, . \, F^2.$$

TAFEL 107.

$$\int \cos^p x \,.\, E \,.\, F\, dx = \frac{1}{(p+1)\,p\,k^2}\Big\{ [(p^2-1)k^2 - (p-2)^2(1-k^2)] \int \cos^{p-2} x \,.\, E \,.\, F\, dx +$$

$$+ (p-2)(p-3)(1-k^2) \int \cos^{p-4} x \,.\, E \,.\, F\, dx - 2 \int \cos^{p-2} x \,.\, \Delta^2\, dx -$$

$$- 2k^2 \int \sin x \,.\, \cos^{p-1} x \,.\, E \frac{dx}{\Delta} + (E^2 + \Delta^2 \,.\, F) \cos^{p-2} x \,.\, \Delta -$$

$$- [3(1-k^2) - (p+1)\Delta^2] \sin x \,.\, \cos^{p-3} x \,.\, E \,.\, F \Big\}.$$

$$= \frac{1}{(p-1)pk^2}\Big\{ [(p-1)^2 k^2 - (p-2)^2(1-k^2)] \int \cos^{p-2} x \,.\, E \,.\, F\, dx +$$

$$+ (p-2)(p-3)(1-k^2) \int \cos^{p-4} x \,.\, E \,.\, F\, dx - 2 \int \cos^{p-2} x \,.\, \Delta^2\, dx +$$

$$+ 2k^2 \int \sin x \,.\, \cos^{p-1} x \,.\, \Delta \,.\, F\, dx + (\Delta^2 \,.\, F + E) \cos^{p-2} x \,.\, \Delta -$$

$$- [(1-k^2) - (p-1)\Delta^2] \sin x \,.\, \cos^{p-3} x \,.\, E \,.\, F \Big\}.$$

$$\int E \,.\, F \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\Big\{ v - k^2 \lambda - \frac{1}{1-k^2}\{E + (1-k^2)F\} \frac{\Delta}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\left(E \,.\, F + 1 - \frac{\Delta^2}{1-k^2}\right) +$$

$$+ 2\, L \operatorname{tang}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right)\Big\}.$$

$$\int E \,.\, F \frac{dx}{\cos x} = v. \qquad \int E \,.\, F\, dx = \sigma.$$

$$\int \cos^2 x \,.\, E \,.\, F\, dx = \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{6k^2}\{(2-k^2)2x + (2 - 3E \,.\, F)k^2 \sin x \,.\, \cos x - (\Delta^2 \,.\, F + 3E)\Delta\}.$$

TAFEL 108.

$$\int \cos^p x \,.\, E^2 dx = \frac{1}{(p+1)\,p\,k^2} \Big\{ [(p^2-1)\,k^2 - (p-2)^2\,(1-k^2)] \int \cos^{p-2} x \,.\, E^2 dx +$$

$$+ (p-2)\,(p-3)\,(1-k^2) \int \cos^{p-4} x \,.\, E^2 dx - 2 \int \cos^{p-2} x \,.\, \Delta^4 dx +$$

$$+ 2 \cos^{p-2} x \,.\, \Delta^3 \,.\, E - [\,3\,(1-k^2) - (p+1)\,\Delta^2\,] \sin x \,.\, \cos^{p-3} x \,.\, E^2 \Big\}.$$

$$\int E^2 \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\psi - k^2 \lambda_1 + [E^2 - 2\,(1-k^2) + 2\,\Delta^2]\,\frac{\sin x}{2 \cos^2 x} - \frac{\Delta}{\cos x} E +$$

$$+ (1-k^2)\, L\, tang \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right).$$

$$\int E^2 \frac{dx}{\cos x} = \psi. \qquad \int E^2\, dx = \varphi.$$

$$\int \cos^2 x \,.\, E^2 d\,x = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{24 k^2} \{ -8\,\Delta^3 \,.\, E + (8 - 8\,k^2 + 3\,k^4)\,x +$$

$$+ [\,3\,(2-k^2) + 2\,\Delta^2 - 12\,E^2\,]\,k^2 \sin x \,.\, \cos x \}.$$

E R R A T A.

			voor:	lees:
Blz.	11, reg.	2 van ond.	$\frac{\Delta}{dx}$	$\frac{dx}{\Delta}$
»	15, »	3 van ond.	$\Pi(-r, l, y) -$	$\Pi(-r, l, y) - \int$
»	16, »	1 en 11	$L\frac{}{\sqrt{}}$	L ———
»	22, »	4 van ond. (aan het einde)	$-$	$+$
»	31, »	14	$-2)$	$-2+\Delta^2)$
»	40, »	5	$-2)$	$-2+\Delta^2)$
»	59, »	8	$(\cos x +$	$(-\cos x +$
»	63, »	2 van ond.	$+p$	$-p$
		(aan het einde)	$+$	$-$
»	63, »	1 van ond.	$+(p-2)$ en $+(p-4)$	$-(p-2)$ en $-(p-4)$
»	64, »	9	$+\frac{1}{2}p$	$-\frac{1}{2}p$
		(aan het einde)	$+$	$-$
»	64, »	10	$+\frac{1}{2}(p-2)$ en $\frac{1}{2}(p-4)$	$-\frac{1}{2}(p-2)$ en $-\frac{1}{2}(p-4)$
»	64, »	11	$+\frac{1}{2}(p-6)$	$-\frac{1}{2}(p-6)$
»	64, »	9 van ond. (aan het einde)	$+$	$-$
»	64, »	8 van ond. (aan het begin)	$+$	
»	66, »	3	$(p-3)^2 +$	$(p-3)^2 -$
»	130, »	6	$\sin^3 \frac{1}{2} x . E$	$\sin^3 \frac{1}{2} x . E -$
»	136, »	8	$\{[(p-3)$	$\{(p-3)[(p-3)$
»	159, »	11	$\frac{d}{\Delta^3}$	$\frac{dx}{\Delta^3}$
»	160, »	3 van ond.	$\varkappa_1$	$-\varkappa_1$
»	206, »	10	ζ	ξ

B 29

STUDIEN ZUR PHYLOGENIE DES NERVENSYSTEMS.

II. DAS NERVENSYSTEM VAN PSEUDONEMATON NERVOSUM gen. et sp. n.

VON

Dr. A. A. W. HUBRECHT *.

Es war eine freudige Ueberraschung, unter der zoologischen Ausbeute der dritten Fahrt des *Willem Barents* nach den arctischen Meeren ein Exemplar eines kleinen wirbellosen Thieres zu erhalten, welches bei genauerer anatomischer Untersuchung sich nicht nur als Repraesentant einer neuen und interessanten Gattung erwies, sondern auch in den Verhältnissen seines Nervensystems ein niedriges und darum um so wichtigeres Stadium documentirte. In einem früheren Aufsatze über dieses Thema (siehe Anmerkung) habe ich mir ein ebenso primitiv gebautes Nervensystem als hypothetisch nothwendig gedacht: jetzt liegt die Wirklichkeit vor und giebt dem Gesichtspunkte, von dem aus die bezüglichen Fragen betrachtet wurden und welcher bis dahin zum Theil nur auf hypothetischem Boden fusste, neue Stütze.

Da die zoologischen Sammlungen, welche während der dritten Fahrt des *Willem Barents* gemacht wurden, der Königlichen Zoologischen Gesellschaft *Natura Artis Magistra* zu Amsterdam angehören, so habe ich in erster Linie dem Vorstand

* Von diesen Studien erschien der erste Aufsatz, und zwar ohne den hier zuerst angeführten allgemeinen Titel in Englischer Sprache in dem Quarterly Journal of Microsc. Science, vol. XX, p. 431, unter den Namen: „The peripheral nervous system of Palaeo- und Schizonemertini one of the layers of the body-wall."

dieser Gesellschaft meinen Dank auszusprechen für die Liberalität, mit der mir ein Theil des Materiales zur Bearbeitung überlassen wurde, und zweitens dem Herrn Director Dr. G. F. WESTERMAN für die Erlaubniss, einige der erhaltenen Resultate schon jetzt in die Oeffentlichkeit zu schicken.

Genauere Detailbeschreibung des Thieres sowie seiner Anatomie wird in einem demnächst von der Gesellschaft zu veröffentlichenden Bande, die zoologischen Gesammtresultate der dritten und vierten Fahrt enthaltend, erscheinen und ausführlicher mit Tafeln erläutert werden. Hier werde ich mich darauf beschränken, eine kurze Diagnose des Thieres und seiner wichtigsten anatomischen Charaktere vorauszuschicken, möchte dabei aber noch besonders hervorheben, dass das kärglich zugemessene Material der Untersuchung nach vielen Richtungen hin Schranken setzte. Dass ich sie dennoch abgeschlossen, findet eben darin seinen Grund, dass die Aussicht bald mehr zu erlangen eine äusserst unsichere ist.

Pseudonematon nervosum ist ein wurmförmiges, bilateral symmetrisches Thier von 65 mm. Länge und $1^3/_4$ mm. grösstem Dickendurchmesser. In Spiritus conservirt, war es mit der Rückenfläche nach innen spiralig zusammengerollt; vorn dicker, ohne abgesetzten Kopf, aber mit oberflächlicher, halsartiger Einschnürung kurz hinter dem abgestumpften Vorderende: hinten, sich verjüngend und fast spitz endigend (Taf. I, Fig. 1). Auf ungefähr zwei Drittel der Körperlänge (45 mm. hinter dem vorderen Kopfende) findet man an der Bauchseite eine kreisrunde Scheibe (Fig. 3), in deren Mitte man geneigt wäre eine Oeffnung von Darm oder Geschlechtsapparat zu suchen; Querschnitte thun jedoch dar, dass diese Stelle undurchbohrt ist und dass wir es aller Wahrscheinlichkeit nach mit einer Saugscheibe zu thun haben. Die Muskelwand des Körpers ist an dieser scheibenförmigen Stelle auf's Aeusserste verdünnt (Fig. 11). Durch passende Contraction der umliegenden Muskulatur kann, wie ich mir vorstelle, ein Ankleben dieser Scheibe bewirkt werden. Nach vorn bis zum Kopfe, sowie auch eine kurze Strecke nach hinten, schliesst sich an diese Scheibe ein longitudinales, in der ventralen Mittellinie gelegenes, schmales Feld an, welches sich jedoch auf Querschnitten auf bestimmte Beziehungen zwischen Haut und Muskulatur zurückführen lässt und nicht etwa mit der Saugscheibe in engerem Verbande steht. Fasern von der Ringmuskelschicht theilen nämlich an dieser Stelle, indem sie sich unter gegenseitiger Kreuzung zur Haut begeben, die äusseren longitudinalen Muskeln in eine linke und eine rechte Hälfte (Taf. II, Fig. 8 und 9). Am hinteren Körperende, wo das Feld fehlt, ist die äussere longitudinale Muskelschicht auch in der ventralen Medianlinie ununterbrochen (Fig. 10).

Zwei andere longitudinale, wenn auch seichte, Vertiefungen laufen jederseits dorsolateral und grenzen mit ersterwähntem Längsbande auf dem Körper drei

longitudinale Felder ab (Fig. 1). Doch sind diese beiden lateralen Vertiefungen anderer Natur als die ventrale. Die Muskulatur geht unter ihnen durchaus gleichmässig hindurch und wird nicht etwa unterbrochen, wie dies in den Seitenfeldern der Nematoden der Fall. Jedoch ist in dem vorderen Abschnitt des Rumpfes eine Trennung der äusseren Längsmuskelschicht vermittelst longitudinaler, bindegewebiger Septa an den erwähnten Stellen (Taf. II, Fig. 8) wahrzunehmen.

Die innere Beschaffenheit des Thieres ist äusserst einfach. Ein Darmcanal zieht vom vorderen bis zum hinteren Körperende. Mund und After sind endständig. Die zellige Darmwand enthält grosse, einzellige Drüsen, deren Secret in das Darmlumen frei wird. An vielen Stellen liegt die Darmwand unmittelbar dem Hautmuskelschlauch an: ganz vorne, ferner in der Nähe der Saugscheibe, sowie auch längs der dorsalen und ventralen Flächen ist Bindegewebe in grösserer oder geringerer Ausdehnung zwischen beiden ausgespannt. Von einer Leibeshöhle zwischen Darm und Hautmuskelschlauch ist nirgends eine Spur vorhanden. Im Darm — und auch in dem Oesophagus — befinden sich zahlreiche Infusorien: ob als verschluckte Nahrung, ob als Parasiten, muss vorläufig dahin gestellt bleiben.

Von Geschlechts- oder Excretions-Organen habe ich an den Schnittserien durch die verschiedensten Körperregionen des einen mir zu Gebote stehenden Exemplares bisjetzt nichts gefunden.

Eine sehr dünne Hautschicht liegt dem recht mächtigen Hautmuskelschlauche auf, die Basalmembran ist im Verhältniss dick, streifig und faserig, die daraufliegende Epithelzellenschicht war an vielen Stellen verloren gegangen. Diese äussere Schicht scheint kaum mehr als einzellig zu sein; wenigstens fand ich auch an den besser erhaltenen Partieen keine Andeutung von mehr Lagen. In der ventralen Medianlinie ist diese zellige Schicht vielleicht noch am dicksten.

Der Hautmuskelschlauch besteht aus einer dicken äusseren longitudinalen, aus einer mittleren circulären und aus einer inneren, longitudinalen Faserschicht. Weder die longitudinalen noch die Ringmuskelschicht sind überall gleichmässig. Am Rücken ist die longitudinale Muskulatur am allerdicksten, wovon auch wohl die spiralige Zusammenrollung nach der Conservation herrührt. Fig. 8 bis 10 geben einen Ueberblick über das verschiedenartige Verhalten der Muskelschichten.

Aus diesen Abbildungen wird es ersichtlich sein, 1) dass die äussere Längsmuskelschicht von vorn bis hinten fast gar keinen Veränderungen unterliegt, 2) dass die Ringmuskelschicht nach hinten zu lateral mächtiger, aber dorsal dünner wird, 3) dass die innere Längsmuskelschicht im vorderen Rumpfabschnitt eine geschlossene Schicht um den Körper herum bildet, in der Gegend des Saugnapfs bloss noch dorsal und ventral fortbesteht dabei aber dorsal an Mächtig-

*

keit gewonnen hat, um endlich in der äussersten Schwanzspitze auf den blossen dorsalen Abschnitt reducirt zu sein.

Bindegewebe ist zwischen den einzelnen Muskelfasern des Hautmuskelschlauches allerwegen vorhanden; überhaupt erinnern die microscopischen Verhältnisse, wie ich sie im Hautmuskelschlauche antreffe, sehr an diejenigen, welche bei Nemertinen vorhanden sind.

Nicht zu verwechseln mit Bindegewebe irgend einer Art ist endlich eine Schicht, welche nach innen unmittelbar der Ringmuskelschicht anliegt, ein faseriges und zwar verfilztes Aussehen hat und eingestreute Kerne führt. *Diese Schicht repräsentirt das Nervensystem des Thieres:* wir werden gleich zur näheren Begründung dieser Auffassung schreiten und dabei auch andere Wirbellose zum Vergleiche in unsere Betrachtungen hereinziehen müssen.

Zunächst wollen wir die Beschaffenheit dieser Nervenschicht mehr detaillirt in's Auge fassen. *Auf jedem Längs- und Querschnitt findet man sie in gleicher Anordnung und Ausdehnung.* Während sie aber im vorderen Abschnitt des Körpers, sowie auch noch in der Nähe des Bauchsaugnapfs, ebenso wie die ihr auflagernde Muskelschichten eine continuirliche Schicht um den ganzen Körper herum darstellt (Fig. 8 u. 9), ist im hinteren Körperende nur noch der dorsale Abschnitt dieser Schicht erhalten (Fig. 10), dieser aber auch bis in die äusserste Schwanzspitze. An dem vorliegenden, z. Th. in Schnitte zerlegten Exemplare war es mir nicht möglich, mit absoluter Sicherheit zu erfahren, in welcher Weise die vorn cylindrische Nervenschicht sich allmählich nach hinten zu diesem bloss dorsal gelagertem Segmente verschmälert. Es braucht nicht hervorgehoben zu werden, dass der hintere, dorsale Abschnitt in ganz continuirlichem Zusammenhange mit dem entsprechenden vorderen steht, dass aber die Zartheit dieses Plexusgewebes es nicht eben leicht macht — ganz besonders an Schnittserien, die in Canadabalsam aufbewahrt werden — an den Stellen, wo die Schicht nicht röhrenförmig um den ganzen Körper herum abgeschlossen ist, die laterale Ausdehnung genau zu verfolgen.

Vorn im Kopfe ist die Nervenschicht nicht wie im Hinterkörper bloss dorsal vorhanden, sondern, in so weit sich das an Längsschnitten (Fig. 6 u. 7) mit Sicherheit verfolgen lässt, gleich röhrenförmig. In einem der seitlichen Längsschnitte (Fig. 7) finde ich, dass der ventrale Abschnitt der Nervenschicht sich an dieser bestimmten Stelle sogar bis ganz in der Nähe der Kopfspitze ausdehnt. Dennoch weist keinerlei locale Verdickung darauf hin, dass die Ausbildung eines Cerebralganglions bereits angebahnt ist. Nur will es mir scheinen, als ob in dem vorderen dorsalen Abschnitte das Auffinden von Ganglienzellkernen leichter gelingt, als an Schnitten anderer Körpergegenden: dies würde eventuell darauf hinweisen dass die zelligen Elemente hier bereits mehr angehäuft sind. Von

irgendwelchen Sinnesorganen am Kopfe habe ich an meinen Schnittserien nichts entdecken können, somit fehlt einer der kräftigsten Factoren, welche die Ausbildung eines Centralapparates mit bedingen können.

In allen Schnitten durch den Rumpf des Thieres fällt eine Dickendifferenz dieser Nervenschicht an den verschiedenen Körperhälften gleich auf. Am dünnsten ist sie ventral und ventrolateral, am dicksten — namentlich im hinteren Körperabschnitt (Fig. 9) — da, wo zu beiden Seiten die dorsalen in die lateralen Abschnitte übergehen. Von einer eventuellen Abgrenzung dieser dickeren Längsstrecken gegen ihre Umgebung ist aber nirgends die Rede. In der dorsalen Mittellinie ist die Schicht im Vergleiche zu den letzterwähnten Abschnitten wieder etwas dünner, immer aber noch dicker als ventro-medial.

Ueber die histologische Beschaffenheit der Nervenschicht ist folgendes zu bemerken. Schon bei schwachen Vergrösserungen erkennt man dieselbe durch die eigenthümliche, für Nervenfasergeflechte immer wieder charakteristische Resistenzfähigkeit gegen Tinctionsmittel. Sie hebt sich als ein weissliches Intervall zwischen den roth tingirten Muskelschichten deutlich ab und dabei fällt auch zugleich die verschiedene Mächtigkeit der Nervenschicht, welche oben hervorgehoben wurde, in's Auge. Erst stärkere Vergrösserungen lassen den Unterschied zwischen der blassen, fasrigen Hauptmasse und den mit Carmin imbibirten Kernen deutlich hervortreten. Dabei zeigt sich, dass es Kerne zweierlei Art zu unterscheiden giebt: solche, welche eventuell als Bindegewebskerne zu deuten sind, und solche, welche als Ganglienzellkerne bezeichnet werden müssen. Es ist gar nicht leicht ein scharfes Unterscheidungsmerkmal für diese beide hervorzuheben und sicherlich würde die Beschaffenheit der Kerne nie den Durchschlag geben können für die Deutung des betreffenden Gewebes als nervöser Natur. Allerdings scheinen die Bindegewebskerne durchgängig stärker tingirt und auch vielfach kleiner zu sein. Oft sieht man ausserdem um den blassen Nervenzellkern die Umrisse des Zellenleibes schwach angedeutet, meistentheils nur um sehr weniges die Grösse des Kernes übertreffend, sehr selten eine anscheinend multipoläre Form annehmend, deren Ausläufer mit dem verfilzenden Fasergewebe zusammenfliessen (Taf. I, Fig. 4). Die Kerne sind nach der Peripherie, d. h. nach der äusseren und inneren Oberfläche der Nervenschicht zu, häufiger und in diesem Verhalten ist eine Analogie gegeben zu dem so vieler anderer Wirbellosen, wo ebenfalls der centrale Kern der Nervenbahnen faserig, die Peripherie mehr zellig erscheint. Ausserdem finden sich sehr allgemein bei *Pseudonematon* nervenzellige Elemente an der Stelle, wo sich von der Nervenschicht dorsal oder ventral gerichtete, peripherische Ausläuferchen abspalten.

Was nun die fasrige Grundmasse anbetrifft, welche, wie bereits hervorgehoben,

die Hauptmasse der Nervenschicht bildet, so kann hier keine bestimmte Richtung des Faserverlaufes angegeben werden. Es ist eine wirkliche Verfilzung von äusserst feinen, blassen Fäserchen, deren Anordnung sehr an jene der spongiösen Stränge erinnert, welche im Nervengewebe der Plattwürmer eine so grosse Rolle spielen (Fig. 4 u. 5). Auf jedem Schnitte trifft man, ausser Fäserchen, welche sich der Länge nach im Gesichtsfeld verbreiten, die Durchschnitte anderer Fäserchen, welche quer getroffen sind und sich zu einer unverkennbaren Punktsubstanz vereinigen. Das Ganze stimmt völlig überein mit dem Aussehen von Nervengewebe, wie ich es bei vielen Wirbellosen zu untersuchen selbst Gelegenheit hatte, und welches sogar anderen Forschern zu der jetzt in der histologischen Literatur nicht mehr ungewöhnlichen Bezeichnung „faserige Punktsubstanz" Veranlassung gegeben hat, ohne dass diese *Contradictio in terminis* Anstoss erregte.

Nicht unerwähnt dürfen schliesslich die zahlreichen Bindegewebszüge bleiben, welche die Nervenschicht durchsetzen und in jedem Schnitt in grosser Anzahl vorhanden sind. Sie sind dünn, glatt, von Carmin tingirt und setzen die intramusculäre Substanz der äusseren Längs- und Quermuskelschicht mit jener der inneren Längsmuskelschicht und mit dem unter dem Darm vorhandenen Bindegewebe in Verbindung. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass auch feine, contractile Fäserchen zu ihrer Zahl gehören, und es muss zum Schluss hervorgehoben werden, wie ähnliche Verhältnisse bei anderen Plathelminthen (von Lang bei Dendrocoelen, von mir bei niederen Nemertinen) bereits früher an's Licht gefördert wurden. Weder mit diesen durchkreuzenden Faserzügen, noch auch mit dem Bindegewebe, wie es sonst in dem Thierkörper, 1) zwischen den Muskelbündeln, 2) unter der Darmwand, gefunden wird, kann jemals das eigenthümliche Nervengewebe, welches wir eben beschrieben, verwechselt werden. Die Vermuthung, die sich anfangs, hier wie bei den Nemertinen bei mir aufdrängte: dass wir es nämlich hier mit einem eigenthümlich modificirten Bindegewebe zu thun hätten, habe ich später endgültig aufgeben müssen.

Somit haben wir das Nervensystem van *Pseudonematon* kennen gelernt und darin eine Entwickelungsstufe des Nervengewebes erkannt, die sicherlich als eine recht niedrige gelten darf. Eine Nervenschicht von grosser Ausdehnung und nicht unbeträchtlicher Mächtigkeit ist hier vorhanden, ohne dass es jedoch zur Bildung eines bestimmten Nervencentrums gekommen ist, in welchem die zelligen Nervenelemente mehr angehäuft wären. Ebensowenig sind grössere Leitungsbahnen ausgebildet, welche als dorsale, ventrale oder laterale Nervenstämme zu bezeichnen wären.

Das eben geschilderte Verhältniss erinnert recht lebhaft — ganz besonders wenn man die Querschnitte zu vergleichen Gelegenheit hat — an die Beschaffenheit des Nervenplexus bei Palaeo- und Schizonemertinen, wie er ausserhalb des Hautmuskelschlauches bei *Carinella*, demselben eingelagert bei *Cerebratulus*, *Valencinia* u. A vorkommt (cf. Quart. Journ. of microsc. Science vol. XX, p. 431). Auch da fällt das verfilzte Aussehen mit den spärlich eingestreuten zelligen Elemente sogleich in's Auge, *mit dem erheblichen Unterschiede* jedoch, dass bei den Nemertinen bereits longitudinale Hauptleitungsbahnen: die Seitennerven, zur Entwickelung gelangten und damit zu gleicher Zeit die Nervenschicht verhältnissmässig dünner geworden ist. Auch ist es bei den Nemertinen vorn im Kopfe zur Ausbildung einer Gehirnanschwellung innerhalb dieser Nervenschicht gekommen, welche allerdings bei *Carinella* sich als nicht viel mehr denn eine locale Verdickung documentirt, *in welcher das fasrige verfilzte Gewebe sogar noch die Hauptrolle spielt*, indem die Nervenzellen erst bei den höher entwickelten Schizonemertinen und in noch höherem Maasstabe bei den Hoplonemertinen innerhalb des Gehirnes das Uebergewicht über die fasrige Centralmasse gewinnen.

Endlich ist der Rüsselscheidennerv der Nemertinen ein für unsere Betrachtungen nicht unwichtiges Element, da wir hier in gewissem Sinne ein Uebergangsstadium in der Entwickelung eines Längsnerven innerhalb der Nervenschicht vor uns haben. Weniger ausgebildet wie die Seitennerven, in welchen bereits ein centraler Faserkern mit Bindegewebshülle und ein ganglienzelliges Polster unterscheidbar sind, hat der dorsomediane Rüsselscheidennerv noch in viel einfacherer Form den ausgesprochenen Charakter einer localen, longitudinalen Verdickung der Nervenschicht beibehalten. Die merkwürdige — wenn auch z. Th. nur scheinbare — Wanderung des Nervenplexus mit Bezug auf die Körpermuskulatur, welche bei Palaeo- und Schizonemertinen stattfindet und auf die oben hingedeutet wurde, führt bei den Hoplonemertinen zum vollständigen Verlust des Plexus und zu seiner Ersetzung durch zahlreiche, metamere, peripherische Stämmchen. Dieses, sowie die andere Thatsache, dass es bei einigen dieser höher entwickelten Formen (*Drepanophorus*, *Amphiporus*) zur Bildung eines nervösen Plexus im Rüssel kommt, wurde bereits an anderer Stelle eingehender ausgeführt (Quart. Journ. of microsc. Sc. XX, p. 438; Verhandelingen der Kon. Akad. van Wetensch. te Amsterdam, Bd. XX, S. 121). Hier war es mir nur wichtig auf die merkwürdige Uebereinstimmung zwischen der Nervenschicht der Nemertinen einerseits * und von *Pseudonematon* andrerseits hinge-

* Ich möchte hier daran erinnern, dass meine Angaben über das Vorhandensein eines der-

wiesen zu haben und dabei den primitiveren Charakter der bezüglichen Nervenschicht bei letzterer Gattung in's rechte Licht treten zu lassen.

Wie steht es nun mit der Verbreitung ähnlichen, plexusartig angeordneten Nervengewebes bei anderen Invertebraten? Es waren die Untersuchungen O. und R. HERTWIG's, welche zum ersten Male die Aufmerksamkeit auf ein derartiges Vorkommen von Nervengewebe im Körper der Wirbellosen lenkten und zwar in ihren bahnbrechenden Arbeiten über die Actinien, über das Nervensystem der Medusen, sowie auch in ihren Studien über die Ctenophoren und Chaetognathen. Bei den Actinien bezeugen sowohl eine ektodermale, sich in die Mundscheibe flach ausbreitende Nervenschicht, wie ein entodermaler Plexus, dessen Fibrillen zunächst unter den Drüsenstreifen der Mesenterialfilamente gelegen sind, dass wir hier ein zwar niedriges Stadium eines Nervensystems vor uns haben, daneben aber, dass dieses primitive Stadium eben eine viel bedeutendere Flächenausbreitung erreicht. Aehnliches, wenn auch in beschränkterem Maasstabe, fanden O. und R. HERTWIG bei den Medusen: in der bezüglichen Monographie setzen sie zu gleicher Zeit ihre Hypothese über die phylogenetische Entstehung des Nervensystems aus einander, welche die KLEINENBERG'sche Auffassung von den primitiven Neuromuskelzellen zu ersetzen angewiesen zu sein erscheint. Es ist vielleicht nicht unnütz, diese Hypothese hier in den eignen Worten der Verfasser zu wiederhohlen, da doch die von ihnen vertretene Anschauung unseren weiteren Speculationen zu Grunde liegen wird. Auf S. 170 ihres Werkes: *„das Nervensystem und die Sinnesorgane der Medusen"* wird sie folgendermaassen formulirt:

„Wir nehmen an, dass bei allen Metazoen das Ektoderm, aus welchem das „animale Nervensystem mit seinen motorischen und sensibelen Endapparaten entstanden ist, ursprünglich sich aus einer einfachen Schicht gleichartiger Zellen „zusammengesetzt hat in der Weise, wie dies überall in den frühesten ontogenetischen Stadien der Fall ist. Wir nehmen ferner an, dass diese Zellen wenigstens theilweise schon frühzeitig durch Protoplasmafortsätze unter einander „in Zusammenhang getreten sind und dadurch einen innigeren Zellverband gebildet haben. Aus dem Verband hat sich allmählich — so lautet unsere Hypothese — durch Arbeitstheilung zwischen den mit einander vereinigten Zellen ein Nervensystem primitiver Art entwickelt. Indem ein Theil der Zellen

---

gleichen Nervenplexus bei Nemertinen kurz nachher Bestätigung erfuhren in einem Aufsatze des Herrn DEWOLETZKY aus *Wien* (Zoologischer Anzeiger n⁰. 62), der auch noch andere Arten und Gattungen auf dasselbe Verhältniss hin untersuchte.

„contractile Substanz ausschied, ein anderer auf seiner Oberfläche mit Tastborsten ausgerüstet wurde, ein dritter endlich besonders zahlreiche Verbindungen „einging, haben sich nach und nach im einschichtigen Ektoderm zwischen den „einfachen Epithelzellen die drei Elemente des Neuromuskelsystems, epitheliale „Muskel-, Sinnes- und Ganglienzellen, mehr oder minder gleichzeitig differenzirt. „Hand in Hand damit haben sich ihre Protoplasmaverbindungen durch Bildung „specifischer Nervensubstanz in einem Nervenfibrillenplexus umgewandelt. Als „später das Ektoderm seine einschichtige Beschaffenheit verlor, sind von den „drei genannten Elementen die Ganglienzellen zuerst aus dem Oberflächenepithel „ausgeschieden und sind in die Tiefe gerückt."

Auch BALFOUR hat sich in seiner *Comparative Embryology* (Bd. II, p. 333) dieser Hypothese angeschlossen.

Wie bereits von O. und R. HERTWIG hervorgehoben wurde (l. c. S. 171), versprechen fortgesetzte Untersuchungen, auch über Echinodermen und niedere Würmer noch manchen Fund, welcher zu ihrer weiteren Begründung Neues beitragen mag. Von den HERTWIG's selber wurden solche Untersuchungen schon geliefert in Bezug auf 1) die Ctenophoren, und 2) die Chaetognathen. Bei beiden Gruppen wurde ebenfalls ein nervöser Plexus aufgefunden. Für die Chaetognathen heisst es wörtlich: „Dadurch dass sich (die Nervenfasern) in der mannichfachsten Weise durchkreuzen und durchflechten, entsteht ein über die gesammte „Körperoberfläche ausgebreiteter Nervenplexus, in welchem die oben beschriebenen Nervenstränge die einzelnen Sammelbahnen vorstellen." (O. HERTWIG, die Chaetognathen, S. 34).

Es entspricht der Befund bei den Chaetognathen in mehreren Hinsichten einem bereits viel weiter vorgeschrittenen Stadium, weil 1) der Centralapparat schon deutlich ausgebildet ist und 2) der Plexus mehr den Charakter eines recht engmaschigen Netzwerkes bekommen hat, sich aber viel weniger, als wie es bei den Actinien der Fall war, in der Form einer mächtigeren, aus zahlreichen sich verfilzenden Fasern bestehenden Schicht zeigt.

Die Verhältnisse bei niederen Würmern wurden einerseits durch die Untersuchungen von A. LANG (Untersuchungen zur vergleichenden Anatomie und Histologie des Nervensystems der Plathelminthen; *Mittheilungen aus der zoologischen Station zu Neapel*, Bd. I, S. 459; Bd. II, S. 28), andererseits durch die oben erwähnten Befunde bei Nemertinen und bei *Pseudonematon* näher erkannt. Hieran schliesst zich der Sachverhalt wie er bei den niedersten Mollusken (*Proneomenia*, *Chiton*) vorhanden ist. Für die Echinodermen bieten die Untersuchungen von GREEFF, TEUSCHER und LUDWIG werthvolles Material.

Aus den Resultaten der eben erwähnten Untersuchungen lassen sich, in Verbindung mit den Verhältnissen wie wir sie bei *Pseudonematon* vorgefunden, schon jetzt einige allgemeinere Schlussfolgerungen ziehen, welche ich hier in gedrängter Kürze zusammenfassen möchte.

Zunächst fällt es auf, dass die histologische Beschaffenheit des Nervengewebes eine so bedeutende Uebereinstimmung in all diesen erwähnten niederen Gruppen von Wirbellosen zeigt. O. und R. HERTWIG definiren das Nervengewebe der Actinien folgendermaassen:

„Es stellt eine ansehnliche, zwischen dem ektodermalen Epithel und der Mus-„kulatur gelegene Schicht dar, in welcher sich dünnere und stärkere Fibrillen „nach allen Richtungen durchkreuzen und ein unentwirrbares, dichtes Flecht-„werk bilden. In diesem trifft man kleinere und grössere Ganglienzellen in gros-„ser Zahl an" (O. en R. HERTWIG, die Actinien, S. 184).

LANG (l. c.) sagt für die marinen Dendrocoelen:

„Die Nerven bestehen aus äusserst zarten, mit einander anastomosirenden, sich „mit Tinctionsmitteln beinahe gar nicht färbenden Fasern. Alle enthalten sie „Ganglienzellen und Faserkerne eingelagert. Diese Ganglienzellen variiren sehr „in Grösse und Form . . . . Im Verlauf der Nerven treten überall Muskelfasern „durch dieselben hindurch."

Und für die Trematoden:

„Das Gehirn hat eben ganz und gar, wenigstens histologisch, den Charakter „einer spezifisch und sehr stark entwickelten Quercommissur zwischen den Haupt-„stämmen, welche durch ihren reichen Besatz mit Ganglienzellen sich ebenfalls „als Theil des Centralnervensystems documentiren."

LUDWIG berichtet, dass das Nervensystem der Asteriden in der Form von Fasern erscheint, die man im Durchschnitt in Gestalt runder Pünktchen zu sehen bekommt und die erst auf Längsschnitten ihre fasrige Beschaffenheit kund geben. Durch Zerzupfung überzeugt man sich, dass

„Kerne in den Verlauf der Längsfasern eingeschaltet sind. Die Kerne sind „von einer geringen Protoplasmalage umgeben, welche in die Substanz der Fasern „übergeht. Die Fasern müssen demnach als Ausläufer kleiner Zellen betrachtet „werden. Mitunter zeigen die isolirten Längsfasern an der Stelle der Kernein-„lagerung zugleich eine Theilung . . . . Ich halte die Längsfasern mit den „ihrem Verlauf hier und dort eingeschalteten kleinen Zellen einzig und allein „für die Nervenelemente, betrachte also jene als Nervenfasern, diese als Nerven-„zellen" (LUDWIG, Beiträge zur Anatomie der Asterien, *Zeitschrift f. Wiss. Zool.*, Bd. 30, S. 135).

Die histologische Beschaffenheit des Nervensystems bei *Pseudonematon* kann

aus dem oben geschilderten beurtheilt werden und reiht sich hier unzweifelhaft an. Mit den Nemertinen ist dies ebenso der Fall. Auch da sind — abgesehen von der intramuskulären Nervenschicht mit eingeschlossenen Zellen — die Längsnerven durch den ganzen Körper hindurch mit einem mächtigen Belag von Ganglienzellen versehen.

Bei *Proneomenia* endlich wurde neuerdings festgestellt (*Niederl. Archiv f. Zoologie*, Suppl. Band, 1881) dass Nervenzellen überall in den Längsnervenstämmen neben Nervenfasern vorkommen und dass sogar in den Commissuren Ganglienzellen nicht fehlen.

Der allen gemeinsame Charakter ist die unvollständige Differenzirung von nervenzelligem gegenüber nervenfasrigem Gewebe, eine Differenzirung, welche bei den zu höherer Entwickelung gelangten Gruppen: Anneliden, Arthropoden, Vertebraten viel deutlicher ausgesprochen ist, indem die als Ganglien bezeichneten localen Anschwellungen vorwiegend aus zelligen Elementen bestehen, dagegen die Verbindungs- und Leitungsbahnen ausschliesslich von Fasern aufgebaut werden.

In Betreff der Anordnung der Leitungsbahnen — sowohl Haupt- wie secundärer Nervenstämme — tritt uns, falls wir von den höher differenzirten zu den einfacheren Thiergruppen, oder in derselben Gruppe von den complicirteren zu den primitiver gebauten in der Reihe hinunter steigen, *eine scheinbare Complication* entgegen. Ueberblicken wir die Reihe der niederen Mollusken, und zwar der Gasteropoden, so führen uns die primitiveren Formen (*Haliotis*, *Fissurella*) zu den Amphineuren und zwar zu *Chiton* hinüber. In Bezug auf das Nervensystem ist letztere Gattung jedoch weniger einfach, indem sich nicht nur ein stärkeres Commissurensystem wie bei *Haliotis* und *Fissurella* zwischen den Pedalnerven befindet (v. IHERING, SPENGEL), sondern neuerdings von B. HALLER noch dazu angegeben wurde (Zoologischer Anzeiger, n°. 76), dass dies Commissurensystem bei genauerer Untersuchung wieder durch zahlreiche Querverbindungen zu einem regelmässigen, bei *Chiton* engmaschigsten Netzwerk umgestaltet ist. Von *Chiton* auf verwandte aber noch bedeutend einfacher organisirte Formen zurückgreifend, finden wir, dass zwar bei *Proneomenia* dieses Netzwerk bisjetzt nicht aufgefunden wurde, dass hingegen das Commissurensystem hier anderweitig an Bedeutung gewonnen hat, indem hier nicht nur die Pedalnerven unter einander durch Quercommissuren verbunden sind, sondern ähnliche Commissuren auch zwischen den Lateral- und Pedalnerven derselben Körperseite angetroffen werden. Wohl werden allerwegen von sämmtlichen Quercommissuren feinere Nervenzweige abgegeben, welche sich eventuell sehr leicht zu einem Netzwerk verbinden können: allein wirkliche distale Verschmelzungen von den

Endzweigen, entweder mit den gegenseitigen oder mit nächstfolgenden Commissuren, wurden bisjetzt nicht mit Sicherheit wahrgenommen. Auch der von SIMROTH (Zur Bewegung unserer Landschnecken etc., *Zeitschr. f. Wissensch. Zoologie*, Bd. 32, p. 304) und SEMPER (Ueber Schneckenaugen vom Wirbelthiertypus, *Archiv f. mikrosk. Anatomie*, XIX, 1877, p. 124 und: Einige Bemerkungen über die Nephropneusten VON IHERING's, *Arbeiten a./d. Zool. Zoot. Instit. zu Würzburg*, Bd. III, 1877) beschriebenen Nervennetze sowohl im Fusse wie auch sogar im Rücken anderer Gasteropoden (*Limax*, *Vaginulus*, *Onchidium* etc.) muss hier gedacht werden.

In ähnlicher Weise haben uns LANG's Untersuchungen in dem Nervensystem der marinen Dendrocoelen einen Zustand kennen gelehrt, welcher augenscheinlich mit seinen äusserst zahlreichen dendritischen Verästelungen und Verflechtungen einem viel weiter vorgerückten Stadium entspricht, wie es in dem soviel einfacheren Bauchnervensystem höherer Würmer gegeben ist, von welchem in regelmässigen Abständen an den Knotenpunkten die peripherischen Stämme abzweigen.

Dieses Netzwerk feinster Nervenfasern bei Plattwürmern steht aber sicherlich auf einer Linie mit dem bei *Chiton* und niederen Mollusken vorhandenen, und wenn wir es uns noch engmaschiger und weiter durch den Körper ausgedehnt vorstellen, und endlich auch diese engeren Maschen von feinsten Nervenfibrillen durchsetzt denken und dabei auch die bereits oben hervorgehobene Beschaffenheit des Nervengewebes im Auge behalten, so haben wir einen Nervenplexus, resp. eine Nervenschicht vor uns, wie sie einerseits noch bei *Pseudonematon* in allereinfachster, bei Nemertinen in bereits zu Centralnervensystem differenzirter Form vorliegen. Von *Pseudonematon* oder *Carinella* zu den Actinien hinüber scheint mir auch der Schritt — wenigstens in Bezug auf das Nervensystem — nicht so gar gross, wie man anfänglich erwarten möchte.

Die wechselnden Beziehungen dieser fibrillären Nervenschicht einerseits zu den Sinneszellen der Haut, andrerseits zu der Körpermuskulatur haben aber modificirend auf ihre Lagerung, ihre Ausdehnung und ihr Fortbestehen eingewirkt.

Sind bei den Actinien die Beziehungen zu den Sinneszellen der Haut zahlreich und direct und durch die schönen histologischen Untersuchungen von O. und R. HERTWIG genau bekannt, so reichen unsere Kenntnisse mit Bezug auf die Nemertinen und *Pseudonematon* vorläufig noch nicht so weit. Bei *Carinella* wo der Plexus in seiner ganzen Ausdehnung ausserhalb der Muskulatur liegt, wurden die erforderlichen Untersuchungen an frischem Material noch nicht angestellt; bei den Schizonemertinen und bei *Pseudonematon* ist die

Nervenschicht aber bereits von einer so mächtigen — wenn auch, so weit untersucht, epithelialen * — Muskelschicht überdeckt, dass es auch nachher den Histologen wohl schwer fallen wird, den directen Zusammenhang mit eventuellen Sinneszellen der Haut nachzuweisen. Andererseits scheint hier gerade *diese starke Entwickelung des mächtigen* — aber übrigens sehr uniform gebauten — *Hautmuskelschlauches das Fortbestehen der Nervenschicht bedingt zu haben*, wenn es auch bei den Schizonemertinen innerhalb derselben zu einer stärkeren Ausbildung von Gehirn und Seitennerven gekommen ist.

Bei *Pseudonematon*, wo doch sicherlich noch ein viel einfacherer Bau vorliegt, wo keinerlei Sinnesorgane gefunden wurden, wo der complicirte Apparat des Rüssels fehlt, wo der Darm schnurgrad, ohne Divertikel und ohne irgendwelche Modificationen durch den Körper hindurch zieht, stelle ich mir vor, dass die Function der Nervenschicht ebenfalls in erster Linie auf die Versorgung dieser mächtigen, sie allerwegs umgebenden Muskelmasse, angewiesen ist. Wie dieser Muskelschlauch äusserst gleichartig ist, so bleibt auch die Gestaltung der Nervenschicht sich selber überall gleich, und wo es am vorderen Körperende weder zur Bildung von Mundwerkzeugen, noch von Sinnesorganen irgend einer Art gekommen ist, fällt auch die Nothwendigkeit für die Entstehung einer localen Verdickung, einer primitiven Gehirnanschwellung, völlig weg.

Die erwähnten, auf die Entstehung eines primitiven Centralorganes Einfluss ausübenden Verhältnisse sind nun bei den Nemertinen in verschiedenem Grade gegeben, und zwar finden wir den wirklichen Standpunkt der Gehirnentwickelung genau an diesen Grad der Ausbildung verknüpft: die niedrigst organisirte Nemertinengattung *Carinella* hat auch das allereinfachste Gehirn: eine blosse Verdickung im Nervenplexus.

Schreitet nun bei anderen Thiergruppen — und die grösste Mehrzahl dieser Zwischenstufen entbehrt sicherlich der noch jetzt lebenden Vertreter — die

---

* Barrois hat dargethan (Recherches sur l' Embryologie des Némertes), dass der ganze Hautmuskelschlauch der Nemertinen aus ursprünglich ektodermalen Einstülpungen hervorgeht. Aus einer brieflichen Mittheilung dieses Forschers (Aug. 1880) entlehne ich, mit Bezug auf die Entwickelung einer Schizonemertine (*Lineus obscurus*) folgendes: »Je considère pour ma part comme absolument certain, que toute la couche musculaire de la peau (le Hautmuskelschlauch), y compris la couche longitudinale externe, la couche annulaire et la longitudinale interne, se développe aux dépens de l'exoderme."

Falls es sich also hier nur um eine gegenseitige Lageveränderung sämmtlich ektodermaler Gebilde handelt, so ist Aussicht, das scheinbare Einsinken der Nervenschicht in den Hautmuskelschlauch, resp. ihr Umwachsen werden durch letztgenannten, in weniger gezwungener Weise, als dies anfänglich scheinen möchte, zu erklären.

Entwickelung langsam vorwärts, so denke ich mir, dass erstens die Ausbildung der Sinnesorgane bestimmte Leitungsbahnen in dieser Nervenschicht als kürzeste Wege zum Centralapparat vorgezeichnet hat und dass eine solche Leitungsbahn sich durch Vererbung allmählich zu Sinnesnerven ausbildete. Auch für andere Organsysteme muss die Verbindung mittelst fester Nervenbahnen unbedingt vortheilhaft gewesen sein und wird Hand in Hand mit grösserer Spezialisirung und Differenzirung dieser Organsysteme, der Muskulatur u. s. w. zu Stande gekommen zu sein. Die allmähliche Ausbildung von Metameren muss hier ebenfalls grossen umgestaltenden Einfluss ausüben *.

Immermehr wird also die Vermuthung bestätigt — und *Pseudonematon* liefert hier meiner Ansicht nach einen äusserst wichtigen Baustein — dass die Plathelminthen eine Fundgrube darstellen von Thierformen worin primitive Verhältnisse fortbestehen, die für das richtigere Verständniss und eventuell für die annähernde Beantwortung von morphologischen und phylogenetischen Fragen, welche sich beim Studium von höheren Classen erheben, von grossem Interesse sind.

Suchen sowohl GEGENBAUR wie BALFOUR die Entstehung eines Bauch- sowie die eines Rückenmarks aus ursprünglich indifferenten, lateralen Nervenstämme wahrscheinlich zu machen, so haben die Untersuchungen der letzten Jahren gelehrt, dass wirklich unter den Plattwürmern (Nemertinen) lebende Beispiele gefunden werden die einen solchen Vorgang versinnlichen möchten (*Drepanophorus*, *Langia*, cf. Verh. v. d. Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, dl. XX). Das Auffinden einer continuirlichen Nervenschicht, welche einerseits eng anknüpft an die Form worin das Nervensystem bei den niedersten Wirbellosen (Actinien) vorliegt, andererseits als der unverkennbare Mutterboden für die Entstehung von dergleicher Längsstämmen sich darthut, und in *Pseudonematon* vielleicht wohl in allereinfachster Form auftritt, macht eine dergleichen wechselnde Lagerung gewiss leichter verständlich. Auch werden dadurch die mit vier Längsstämmen versehenen Formen (Amphineuren) in morphologische Beziehung gebracht zu jenen anderen, wo deren nur zwei vorhanden sind. Haben letztere durch Weiterdifferenzirung einerseits die gegliederten Wirbel-

* Dass andererseits in dieser Richtung bedeutende Umgestaltungen stattfinden können, ohne dass noch grössere, damit zusammengehende Umwandlungen der Thierclasse als nothwendig zu postuliren wären, beweisen eben die Hoplonemertinen, wo, wie bereits oben erinnert wurde, der Plexus verschwunden und eine metamere Abgabe von peripherischen Seitenstämmchen an die Stelle getreten ist. Hier liegen eben sowohl Gehirn wie Längsnerven *innerhalb des Hautmuskelschlauchs.*

losen (durch Annäherung, event. Verschmelzung der lateralen Nervenstämme an der Bauchseite) andererseits die Urvertebraten (durch den nämlichen Vorgang, der sich aber an der dorsalen Körperseite abspielte) aus sich hervorgehen lassen, so müssen erstere dagegen als Stammformen betrachtet werden, woraus sich u. A. auch die Mollusken entwickelt haben. Die Weiterdifferenzirungen in allen diesen Richtungen finden wir thatsächlich von einer immer fortschreitenden Reduction des schichtweise, resp. plexusartig angeordneten Nervengewebes begleitet, eine Reduction resp. Umgestaltung für welche die netzartig anastomosirende Ausbreitung des Nervensystems bei Trematoden, Dendrocoelen, Amphineuren und Gasteropoden eine bedeutungsvolle Zwischenstufe bildet.

Dass es eben mit der wichtigste Theil des thierischen Organismus: das Nervensystem ist, welches uns in diesen hypothetischen Speculationen den Weg vorgezeichnet, scheint mir diesen Anschauungen einen festeren Boden zu verleihen, als wenn es sich um Uebereinstimmung und graduelle Verknüpfungsstadien weniger wichtiger Organsysteme handelte.

So sind wir dann am Schluss der Betrachtungen angelangt, welche auszuführen Zweck dieses Aufsatzes war. Es bleibt noch eine davon abliegende Frage zur Beantwortung offen, die Frage nl. wo nun eigentlich im zoologischen System die Gattung *Pseudonematon* hingehört?

Indem ich mir ein reiferes Urtheil über diese Frage vorbehalte bis zu der Publication des von der Gesellschaft *Natura Artis Magistra* beabsichtigten Bandes, wo auch der sonstige anatomische Bau des Thieres einer ausführlicheren Behandlung unterzogen werden wird, möchte ich nur folgendes in's Gedächtniss zurückrufen:

1) Bloss in der äusseren Gestaltung sieht das Thier — und auch dann nur bei oberflächlicher Betrachtung — einer Nematode ähnlich.

2) Die innere Beschaffenheit erinnert an jene der Plathelminthen.

3) Ob die Haut flimmerend ist, kann nicht mit Sicherheit festgestellt werden: mir kommt es nach sorgfältigem Durchmustern der Praeparate unwahrscheinlich vor.

4) Unter den Plathelminthen ist keine Ordnung, wo es ohne Zwang untergebracht werden kann: auf dieses einzige Exemplar jedoch bereits eine neue Ordnung zu gründen, scheint mir durchaus verfehlt. Besser wäre es, die Gattung als solche vorläufig als Anhang zu den Plathelminthen zu bringen, bis auch das Vorfinden von Exemplaren in anderen Altersstadien und in geschlechtsreifem Zustande ein sichereres Urtheil gestatten wird. Dass wir es hier mit einem rückgebildeten, parasitischen Thiere zu thun haben, dünkt mir unwahr-

scheinlich. Es wurde frei lebend angetroffen und ausserdem weist die stark entwickelte Muskulatur darauf hin, dass das Thier zu kräftigen und raschen Bewegungen befähigt sein muss, durch welche es den Ort seiner zeitweiligen Anheftung noch Belieben zu wechseln vermag.

Leiden, 21 October 1881.

NACHSCHRIFT.

Gleichzeitig mit der letzten Correctur dieses Aufsatzes erhalte ich das 1. und 2. Heft des 3. Bandes der *Mittheilungen aus der zoologischen Station zu Neapel*, worin die äusserst wichtigen Untersuchungen LANG's über das Nervensystem der Plathelminthen zum Abschluss gebracht werden. So sehr ich es bedauere, dass es mir nicht möglich war, die hervorragendsten Resultate dieser Arbeit (sowie der in demselben Hefte enthaltenen über *Gunda segmentata*) bereits an der geeigneten Stelle im Texte anzuführen, so freue ich mich doch wenigstens hier von den aus diesen Untersuchungen gewonnenen neuen Beispielen einer sehr complicirten plexusartigen Anordnung des Nervengewebes in dieser niederen Wurmabtheilung Notiz nehmen zu können.

Dass die Anordnung des Nervensystems bei *Gunda segmentata* eine so äusserst regelmässige ist, spricht gewiss für den hohen Differenzirungsgrad, zu welchem diese Form bereits gelangt ist, und die Annäherungspunkten zu den Hirudineen, welche LANG in sinnreichster Weise hervorhebt, eröffnen in dieser Richtung ganz neue Perspectiven.

Hier ist indessen ein Punkt, hinsichtlich dessen ich mich durch LANG's Ausführungen nicht für überzeugt erklären kann. Dies betrifft die Art und Weise in welcher er sich aus dem ganz ventral gelagerten Nervensystem der Tricladen dasjenige der Hirudineen entstanden denkt, nl. durch ein Vorwärtswandern des Mundes, wobei es schliesslich zu einem Durchbruch des Schlundes zwischen der oberen sensoriellen und der unteren motorischen Commissur des Gehirnes komme. Diese Anschauungsweise hat manches verführerische; doch scheint es mir, dass gerade die von LANG gegebene Anwendung derselben, insbesondere die Zuertheilung einer so activen Rolle an den Darmcanal gegenüber der grossen

Passivität des Nervensystems — einer Passivität, die in derselben Richtung noch prägnanter zum Ausdruck kommen würde, wenn schliesslich bei dem Uebergang von Ringelwürmern zu Urvertebraten nach der DOHRN'schen Auffassung diese Durchbrechung des Gehirnes wieder eben so leicht aufgegeben und durch einen neuen Durchbruch an der gegenüberliegenden Körperseite ersetzt wird — zu der Vermuthung führt, dass dem ersten von LANG selbst hervorgehobenen Einwande, vielleicht mehr Gewicht beizulegen sein dürfte, als LANG selbst zu thun geneigt scheint.

Bei diesen Betrachtungen ist doch wohl auch das Verhalten des Nervensystems bei niederen Mollusken im Auge zu behalten, wo geradeso Anklänge an das Strickleiternervensystem gefunden werden und wo die Homologa von Supra- und Infra-Oesophagealganglien bereits vorhanden sind und zwar in klarer darliegender Form als bei *Gunda*, ohne dass die von LANG für die Hirudineen aufgestellte Erklärung hier irgendwie zutreffend wäre. Der Unterschied, zwischen der oberen sensoriellen und der unteren motorischen Commissur ist hier lange nicht so scharf ausgesprochen, die Sinnesorgane sind am Kopf nicht zur Entwickelung gelangt, und nichtdestoweniger existirt ein Schlundring.

Die Reduction des Commissurensystems, wie sie mit dem fortschreitenden Differenzirungsgrad Hand in Hand geht, wird auch von LANG bei *Gunda* speciell hervorgehoben.

Dass die Nervenschicht der Palaeo- und Schizonemertinen nur indirect mit dem mesenchymatösen Nervennetze der Poly- und Tricladen übereinstimmt (cf. LANG, l. c. S. 95), wird wol durch die oben in der Anmerkung (S. 13) citirten Untersuchungen von Barrois klargelegt, nach denen auch die noch unterhalb der Nervenschicht sich befindenden Muskelschichten vom Ektoderm abstammen.

Ob nämliches auch für *Pseudonematon* gilt, wird erst nach eventuellen späteren ontogenetischen Untersuchungen zu entscheiden sein.

25. XII. 81.

ERKLÆRUNG DER FIGUREN.

NB. Die Figuren 4 und 5 sind bei der Uebertragung auf den Stein etwas weniger glücklich ausgefallen. Es hat sich dies indessen erst bei der Correctur der Tafelerklärung herausgestellt, so dass Zeit und Gelegenheit zur Verbesserung nicht mehr gegeben waren. Auch glaubte ich um so eher davon absehen zu können, als ich bessere Figuren in der auf S. 2 erwähnten, von der Gesellschaft Natura Artis Magistra in Aussicht genommenen Publication, geben zu können hoffe.

Fig. 1. *Pseudonematon nervosum*, nach dem Spiritusexemplar gezeichnet. Siebenmal vergrössert.

Die seichte Vertiefung an der äussersten Schwanzspitze ist nicht der Anus; dieser liegt terminal. Die Rückenfläche ist in Folge der spiraligen Windung gerunzelt. Das ventromediane Längsfeld ist nur in der Nähe des Saugnapfes, die lateralen Längsrinnen sind in grösserer Ausdehnung sichtbar.

Fig. 2. Seitliche Ansicht des vorderen Kopfendes, mit halsartiger Einschnürung.

Fig. 3. Der Saugnapf und seine Umgebung, stärker vergrössert.

Fig. 4. Ein Theil der Nervenschicht ganz vorn im Körper bei starker Vergrösserung (Längsschnitt).

cm. die Ringmuskulatur.
lm. die innere Längsmuskelschicht.
N. die Nervenschicht, mit eingelagerten Kernen und quer sie durchsetzenden bindegewebigen Faserbündeln.
In diesem Praeparat ist eine anscheinend multipolare Ganglienzelle vorhanden.

Fig. 5. Dieselbe aus dem hinteren Körperende (Querschnitt).
Buchstaben wie in Fig. 4.

Fig. 6. Längsschnitt durch den Kopf um die Ausdehnung der Nervenschicht nach vorne zu bezeichnen. Umrisse mit der Camera gezeichnet.

o. Mund.
s. Oesophagus.
I. Darm.
M. Hautmuskelschlauch.
N. Nervenschicht.

Fig. 7. Längsschnitt ebendaher, der vorigen parallel, aber mehr auf die Seite hin, um die ventrale Ausdehnung der Nervenschicht zu verdeutlichen.

s. Oesophagus.
M. Hautmuskelschlauch.
N. Nervenschicht.

Fig. 8—11. Der Hautmuskelschlauch in seiner verschiedenen Gestaltung. Mit der Camera gezeichnet. Vergrösserung $\frac{61}{1}$.

Fig. 8. Querschnitt kurz hinter dem Kopfe. Nur der Hautmuskelschlauch und die Nervenschicht sind fertig gezeichnet: die Oberhaut sowie der Darmwand und das diesem unterlagernde Bindegewebe sind bloss angedeutet.

M. die äussere Längsmuskelschicht.
m. die innere Längsmuskelschicht. Letztere ist um den ganzen Körper herum vorhanden.
C M. Ringmuskelschicht.
N. Nervenschicht.
I. Darmhöhle.

Fig. 9. Querschnitt kurz hinter dem ventralen Saugnapf.
Von der inneren Längsmuskelschicht sind nur die starken dorsalen und die schwachen ventralen Abschnitte vorhanden. Lateral liegt die Nervenschicht unmittelbar unter dem subintestinalen Bindegewebe.
Buchstaben wie in Fig. 8.

Fig. 10. Querschnitt kurz vor der äussersten Schwanzspitze. Nervenschicht und innere Längsmuskelschicht nur noch an der Rückenseite vorhanden. Es werden in der medianen Bauchlinie keine sich kreuzenden Fasern von der Ringmuskelschicht mehr in die Haut abgegeben.
Buchstaben wie in Fig. 8.

Fig. 11. Medianer Längsschnitt durch den Körper in der Gegend des Saugnapfes. Mit der Camera gezeichnet.
Buchstaben wie in Fig. 8.

Fig: 4.



Fig: 5.



Fig. 1.



Fig: 3.



Fig 2.



Fig 6.

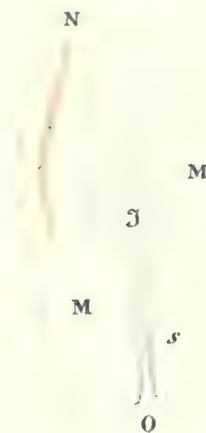


Fig. 7.



Lith Gebr Reimeringer. Amst.

Fig: 9.

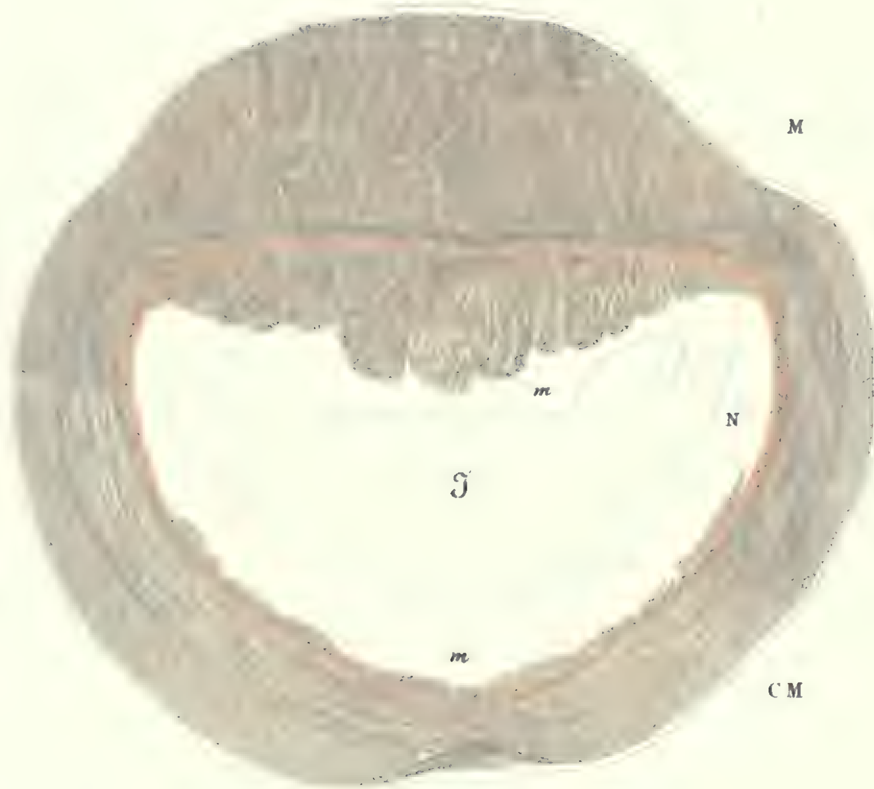


Fig: 10.

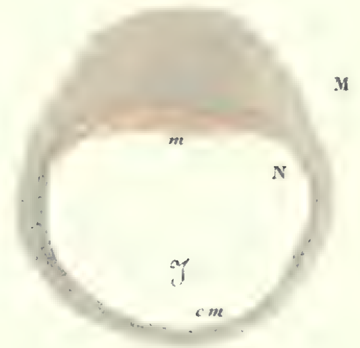
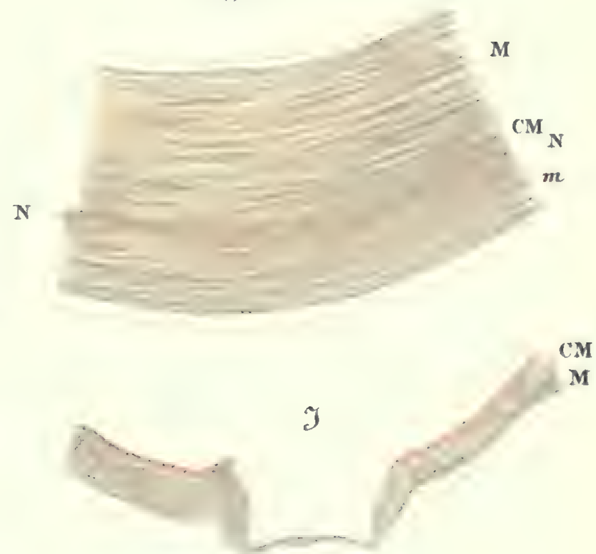


Fig: 8.



Fig: 11.



Lith. Gebr. Reimeringer, Amst:

INHALT.

KAPITEL IV.

Die Baccarumgalle.

KAPITEL V.

Die Taschenbergi- und die Foliigalle.

KAPITEL VI.

Die Megapteragalle.

KAPITEL VII.

Die Kollarigalle.

KAPITEL VIII.

Die Orthospinaegalle.

BEOBACHTUNGEN

ÜBER

DIE ERSTEN ENTWICKLUNGSPHASEN

EINIGER

CYNIPIDENGALLEN.

VON

Dr. M. W. BEYERINCK.

EINLEITUNG.

Die Erscheinung der Gallbildung hat eine ausgedehnte Verbreitung in der organischen Natur. Dass man nichtsdestoweniger in jeder natürlichen Pflanzengruppe gewöhnlich nur wenige Arten findet, welche Gallen hervorbringen, erklärt sich anscheinend daraus, dass die Umstände, welche zur Entstehung solcher Bildungen Veranlassung geben konnten, in der Entwicklungsgeschichte der Pflanzenwelt relativ selten gewesen sein müssen. Man darf in Allgemeinen aber in der Fähigkeit zur Gallbildung wohl nicht eine specifische Eigenschaft bestimmter Organismen erblicken, sondern Vieles weist darauf hin, dass jede beliebige Pflanze in Folge ihrer inneren Organisation, unter geeigneten Verhältnissen fähig sein möchte, Gallen hervor zu bringen. Selbst die Corallen im Meere tragen einige Gallen, welche gewissen Crustaceën zur Wohnung, nicht aber, wie die pflanzlichen Gallen ihren Bewohnern zugleich zur Nahrung dienen.

Schon auf Grund der Wahrscheinlichkeit seiner Allgemeinheit beansprucht

der Process der Gallbildung ein höheres wissenschaftliches Interesse, als demselben gewöhnlich gezollt wird; mehr aber noch als eine besondere, der experimentellen Forschung zugängliche Aeusserung der unbekannten, allgemeinen Wachsthumsgesetze. Meine Ansicht über die Bedeutung der Gallen in dieser Beziehung werde ich unten mittheilen, doch muss ich Einiges über die Ursache der Gallbildung vorangehen lassen.

Zahlreiche Schriftsteller, sowohl Zoölogen wie Botaniker, an deren Spitze MALPIGHI und DE RÉAUMUR stehen, haben darüber ihre Meinung geäussert. Dessen ungeachtet fehlt eine eigentliche wissenschaftliche Theorie über diesen Process bis auf den heutigen Augenblick; doch haben HOFMEISTER und DARWIN unabhängig von einander sich so ganz unzweideutig und klar in genau demselben Sinne darüber ausgesprochen, dass es angemessen erscheint, von ihrer Ansicht als Richtschnur für weitere Untersuchungen auszugehen. Besonders wichtig scheinen mir in dieser Beziehung die Aeusserungen DARWIN's zu sein, da aus dem eingehenden Studium seiner Bücher hervorgeht, dass er dem Gallenwachsthum vieles Nachdenken gewidmet hat.

Bei der Discussion über die mögliche Abstammung der Thiere und Pflanzen von einer einzigen gemeinsamen Urform äussert DARWIN sich in folgendem Sinne *: „Nervertheless all living things have much in common, — in their chemical composition, their cellular structure, their laws of growth, and their liability to injurious influences. We see this even in so trifling a fact as that the same poison often similarly affects plants and animals, or that the poison secreted by the gallfly produces monstrous growths on the wild rose or oak tree."

In DARWIN's Schlussbemerkungen über die Variation der Hausthiere und Culturpflanzen finden wir eine ähnliche Aussage †: „We have reason to suspect that an habitual excess of highly nutritious food, or an excess relatively to the wear and tear of the organisation is a powerful exciting cause of variability. When we see the symmetrical and complex outgrowth's caused by a minute atom of the poison of a gallinsect we may believe that slight changes in the chemical nature of the sap or blood would lead to extraordinary modifications of structure."

Auch bei Gelegenheit der Besprechung des directen unvermittelten Einflusses

---

* *On the Origin of Species*, 5th Ed. 1869, pag. 572.

† *Variation of Animals and Plants under Domestication*, 1st Ed. 1868, T. II, pag. 418.

äusserer Lebensbedingungen auf die Variation finden wir bei DARWIN eine gleiche Aussage *: „As the poisonous secretion of insects belonging to various orders has the special power of affecting the growth of various plants; — as a slight difference in the nature of the poison suffices to produce widely different results; — and lastly as we know that the chemical compounds secreted by plants are eminently liable to be modified by changed conditions of life, we may believe it possible that various parts of a plant might be modified through the agency of its own altered secretions." Eine andere Stelle lautet †: „Such facts as the complex and extraordinary outgrowths which invariably follow from the insertion of a minute drop of poison by a gallproducing insect, show us what singular modifications might result in the case of plants from a chemical change in the nature of the sap".

Zunächst interessirt uns in diesen Citaten, DARWIN'S feste Ueberzeugung, dass die Gallen durch einen vom Gallenthiere abgesonderten Stoff hervorgerufen werden. Ich muss an dieser Stelle jedoch bemerken, dass DARWIN, welcher sich besonders auf LACAZE DUTHIER's Angaben § stützt, von der Meinung ausgeht, dass die Substanz welche die Gallbildung verursachen soll, von der Mutterwespe abgesondert werde, während ich auf den folgenden Seiten den Beweis beibringen werde, dass die Mutterwespe an sich, keinen directen Antheil an der Gallbildung hat, sondern dass diese nur von der Larve ausgeht. Offenbar kann aber diese letztere Thatsache auf die prinzipielle Auffassung des Processes, welche hier allein in Betracht kommt, keinen Einfluss ausüben.

Hören wir nun die Worte des anderen grossen Naturforschers, WILHELM HOFMEISTER's ** über die Ursache der Gallbildung: „Gallwespen, die einander äuszerst ähnlich sind, welche der nämlichen Gattung angehörend nur durch unbedeutende Modificationen der Färbung und Behaarung sich unterscheiden, verursachen die Entwickelung sehr verschieden beschaffener Gallen. Die mechanische Reizung, welche das Thier auf seine Wohnstätte übt, ist es nicht allein, welche die Bildung der Galle hervorbringt . . . Die Anregung zu eigenartiger Entwickelung, welche von den Gallen hervorrufenden Thieren ausgeht, erstreckt sich in vielen Fällen bis auf Gewebspartieen, die von dem Thiere mehrere Millimeter

* *Domestication*, II, pag. 384. *Afstamming van den Mensch*, 1e Uitg., 1871, I, pag. 186.

† *Origin of Species*, pag. 9.

§ Im Schlusskapitel dieser Abhandlung findet sich die betreffende Stelle LACAZE DUTHIER's.

** *Allgemeine Morphologie der Gewächse*, 1868, pag. 634.

weit entfernt sind. Dieses alles führt zum Schlusse, dasz flüssige, die Zellwände auf erhebliche Distanzen durchdringende Ausscheidungen der Thiere, auf die Bildung der Gallen wesentlich einwirken".

Auch viele andere Schriftsteller vertreten mit voller Ueberzeugung diese Auffassung. So sagt um nur noch ein einziges weiteres Beispiel vorzuführen, Sir JAMES PAGET *: „In these galls and other similar diseases in plants, we have it seems, hundreds of specific diseases, due to as many hundreds of specific morbid poisons; for the most reasonable, if not the only reasonable theory of these diseases is, that each insect infects or inoculates the leaf or other structure of the chosen plant with a poison peculiar to itself."

Nach allem diesem erachte ich es als meine erste Aufgabe, diese Ansicht DARWIN'S, HOFMEISTER'S, PAGET'S und vieler anderer Autoren wissenschaftlich zu begründen. Die vorliegende Abhandlung ist dazu ein erster Anfang; eine endgültige Entscheidung des Problems beansprucht sie nicht zu geben, dazu muss noch viel mehr und wo möglich genaueres Beobachtungsmaterial zusammengebracht werden. Ich muss aber bemerken, dass Alles was ich bisher über Gallbildung gesehen, die Gedanken der genannten Männer nur zu bestätigen scheint.

Eine weitere Aufgabe, auf welche ich schon im Anfang dieser Zeilen hinwies, und deren Lösung mir aussersordentlich wichtig zu sein scheint, ist die Feststellung der Beziehung des Gallenwachtsthums zur normalen Entwicklung der Nährpflanze. Es werden sich aus einer genauen Kenntniss dieses Zusammenhanges, sehr wahrscheinlich neue Gesichtspunkte zur Beurtheilung der allgemeinen Wachtsthumsgesetze ergeben.

Zunächst muss ich auf den folgenden Umstand hinweisen, welcher dem Gallenwachsthum grosses Interesse verleiht, nämlich auf die Identität zahlreicher Merkmale der Gallen, mit denjenigen der Pflanze von welcher sie hervor gebracht werden. Es lässt sich in dieser Hinsicht zeigen, dass die *Mehrzahl der Eigenschaften der Gallen* sich schon sicher in den normalen Organen der Nährpflanze vorfinden, sodass diese Charactere also, welche unter den gewöhnlichen Verhältnissen, an der Stelle wo die Galle entsteht, nicht zur weiteren Ausbildung gelangt sein würden, unter dem neuen Einflusse in rege Entwicklung gerathen.

Diese grosse Uebereinstimmung der Gallen mit den normalen Organen ihrer

---

* *An Address on Elemental Pathology delivered in the pathological section of the British Medical Association at the annual meeting in Cambridge August* 1880. London 1880.

Nährpflanze besteht nicht nur in der Entwicklungsgeschichte, welche, wie es aus der mikroskopischen Untersuchung hervorgeht für beide in der Hauptsache identisch ist, sondern selbst in den inneren mit der eigentlichen Natur dieser verschiedenen Bildungen zusammenhangenden Eigenschaften wie ich dieses später, an anderer Stelle, ausführlich zu begründen hoffe.

Es entsteht aus dieser Betrachtung die wichtige Frage nach der Herkunft der Kräfte, welche diejenigen latenten Eigenschaften der Nährpflanze, die in den Gallen zur Ausbildung gelangt sind, — welche aber unter normalen Umständen in dem Muttergewebe der Galle in Ruhe geblieben sein würden, — wohl zuerst zur abnormen Thätigkeit angeregt haben mögen. Wie man sieht ist diese Frage nur ein besonderer Fall des allgemeinen Problemes von der Grundursache der normalen Organbildung am normalen Organismus oder der individuellen Metamorphose, wo es sich ebenfalls nur um Ausbildung latenter Eigenschaften des wachsenden Körpers handeln kann. Liesse sich darthun, dass die Gallwirkung an sich, hier als primär wirksame Ursache aufträte, so hätten wir auf dem dunkelen Gebiete der normalen Organbildung eine sichere Anweisung errungen. Jedenfalls verspricht die tiefere Forschung in dieser Beziehung wichtige Aufschlüsse.

Ich habe hervorgehoben dass eine Galle die *Mehrzahl* ihrer Eigenschaften mit der Nährpflanze theilt; ob dieses aber für *alle* ihre Merkmale ohne Ausnahme gilt, kann angezweifelt werden. Wäre letzteres in der That der Fall, so müsste man die der Galle eigenthümliche anatomische Struktur und Form, so wie alle ihre übrigen Eigenschaften ohne Ausnahme, durch Combination gewisser Merkmale der Mutterpflanze erklären. Wenn sich aber in den Gallen einzelne vollständig neue, der Organisation der Nährpflanze fehlende Eigenschaften auffinden liessen, welche auf keine Combination anderer zurückzuführen wären, so würde man bei der Gallbildung auf locale Variation schliessen müssen. Dieses würde aber offenbar ein ganz neues, und möglicherweise das wichtigste Moment zur Beurtheilung des Gallenwuchses abgeben.

Dass die Möglichkeit der Existenz einer solchen Variation auf Grund unserer gegenwärtigen Kenntnisse nicht zu widerlegen ist, halte ich für sicher. DARWIN'S Meinung über diese Angelegenheit, geht schon ziemlich deutlich aus den oben gegebenen Citaten hervor, klarer noch spricht er sich an folgender Stelle aus, welche seiner Bestreitung des Vervollkomnungsprinzips LAMARCK'S und NÄGELI'S entlehnt ist *: „When we remember such cases as the formation of the more

---

* *On the Origin of Species*, 5th Ed. pag. 151.

complex galls, and certain monstrosities which cannot be accounted for by reversion, cohesion &c., and sudden strongly marked deviations of structure, such as the appearance of a mossrose on a common rose, we must admit that the organisation of the individual is capable through its own laws of growth, under certain conditions of undergoing great modifications independently of the gradual accumulation of slight inherited modifications."

Noch deutlicher ist folgender Satz, welcher in DARWIN's vorläufiger Hypothese der Pangenesis vorkommt *, und zwar an derjenigen Stelle wo er verschiedene, durch diese Hypothese schwer zu erklärende Erscheinungen u. a. die Gallbildung, betrachtet: „However this may be it appears probable, that all external agencies, such as changed nutrition increased use or disuse &c., which induced any permanent modification in a structure, would at the same time or previously act on the cells, nuclei, germinal or formative matter, from which the structures in question are developed, and consequently would act on the gemmules or cast off atoms." Das heisst also mit anderen Worten, dass die genannteu Umstände eine bleibende Variation im Gewebe verursachen würden.

Eine ausführliche Darstellung der Gründe welche für und wider diese Ansicht anzuführen sind, muss ich hier unterlassen, da es mir in dieser Einleitung nur darauf ankommt, im Allgemeinen anzugeben, auf welche wichtige Probleme, ein gründliches Studium der Gallen, Licht zu verbreiten verspricht.

Ehe aber eine endgültige Entscheidung dieser sehr complizirten Fragen erreicht werden kann, müssen wir eine umfassende Kenntniss von den verschiedenen Modalitäten des Vorganges der Gallbildung besitzen. Dazu müssen aber die zahlreichen Fälle, wobei specifisch verschiedene gallenhervorrufende Organismen wirksam sind, untersucht sein, und zwar sowohl in botanischer wie in zoölogischer Hinsicht. Ueberblicken wir aber die Gallenlitteratur in dieser Beziehung so ergiebt sich bald, dass wir daraus kein übersichtliches Bild von diesem Processe zusammenstellen können. Gewöhnlich haben die Autoren nur Einzelbeobachtungen veröffentlicht. Dabei gingen sie entweder mit Vernachlässigung der zoölogischen Anforderungen ausschliesslich vom botanischen Standpunkt aus; oder es waren die Entomologen welche nur darum die Gallen genauer studirten, weil dieses Studium für die Kenntniss der Biologie der Gallenbewohner nothwendig war.

Daraus muss man erklären, dass die gesammte Gallenlitteratur nicht einmal auf zahlreiche untergeordnete Fragen, welche die Beobachter sich zu wiederholten Malen gestellt haben, eine allgemeine Beantwortung gibt. Solche Fragen sind

* *Domestication*, II, pag. 382.

z. B. die folgenden: „Geht der Gallbildung im Allgemeinen eine Verwundung der pflanzlichen Gewebe voraus, oder geschieht dieses nicht immer? In welcher Beziehung steht im positiven Fall die Wunde zur Entwickelung der Galle? Muss man annehmen dass die Gallenmütter, oder die jungen Thiere zu deren Behufe die Galle entsteht, die Ursache der abnormen Wucherung sind? Können nur wachsende oder auch ausgewachsene Pflanzengewebe Gallen hervorbringen? Kann die Berührung des jungen Pflanzengewebes mit einem fremden Körper an sich, auf die Entstehung der Gallen oder deren Wachsthum Einfluss ausüben oder nicht? Können die anderen mechanischen Einflüsse welche die Gegenwart eines sich bewegenden und sich nährenden Thieres begleiten, eine Erklärung des Vorganges abgeben? Kommen die abnormen Strömungs- und Mischungsverhältnisse der Nahrungssubstanzen des pflanzlichen Gewebes, welche offenbar durch die Gegengenwart des Gallenthieres bedingt werden, bei der Erklärung der Gallbildung in Betracht? Ist jemals ein ruhendes Ei, vor dem Eintritt des ersten Stadiums der Embryobildung Veranlassung zur Entstehung einer Galle? Ist die Ursache der Gallbildung ein momentaner Impuls oder eine länger andauernde Beeinflussung des pflanzlichen Gewebes?"

Zwar lassen sich besonders aus den zahlreichen und wichtigen Angaben von THOMAS und FRANK, welche in ihren Arbeiten sowohl den botanischen wie den entomologischen Verhältnissen Rechnung zu tragen gesucht haben, verschiedene dieser Fragen für kleine Gruppen von gallenbildenden Organismen, oder doch für einzelne zu Phytoptus, Cecidomyia oder Chermes gehörende Arten, mit zureichender Sicherheit lösen. So lange solche Resultate aber, wie es bisher der Fall ist, nicht übersichtlich und von den nöthigen Beweisstücken begleitet zusammengestellt und mit einander verglichen sind, besitzen sie einen nur relativen Werth, da sie, als aus Einzelfällen hervorgehend, anderweitige fehlerhafte Behauptungen, nicht entkräften können.

Dieses ist besonders darum der Fall weil die Entwickelungsvorgänge der complizirteren Gallen z. B. derjenigen der Cynipiden, noch so gut wie vollständig unbekannt sind; die wenigen darüber publizirten Arbeiten sind ganz ungenügend. Es ist aber deutlich dass sich eine allgemeine Theorie erst dann sicher begründen lässt, wenn die verschiedenen Gruppen von Erscheinungen welche sie umfassen soll vollständig erforscht sind; so lange einzelne dieser Gruppen aber unberücksichtigt dastehen, kann man die besser bekannten nicht durch eine Theorie, sondern nur durch eine Hypothese verbinden.

Die eingehende Untersuchung zahlreicher Einzelfälle, welche den verschiedenen Gallgruppen entlehnt sind, und ein genauer Vergleich der Resultate, scheint mir der einzige sichere Weg, um das aller Gallbildung Gemeinsame

von den Einzelheiten zu trennen und so zunächst die Richtigkeit der von DARWIN, HOFMEISTER und PAGET vertretenen Hypothese zu prüfen. In der vorliegenden Abhandelung habe ich damit einen Anfang gemacht, und die von den Cynipiden Aulax hieracii, Teras terminalis, Spathegaster baccarun, Dryophanta folii, Spathegaster taschenbergi, Trigonaspis megaptera, Cynips kollari und Rhodites orthospinae bewohnten Gallen einer genaueren Untersuchung unterworfen. So weit die Schwierigkeit des Gegenstandes es erlaubte, habe ich dabei sowohl die botanischen wie die zoölogischen Verhältnisse ins Auge gefasst. Wie ich hoffe wird man daraus sehen, dass es mir gelungen ist, die Struktur dieser merkwürdigen Bildungen zu grösserer Klarheit zu bringen.

Fortwährend habe ich in diesen Beschreibungen, die nächsten Verwandten obengenannter Gallen mitberücksichtigt. Ueberdies sind meine Untersuchungen über die anders gestalteten Bildungen Andricus inflator, Aphilothrix globuli, Rhodites rosae, Spathegaster aprilinus, Aphilotrix gemmae, Aulax glechomae und Neuroterus ostreus, schon ziemlich weit vorgeschritten, und ich habe die Vorbereitungen getroffen, welche die Cultur im Garten und die genaue Untersuchung anderer Gallbildungen, wie diejenigen der Tenthredineën und der Cecidomyien, erheischen.

Mit Bezug auf die in dieser Abhandlung beschriebenen, obengenannten Cynipidengallen habe ich die auf voriger Seite erörterten, so wie einige andere Fragen, vollständig zur Lösung oder doch der Lösung näher gebracht; die gewonnenen Resultate habe ich im Schlusskapitel zusammengestellt, schon jetzt sei mir jedoch zu bemerken erlaubt, dass ich den Beweis liefern werde, dass die jugendliche Cynipidenlarve in den vorliegenden Fällen die alleinige Ursache der Gallbildung ist; sie übt ihre Wirkung schon aus, während sie noch vollständig in ihrer Eischale beschlossen ist, und zwar ist diese Wirkung keine momentane, sondern sie setzt sich eine ziemlich lange Zeit andauernd fort, auch noch wenn die Larve längst der Eischale entschlüpft ist; andere Forscher, wie GIRAUD und ADLER, haben dieses schon vermuthet und ausgesprochen. Weiter will ich darauf hinweisen, dass in allen mir bekannten Fällen das Cynipidenei in oder an noch nicht ausgewachsene Gewebe niedergelegt wird, und dass bei den untersuchten Eichengallwespen auch dort, wo die ersten Spuren der Gallbildung erst mehrere Wochen nach dem Eierlegen sichtbar werden, die Larvenentwicklung sich schon innerhalb einer viel kürzeren Zeit kund giebt. Die Larvenentwicklung geht hier also der Gallbildung voran.

Wie aus dem Obigen erhellt, hatte ich bei meinen Untersuchungen nur sehr wenige Arbeiten anderer Schrifsteller zu berücksichtigen. Es ist bisher in dieser Richtung weit weniger geleistet worden, wie in den nächstverwandten Discipli-

nen. Wenn man z. B. einen Vergleich anstellt zwischen der gegenwärtigen Kenntniss der Entwicklungsgeschichte und des Baues der normalen Organe der höheren Pflanzen einerseits, und der Gallen anderseits, so ist der Unterschied gross. Dieses muss bei näherer Ueberlegung besonders desshalb auffallend erscheinen, weil man der normalen Organbildung gewissermaassen ganz rathlos gegenüber steht, während man in der Gallbildung einen Causalzusammenhang vor sich hat, welcher ein Eingreifen unserseits sehr oft gestattet. Bis heute sind die Einflüsse, welche bei den gewöhnlichen Entwicklungsvorgängen die Pflanzengestalt umbilden für uns tief verborgen und nur sehr selten indirekt in unserer Gewalt; bei der Gallbildung dagegen, ist es ein Leichtes die formbestimmende Ursache, nämlich das Gallenthier zu beherrschen, sei es dadurch dass wir es an einem beliebigen Augenblick seiner Wirkungszeit tödten, oder entfernen, oder selbst an eine von uns gewählte Stelle überbringen um hier die weitere Wirkung zu beobachten.

Fragen wir nun warum die Gallen so wohl in naturgeschichtlicher wie in physiologischem Sinne, die Beachtung welche sie verdienen noch nicht gefunden haben, so liegt die Antwort in der grossen Schwierigkeit ein wirklich lehrreiches Beobachtungsmaterial zu erlangen. Zwar ist es beinahe ausschliesslich die Aufgabe der botanischen und entomologischen Praxis letztere Schwierigkeit zu überwinden, doch will ich auf einige Punkte hinweisen, welche in dieser Beziehung beachtenswerth sein möchten, und diese im ersten Kapitel mit anderen allgemeinen Bemerkungen zusammenstellen.

KAPITEL I.

Allgemeines über die Cynipiden und ihre Gallen.

§ 1. *Das Auffinden der jungen Gallen.* Wenn man die Gallbildung vom ersten Anfang an verfolgen will, so ist es klar dass die jüngeren Entwicklungszustände in zahlreichen Exemplaren vorliegen müssen. Die Gallencultur im Garten ist natürlich, wenn sie ausführbar ist, ein ausgezeichnetes Hülfsmittel um diese zu erlangen, und ich werde unten noch darauf zurückkommen. Es giebt aber eine Anzahl Gallwespenarten welche sich in der Gefangenschaft abnormal verhalten und

nur wenige, oder selbst gar keine Eier legen wollen; in anderen Fällen werden zwar die Eier gelegt, doch bleibt die Gallbildung ganz oder beinahe ganz aus; wieder in anderen Fällen ist es kaum möglich sich die gallbildenden Wespen gewisser Arten in genügender Anzahl zu verschaffen. Unter solchen Umständen ist man auf das Material, welches die Natur selbst darbietet angewiesen. Da die jüngeren Gallen aber gewöhnlich sehr versteckt in den Knospen der Pflanzen vorkommen, und überdies das Wachsthum derselben wenigstens anfänglich schnell verläuft, so muss man, will man nicht im Wilden suchen, vorher mit den wahrscheinlichen Fundorten genau bekannt sein, und die richtige Zeit für das Sammeln festgestellt haben. Hierzu ist aber eine eingehende Bekanntschaft mit der Lebensgeschichte der Gallenthiere selbst, nothwendig. So macht man unter Andern häufig die Erfahrung, dass diese sich ausschliesslich an dem einen oder anderen Orte vorfinden, welcher durch eine kaum bemerkbare Eigenthümlichkeit ausgezeichnet ist, während man dieselben an anderen scheinbar gleichgünstigen Plätzen nicht antrifft. Das Fehlen solcher eigenthümlichen örtlichen Bedingungen, macht desshalb die Ausführung einer Untersuchung in manchen Gegenden sehr schwierig oder auch gänzlich unmöglich. Das folgende Beispiel möge dieses erläutern.

Die Kollarigalle ist seit dem Jahre 1865 in Niederland allgemein verbreitet, stellenweise selbst sehr häufig anzutreffen, so dass es leicht gelingt viele hunderte reife Exemplare zusammen zu bringen. Weit schwieriger aber ist es die Jugendstadien der Galle aufzufinden. Diese Gallen im Garten zu cultiviren gelang mir in den Jahren 1878, 79, 80 und 81 durchaus nicht. Erst die während vielfachen Suchens gemachte Beobachtung, dass die Kollariwespe grosse Vorliebe für Eichen mit schwacher Vegetationskraft besitzt, lenkte meine Aufmerksamkeit auf eine in der Nachbarschaft meines Wohnortes vorkommende kränkliche Eichenschälwaldung, und wo es mir gelang, durch wöchentlich wiederholte Besuche während der Monate Mai, Juni und Juli das nöthige Material zur Untersuchung zusammen zu bringen. Zugleich war durch das Vorkommen alter Gallen angezeigt, dass die Kollariwespe die sehr beschränkte Oertlichkeit schon seit Jahren bewohnte. Für die Terminalisgalle gilt beinahe genau dasselbe; zwar können die beiden genannten Gallen in schönen und grossen Exemplaren an gesunden Bäumen gefunden werden, aber zo zerstreuet, so wenig massenhaft beisammen, dass die Jugendstadien sich der Beobachtung vollkommen entziehen.

Ein anderer, an sich wenig wichtiger Umstand, der aber für entwicklungsgeschichtliche Untersuchungen bedeutungsvoll werden kann, hängt mit dem soeben Besprochenen enge zusammen. Es giebt nämlich einige seltenere Knos-

pengallen wie Glandulae, Globuli und Autumnalis *, welche an einzelnen bestimmten Bäumen bisweilen reichlich angetroffen werden können. Untersucht man solche individuelle Bäume im nächsten Jahre aufs Neue, so wird man die genannten Formen nur selten an denselben vergeblich suchen. Die schwerfällige Flucht der meisten Cynipidenarten bringt es ferner mit sich, dass diese Thiere das einmal gewählte Gebiet ziemlich vollständig ausnützen; so wird ein knospenbesuchendes Insekt alle Knospen eines und desselben Astes mit Eieren belegen, eine Wespe die Blattgallen hervorbringt wird gewöhnlich mehrere Eier in dasselben Blatt, und in die nächstfolgenden Blätter des Zweiges legen. Es ist nicht ohne Interesse darauf hinzuweisen, dass die Gallen desselben Zweiges daher gewöhnlich derselben Gallenmutter entstammen, also Schwesterbildungen sind. Hier muss ich noch bemerken, dass der Instinkt die Gallwespen treibt die Zahl ihrer Eier mit der endlichen Grösse welche die Gallen erreichen sollen, in Einklang zu bringen; so wird ein Weibchen welches grosse Gallen erzeugt, nur einzelne Eier in jedes Blatt deponiren, dagegen eine Art welche kleine Gallen hervorruft oft zahlreiche. Man vergleiche z. B. in dieser Hinsicht die grossen gewöhnlichen Blattgallen der Foliiwespen, welche ein bis sechs auf den Eichenblättern sitzen, mit den kleinen Linsengallen deren Anzahl auf einem Blatte selbst hundert übersteigen kann. Doch giebt es Ausnahmen, so die Ostreusgalle welche sehr klein ist aber vereinzelt auf den Blättern gefunden wird. Andere Ursachen welche das Vorkommen und die Verbreitung gewisser Gallenarten bedingen, können erst später besprochen werden.

Ist man einmal mit solchen kleinen praktischen Erfahrungen, so wie mit der Lebensgeschichte eines, sei es auch seltenen Gallenbewohners, zureichend bekannt, so ist es gewöhnlich bei einiger Beharrung nicht schwer, das Material zu einer vollständigen Beobachtungsreihe zu sammeln.

§ 2. *Aufzucht der Galwespen aus ihren Gallen. Inquilinen und Parasiten.* Hat man eine grosse Anzahl eierlegende Weibchen einer gewissen Gallwespenart, sei es für eine anatomische Untersuchung oder für Gallencultur nöthig, so müssen dieselben aus ihren Gallen aufgezogen werden. Hierzu ist es erforder-

* Es scheint mir geeignet die Cynipidengallen und ihre Bewohner nur mit dem Artnamen zu bezeichnen, und zwar sowohl der Kürze halber, als auch weil die Entdeckung der Heterogenesis in der Familie der Gallwespen die Umgrenzung der Gattungen, wie sie bisher bestand, unhaltbar gemacht hat. Bisweilen aber, wo die Deutlichkeit dieses gebietet, werde ich die Namen der Genera den Speciesnamen verangehen lassen, und dann überall HARTIG's und GUSTAV MAYR's Nomenclatur nachfolgen.

*

lich die Verhältnisse welchen die Gallen in der freien Natur ausgesetzt sind, so genau möglich nachzuahmen. Dabei ist Folgendes zu beachten. Viele Eichengallen fallen im Herbste von den Blättern oder aus den Knospen auf den feuchten Waldboden; die Bewohner verlassen dieselben sodann entweder noch in dem selben Herbst (Ostreus), im folgenden Frühjahr (Globuli, Autumnalis, Laeviusculus, Numismatis, Lenticularis, Fumipennis) oder selbst im nächsten Herbst (Renum); jedenfalls müssen sie also Wochen oder Monate lang aufbewahrt werden. Am Besten geschieht dieses im Freien auf feuchtem Sande unter einer Moosdecke, während sie zur Zeit des Ausschlüpfens ins Zimmer gebracht werden. ADLER empfiehlt dabei den Gebrauch von Blumentöpfen. Dieselben werden mit Erde gefüllt, die Gallen auf diese gelegt, über das Ganze eine Moosdecke gebunden, und hierauf werden die Töpfe im Freien bis an ihrem Rand in den Boden vergraben. Ich selbst gebrauche dazu gläsernen Dosen verschiedener Grösse, welche bis zur halben Tiefe mit feuchtem Sande angefüllt sind. Jedenfalls muss man darauf achten, dass die künstlich aufbewahrten Gallen, den gleichen, schroffen Gegensätzen von Wärme und Kälte, Nässe und Trockenheit, welche im Freien bestehen, ausgesetzt bleiben müssen. Geschieht dieses nicht, so gedeihen die Bewohner zahlreicher Arten schlecht, und bleiben so schwach, dass sie ihre Gallen gar nicht verlassen können und darin sterben, oder wenn sie auch noch ausschlüpfen, kaum zu laufen und gar nicht mehr zu fliegen vermögen.

Ueberwinteren die Gallen an den Pflanzen selbst, wie das z. B. mit den Bedeguaren der Rosen der Fall ist, so ist es am Besten sie erst im nächsten Frühjahr zu sammeln; findet man solche Gallen aber im Herbste an einem entfernten Orte, welchen man nicht so leicht wieder besuchen kann, so kann man dieselben abnehmen, und mit ziemlich gutem Erfolge auf feuchtem Sande, oder selbst trocken überwinteren lassen, doch sterben dabei stets mehrere Larven wenn man die Gallen zu Hause aufbewahrt (Radicis, Rosae, Orthospinae, Rubi, Hieracii).

Aber selbst bei der genauen Beachtung aller möglichen Fürsorgen muss man, und es gilt dieses besonders für die Eichengallen, darauf rechnen dass nur eine kleine Anzahl oder nur einzelne der Gallen, die gewünschten Wespen hervorbringen, gewöhnlich geht weitaus die grösste Mehrzahl dieser zu Grunde, sei es durch Inquilinen und Parasiten, worüber bald Näheres, oder in Folge der abnormen Einflüsse welchen sie beim Aufbewahren unterworfen wurden, oder endlich durch das frühzeitige Absterben der Gallen selbst. Nur wenige Arten machen von dieser unangenehmen Regel eine Ausnahme z. B. Folii und Kollari welche leicht zu züchten sind, indem man den Gallen schon beim Sammeln ziemlich sicher ansehen kann, ob sie unversehrte Bewohner enthalten; dagegen ist es mir in gewissen Jahren nicht gelungen die Divisawespe aus hun-

derten ihrer Gallen auch nur in einem einzigen Exemplar zu bekommen; in anderen Jahren gelangen die Zuchtversuche mit dieser Galle besser.

Vor Allem die jungen Cynipidenlarven gehen sehr leicht zu Grunde, eine Erscheinung welche sich dadurch erklärt, dass deren Nahrung aus einem Gewebe lebender Zellen besteht, welche die Galle allmählich zu ihrem Behufe bilden muss, es ist desshalb wohl einzusehen, dass jedes Eingreifen in den natürlichen Entwickelungsgang der Galle, das Thier affiziren muss. Da die im Herbst zu Boden fallenden Gallen, sehr wenig entwickelte Larven enthalten, sind diese besonders empfindlich.

Ist aber einmal das Nahrungsgewebe der Galle vollständig verbraucht, so ist das Leben des Thieres bei gewissen Arten sehr zähe. So ist es z. B. bei der Cynips kollari. Gewöhnlich verlässt diese Wespe ihre Galle im September, desselben Sommers worin Letztere gereift ist; einige Larven erreichen aber den vollkommenen Zustand nicht sobald, sondern überwintern als solche in den Gallen, um erst im nächsten Sommer als Wespen zu entweichen. Nun habe ich solche verspätete Larven im Herbst 1879 aus ihren Gallen geschnitten und einfach auf einen Tisch in meinem Arbeitsraume gelegt; nach Jahresfrist, August 1880, sind sie in Nymfen und diese in schöne Wespen verwandelt; — sie waren also etwas früher reif als die neue, noch in ihren Gallen verschlossene, Generation. Genau denselben Versuch habe ich mit den Gemmaegallen angestellt; ich sammelte im März 1879 zu Boden liegende Gallen dieser Art, schnitt die Larven, heraus und sah nun den Verlauf ihrer ganzen Metamorphose ausserhalb der Galle zu Stande kommen, im September 1879 erhielt ich die Wespen, welche freilich sehr schwach waren.

Unreif gesammelte Gallen liefern gewöhnlich keine Wespen, was sich aus dem zu Grunde gehen des Nahrungsgewebes erklärt, doch habe ich in den Jahren 1876 und 1881 aus ganz kleinen und unreifen Exemplaren von Cynips kollari, welche durch Trocknen eingeschrumpft, waren zu meinem Erstaunen zwerghafte Individuen der Kollariwespe aufgezogen, welche nur ein Drittel der normalen Grösse erreicht hatten.

Es wurde oben gesagt, dass das Absterben der eigentlichen Gallenbewohner, ebenfalls die Folge einer ganz anderen Ursache sein kann, nämlich des Vorkommens von Inquilinen und Parasiten in den Gallen. Unter den Letzteren versteht man die Ichneumonen-artigen Insekten, welche die Gallenbewohner selbst zu Grunde richten. Inquilinen oder Einmiethler dagegen sind fremde Cynipiden, welche ihre Eier in die Gallen anderer Arten ablegen, ohne aber selbst eigentliche Gallen zu bilden.

Als Parasiten kommen hauptsächlich die Ichneumoniden, Chalcidiën und Braconiden * in Betracht. Diese Thiere vermögen mittelst ihrer langen Legeröhre, die Wand vollständig ausgewachsener Gallen zu durchbohren um ihr Ei innerhalb der Larvenkammer gegen den Körper der darin enthaltenen Larve oder Nymfe der eigentlichen Bewohnerin nieder zu legen; als Ektoparasit lebend vernichtet der Fremdling bald seinen Wirth. Es ist ein anziehendes Schauspiel wenn an heissen Junitagen die goldenen Parasiten eine Terminalisgalle umflattern, und dann und wann unter Anstrengung aller Kräfte in die schützende Gallenrinde ihre Legeröhre einsenken; oder wenn das prächtige Thier Callimome regius (?) die holzige Gallenwandung der Kollarigalle welche die Dicke eines Centimeters erreichen kann, genau in die Richtung des Radius duchbohrt.

Es muss bemerkt werden dass viele von Parasiten bewohnte Gallen, von den gesunden nicht zu unterscheiden sind; dieses ereignet sich nämlich dann, wenn die Larven erst nachdem sie ausgewachsen, dem Parasiten anheimfallen. Gallen dagegen, in denen die noch jugendlichen Larven von Parasiten heimgesucht werden, stehen häufig in ihrer weiteren normalen Entwicklung stille, woraus die physiologisch interessante Thatsache erhellt, dass der Einfluss des Gallenbewohners auf das Wachsthum der Galle, ein ziemlich lange andauernder sein muss.

Unter Inquilinen oder Einmiethler werden, wie schon oben gesagt, diejenigen Cynipiden verstanden, welche in Gallen anderer Arten leben, solche selbst zu erzeugen aber nicht im Stande sind. Warum gerade die Gallen, weit mehr als Früchte oder andere pflanzliche Organe, den Angriffen solcher Feinde ausgesetzt sind, erklärt sich in der Hauptsache aus dem Vorkommen des sogenannten Nahrungsgewebes in denselben; von diesem lässt sich im Pflanzenreich kaum ein Analogon nachweisen, am nächsten möchte es sich mit dem oelführenden Endosperm vieler Samen vergleichen lassen. Es ist denn auch gewöhnlich diese Gewebepartie der Galle, in welche die Inquilinenweibchen (Synergus, Sapholytus und Ceroptres), ihre Eier niederlegen. Seltener wird dazu die übrige Gallensubstanz verwendet. Gewöhnlich werden die legitimen Gallenbewohner von den Inquilinen verdrungen und getödtet, geschieht dieses frühzeitig so können dadurch halbentwickelte Gallen entstehen, welche offenbar mit den oben besprochenen, — zufolge des Angriffs von Parasiten entstandenen, — übereinstimmen müssen. Haben die Inquilinen sich in beträchtlicher Entfernung von der eigentlichen Larvenkammer angesiedelt, so kommt der legitime Bewohner zwar zur normalen

---

* Ratzeburg, *Die Ichneumonen der Forstinsekten*, Band II, 1848, pag. 217. G. Mayr, *Arten der Chalcidiëngattung Eurytoma durch Zucht erhalten*, Verhandlungen der Zoöl.-Bot. Gesellschaft in Wien, 1871, pag. 297,

Entwicklung, doch werden dann nicht selten gewisse abnorme Gewebe in den Gallen gebildet, welche darauf hinzuweisen scheinen, dass die Inquilinenlarven an sich, bisweilen das Wachsthum der pflanzlichen Zellen zu affiziren vermögen.

Mayr * giebt betreffs der verschiedenen sich auf Inquilinen beziehenden Verhältnisse, die folgende Uebersicht: *Erstens*; die Einmiethler leben in der Larvenkammer der gallenerzeugenden Gallwespen, und die junge Larve wird dabei vernichtet; die fremden Thiere bilden mittelst dünner, membranöser, aus Schleim und Gallengewebe erzeugter, Scheidewände, jedes für sich ein besonderes Fach; in solchen Gallen findet man daher die eigentliche Larvenkammer von mehreren anderen ersetzt. Beispiele: Aphilotrix radicis mit Synergus incrassatus, Cynips-tinctoria mit Synergus melanopus, Dryophanta folii mit Synergus pallicornis. *Zweitens*; die natürliche Höhlung (nicht die Larvenkammer) gewisser Gallen, wird von Synergen bewohnt und vergrössert; in diesem Falle kann die eigentliche Gallwespe sich ganz unbehindert ausbilden. Beispiele: Cynips calycis mit Synergus vulgaris, Cynips cerricola mit Synergus thaumacera und mit Synergus variabilis. *Drittens*; die Larvenkammern der Synergiden liegen in der Gallenrinde ausserhalb des Nahrungsgewebes, bisweilen weit davon entfernt; die legitimen Bewohner kommen zur Ausbildung †. Beispiele dieser Art bieten die Gallen von Cynips kollari, Andricus curvator, Aphilothrix gemmae u. a. es gelang mir aber nicht die fremden Thiere zu determiniren. *Viertens*; die Larvenkammern der Inquilinen finden sich im Nahrungsgewebe selbst vor; dieselben sind radienartig um den Mittelpunkt angeordnet, und der legitime Gallenbewohner geht zu Grunde. Beispiel: Cynips kollari mit Synergus reinhardi, wie schon von Malpighi beobachtet und abgebildet.

Aus dieser gedrängten Uebersicht geht hervor, dass die Gallen ausser dem eigentlichen Gallenbildner, mehrere andere Thierarten, deren viele ebenfalls zur Familie der Gallwespen gehören, einschliessen können. Ueberlegt man dabei, dass auch die Einmiethler dem Angriff gewisser Parasiten ausgesetzt sind, und ferner, dass viele Gallen in Folge ihres eigenthümlichen Baues andere Gallen einschliessen oder tragen können, — so übersieht man leicht warum die Zucht der Gallen so oft ein ganz anderes Resultat als das erwünschte darbietet, ganz andere Thierarten aufliefert als diejenigen, welche man bei oberflächlicher Kenntniss erwarten würde.

---

* *Die Einmiethler der mitteleuropäischen Eichengallen*, Sitzungsberichte der Zoöl., — Bot. Gesellschaft in Wien, vorgelegt 4 Dezember 1872.

† Mayr, *Einmiethler* etc. pag. 676.

§ 3. *Gallencultur im Garten.* Hat man auf die eine oder andere Weise eine genügende Anzahl gallenerzeugender Thiere zusammengebracht, so kann man zur künstlichen Cultur der Gallen selbst übergehen. Dazu werden die Thiere unter Gazenetze gebracht und diese über die geeigneten Pflanzen oder Pflanzentheile gebunden. Die Zeit wann dieses geschehen muss ist im Allgemeinen durch das Ausschlüpfen der Thiere aus ihren Gallen selbst bestimmt; die Wahl derjenigen Organe der Pflanze in welche sie ihre Eier legen, muss vorher durch Beobachtung festgestellt werden, und dieses ist, wie sich aus dem Paragraphen über die Heterogenesis ergeben wird, bisweilen eine sehr schwierige Aufgabe, in anderen Fällen entscheidet darüber schon eine einfache Ueberlegung. Das Letztere ist z. B. der Fall bei dem allbekannten Bedeguar (Rhodites rosae) der wilden Rosen; hier findet man die jungen Gallen an der Stelle unreifer Blättchen, und eine nähere Betrachtung des Sachverhaltes lehrt dass die Urheberin ihre Eier in eine offene, schnell wachsende Sommerknospe gelegt haben muss. Dieses ist auch wirklich der Fall und war Veranlassung zum folgenden schönen Experiment. Die Bedeguarwespe verlässt die im Frühjahr eingesammelten Gallen, wenn diese im Zimmer aufbewahrt werden, Ende Mai bis Mitte Juli, demzufolge ist es möglich den nämlichen Rosenspross mit Intervallen von zwei Wochen, zwei oder dreimal hinter einander unter Gazenetzen, den Stichen der Rhoditesweibchen auszusetzen, und dadurch zwei oder drei Etagen von Bedeguaren verschiedenen Alters, an einem Zweige hervorzubringen. Auch gelangen mir mit einer anderen der Rhodites rosae nächtsverwandten Gallwespe, welche ich vorläufig mit dem Namen Rhodites orthospinae belegt habe (Figur 89 Tafel VI) solche Versuche wiederholt. Im August 1881 hatte ich zwei Rosensträucher (Rosa canina) in meinem Garten welche im Mai und Juni jenes Jahres, den Stichen der zwei ebengenannten Thiere ausgesetzt geworden waren; die Cultur der beiden dadurch entstandenen Gallenarten war so vortrefflich gelungen, dass die Aeste unter deren Last zu brechen droheten und gestützt werden mussten.

Die Cultur der Eichengallen ist im Allgemeinen mit weit grösseren Schwierigkeiten verbunden wie diejenige der auf Rosen vorkommenden Formen. Wenn ich Eichengallen cultiviren will welche sich aus „schlafenden Augen" entwickeln wie Taschenbergi, Similis und Megaptera, so gebrauche ich dazu einjährige Eichenkeimlinge, welche in grossen Blumentöpfen stehen und während der Arbeit der eierlegenden Wespen, ins Zimmer genommen werden. In anderen Fällen, in denen ich den Wespen viel Raum geben wollte, aber dieselben doch im Freien zu beobachten beabsichtigte, verfertigte ich Eisendrahtcuben deren Flächen bis auf eine mit Nesseltuch überzogen wurden; durch die offene Seite wurden die Eichenzweige hinein gefürt, und es war nun ein Leichtes das Ganze

nachher allseitig zu verschliessen, oder auch eine beliebige Seitenfläche für die genauere Beobachtung theilweise zu heben. Nach vielen vergeblichen Versuchen gelang es mir mit Hülfe dieser Einrichtung Renumgallen zu cultiviren. Das anfängliche Misslingen der Versuche welche ich in Bezug auf diese Galle anstellte, hatte als Ursache meine Unbekanntschaft mit der grossen Empfindlichkeit des Wachsthums dieser Galle für ganz bestimmte äussere Bedingungen. Erst die Beobachtung, dass die Renumgallen nur in fortwährendem Schatten z. B. in der Waldfinsterniss oder an der Nordseite der Bäume üppig vegetiren, machte mir möglich lohnende Culturen auszuführen. Bemerkenswerth ist es dass die besonnten Blätter keine einzige Galle brachten, trotzdem sich in den Blattnerven lebende Renumlarven vorfanden, und also der Beweis vorlag, dass die Mutterwespe (Trigonaspis megaptera) in dieselben fruchtbare Eier gelegt hatte.

Um die Gallen der Aulax hieracii an Hieracium rigidum und H. vulgatum zu cultiviren, habe ich mit gutem Erfolge über diese Pflanzen einfach hohe Bechergläser gestellt und darunter die Aulaxwespen gebracht; um die Sonnenwärme zu mässigen wurden die Gläser mit weissem Papier bekleidet.

§ 4. *Bau der Eichenknospen.* Dass sich der Körperbau und die Lebensverrichtungen zahlreicher Gallwespen im Laufe der Generationen dem Knospenbau der Eiche genau angepasst haben, von diesem also in ihrer Entstehung ursächlich bedingt worden sind, kann niemand bezweifeln; es scheint mir darum wünschenswerth, die Eichenknospen an dieser Stelle etwas ausführlicher zu betrachten.

Beginnen wir zu dem Zwecke mit der Beschreibung einer gewöhnlichen Winterknospe (Macroblast, Grosstriebknospe) welche im Frühjahr treiben soll. Bei einer näheren Betrachtung derselben, z. B. im März finden wir, dass sie in ihrem Bau einem beblätterten Zweige in Miniatur entspricht. Wie am Zweige so sind auch an der Knospenachse — das heisst dem Stengeltheil der Knospe — die Blätter in fünf Reihen geordnet. Die verschiedenen Nebenblattpaare welche jedes für sich zu einem Blatte gehören, sind dergestalt über einander gestellt, dass sie zusammen die Räume zwischen den fünf Verticalreihen worin die Blätter vorkommen, in Anspruch nehmen und daher auch fünf mit den grünen Blättern abwechselnden Serien bilden. Die unteren Paare derselben übernehmen die Function von Knospenschuppen, die dazu gehörigen Spreiten jedoch fehlen scheinbar vollständig, können aber mit Hülfe des Mikroskops als sehr kleine schwarze Rudimente aufgefunden werden, welche sogar den Nervenverlauf der normalen Blätter, ziemlich deutlich aufweisen. Nur die beiden oder die drei ersten Blätter jeder Knospe, die Vorblätter (*vb* Fig. 14 Taf. I), sind ohne Aus-

nahme einfache Scheideblätter, welche sich als einheitliche Fläche aus der Knospenachse erheben. Die Spreiten der grünen Blätter sind in der Knospenlage ihren Seitennerven entlang durch mitten gefalzt (Fig. 32 und *bt* Fig. 29 Taf. II) in dem Sinne, dass die Oberseiten der Blatthälften einander berühren. Es hat weiterhin das schnelle Wachsthum der Blattränder eine Fältelung der Blatthälften in der Weise verursacht, dass längs jedem Seitennerven ersten Ranges eine Falte verläuft. In den seitlich am Zweige befestigten Knospen, ist die Oeffnung jedes gefalteten Blattes nach oben gerichtet. Nur die untersten am Knospengrunde befindlichen grünen Blätter liegen gewöhnlich ohne Falten, flach gegen die Knospenschuppen ihrer Nachbarschaft angepresst. Die Kenntniss dieser Lagenverhältnisse der Blätter in der Knospe, ist für die Beurtheilung der Contactpunkte der Gallwespeneier mit den, von den Knospenschuppen eingeschlossenen lebenden Gebilden von Wichtigkeit.

Die äusserste Spitze der konischen Knospenachse, der Vegetationspunkt (*vp* Fig. 26 Taf. II), wird von den jüngsten Blättern vollständig überdeckt. An der seitlichen Wölbung der halbkuglichen Grenzfläche dieses Vegetationspunktes entspringen die Blattgebilde als kleine Zellhöcker, welche schnell empor wachsen und denselben bald überragen.

Der untere Theil der Knospenachse, das heisst diejenige Region derselben, wo sich nur Nebenblätter (Knospenschuppen) ohne dazu gehörige Blattspreiten vorfinden, hat die Eigenschaft sich beim Oeffnen der Knospen im Frühjahr gar nicht oder doch nur unbedeutend zu verlängern: dieser Theil wird *Ring* oder Ringtheil (*rt* Fig. 21 Taf. I, *rt* Fig. 26 Taf. II) genannt. Die kleinen Knöspchen welche daran vorkommen können und die in den Achseln der rudimentären Blattspreiten sitzen, heissen Ringknospen; in den blüthenbringenden Sprossen gehen aus diesen die männlichen Blüthenkätzchen hervor, während die weiblichen Infloreszenzen an den Sprossgipfeln in den Achseln vollständig ausgebildeter grüner Blätter stehen.

Unsere Eichen gehören zu den Bäumen welche den Frühjahrsspross mit einer geschlossenen Endknospe abschliessen; dieselbe entspricht in ihrem Baue genau den Achselständigen Seitenknospen des Frühjahrstriebes und diese selbst entsprechen jungen Grosstriebknospen. So wohl die Endknospe wie einzelne der höheren dieser Seitenknospen (Sommerknospen) bringen gewöhnlich im Juli den Johannispross. Diejenigen Seitenknospen dagegen, welche sich zu dieser Zeit nicht öffnen, verändren gerade wie die Achselknospen des Johannisprosses in normale Winterknospen, wie sie oben beschrieben wurden. Eben wie in die Winterknospen, so legen auch zahlreiche Gallwespenarten in die geschlossenbleibenden Sommerknospen Eier. Besonders die Vegetationpunkte dieser jungen, an grünen,

unverholzten Zweigen vorkommenden Knospen, eignen sich für die Gallbildung (Gemmae, Solitaria, Glandulae). Für die Art und Weise wie die Kollarigalle aus diesen Sommerknospen entsteht, erlaube ich mir auf meine spezielle Darstellung im Kapitel VII hinzuweisen. Auf gewisse andere Knospengallen des Spätsommers, welche gleich den soeben Genannten ebenfalls aus Sommerknospen entspringen, jedoch eine abweichende Entwicklungsgeschichte haben, wie Autumnalis einerseits, Collaris und Globuli anderseits, hoffe ich bei anderer Gelegenheit zurück zu kommen. Gewisse Gallwespen, wie Aphilothrix collaris, Neuroterus fumipennis und Aphilothrix radicis, welche gewöhnlich in Winterknospen Eier legen, kommen bisweilen aus ihren Gallen so spät im Frühjahr heraus, dass die Winterknospen schon alle geöffnet sind; durch solche Thiere werden dann Sommerknospen in Anspruch genommen welche Johanitrieb bringen sollen, und daraus erklärt sich dass man eine Curvator-, Tricolor- und Noduligeneration am Sommertrieb finden kann.

Als Uebergang von der nun beschriebenen zur nächstfolgenden Knospenform, muss die Kurztriebknospe (Brachyblast) hier erwähnt werden. Der Spross welcher daraus hervorgeht, besitzt im Allgemeinen kurze Internodien und ist bei prägnanter Ausbildung mit dem Ringtheile eines Langtriebes zu vergleichen. Ein Hauptmerkmal desselben besteht in dem äusserst geringen oder vollständig fehlenden Dickenwachsthum. In der Oekonomie der Eichen spielen die Kurztriebe nur eine unbedeutende Rolle, während sie bei der Buche, der Birke der Birne und vielen anderen Bäumen sehr wichtig sind.

Grosses Interesse bietet die zweite Hauptform der Eichenknospen, nämlich das sogenannte schlafende Auge (*cp* Fig. 35 Taf. III) oder die verborgene Knospe (Cryptoblast, Präventivknospe). Dieses Gebilde ist dadurch ausgezeichnet, dass es sich unter normalen Umständen nicht öffnet; Th. Hartig sagt davon Folgendes: * „Unter den aus einjährigem Trieb gebildeten Seitenknospen ist es stets eine mehr oder weniger grosse Anzahl, die in den nächsten Jahren, in Jahrzehnden oder selbst in Zeiträumen von mehr als hundert Jahren äusserlich in ihrem ursprünglichen Zustand verharren, bis Krankheit oder gewaltsame Verletzungen des Baumes sie zur Triebbildung bringen. Alle Triebbildung aus-

* *Anatomie und Physiologie der Holzpflanzen*, 1878, pag. 229. Die merkwürdigen Veränderungen in den Stengelorganen unterhalb solchen Knospen „der intermediäre Längenzuwachs des Knospenstammes", und die Beziehung derselben zur Maserbildung, sind von Hartig wiederholt beschrieben und verdienen besondere Beachtung.

unverletzter Rinde älter als einjähriger Schaft- und Zweigtheile: Wasserreiser, Räuber, Stammsprosse, Ausschläge, gehören hierher".

Diese Knospen stimmen in ihrem Bau im Allgemeinen mit den Grosstriebknospen überein, unterscheiden sich jedoch von denselben dadurch, dass sie nur wenige grüne Blätter besitzen; treiben sie aus so müssen die Blätter des Sprosses also noch aus ihren Anlagen, oder sogar neu aus dem Vegetationspunkt gebildet werden. Entstehen aus den Präventivknospen die im Hartig'schen Citate genannten Triebbildungen, so sind dieselben an Quercus pedunculata oft dadurch gekennzeichnet, dass ihre ersten grüne Blätter vollkommen, oder beinahe glattrandig sind, so dass ihre Umrissform mit derjenigen der Samenlappen mehr weniger vollständig übereinstimmt. Wenigstens im Anfange ihrer Entwicklung tragen solche Triebe gewöhnlich eine offene Endknospe, während die wachsenden Frühlings- und Sommertriebe in eine geschlossene Sommerknospe enden.

Präventivknospen finden sich *erstens* an oder unmittelbar oberhalb des Ringtheiles der gewöhnlichen Zweige aller möglichen Altersstufen (Ringknospen), *zweitens* in ungeheuerer Menge auf den Masern alter Eichenstämme, und *drittens* zwischen dem Moose versteckt, am Wurzelstock einjähriger Keimlinge wie an dem von hundertjährigen Bäumen. — Verschiedene Gallwespenformen haben sich diesen kleinen Knospen angepasst, wie z. B. die albekannte Dryophanta folii (Fig 35 Taf. III); die merkwürdigsten Gallen welche daraus entstehen können sind die Megaptera- (Fig. 59 Taf. IV), Taschenbergi- (Fig. 40 u. 41 Taf. III), Similis-, Hartigi- und Serotinagalle.

Die dritte charakteristische Knospenform der Eiche ist die Adventivknospe, welche in Folge von Verwundungen aus jungen Ueberwallungswülsten entstehen kann, wenn diese das Alter eines Jahres noch nicht erreicht haben. Anfänglich ist in diesen Knospen die Differenzirung zwischen Achse, Blattspreite und Nebenblättern, noch nicht deutlich vorhanden und kommt erst allmählich beim Auswachsen zu einem Grosstriebe zu Stande. Demzufolge sind die unteren Blätter solcher Triebe höchst unregelmässig ausgebildet. Da ich keine Gallwespe kenne, welche diesen Bildungen angepasst wäre, so will ich dabei nicht länger still stehen.

§ 5. *Körperbau der Cynipiden; Struktur der Legeröhre und des Eies.* Zum besseren Verständnisse der Figuren zu den später folgenden Spezialbeschreibungen, halte ich es für angemessen eine kurze Beschreibung des Körperbaues der Gallenerzeugenden Cynipiden vorangehen zu lassen. Die Synergiden, welche zwar in Gallen leben, selbst aber keine Gallen bilden, sowie die Figitiden, welche in Blättläusen, Dipterenlarven und wahrscheinlich auch in Käferlarven le-

ben, gehören zwar beide zur Familie der Cynipiden, sollen jedoch hier ausser Besprechung bleiben.

Als Abtheilung der Hautflügler haben die Cynipiden eine vollkommene Metamorphose. Ihre Larven (Fig. 3 Taf. I) sind beinfarbige, fusslose madenähnliche Thiere, deren Körper aus 13 Ringen oder Segmenten und dem Kopfe besteht. Dieser letztere trägt die beiden kräftigen Oberkiefer, welche aus braunen Chitinmassen bestehen, und dazu dienen, die Wandung der Larvenkammer — ein Eiweiss und Oel enthaltendes Gewebe welches die ausschliessliche Nahrung des Thieres bildet — zu zernagen. Nur auf neun Leibesringen findet man jederseits eine Athmungsöffnung, auf dem zweiten, dritten, zwölften und dreizehnten Ringe fehlen dieselben. Merkwürdig ist es, dass die Larven während ihrer ganzen Entwicklung niemals häuten und keine Auswurfstoffe von sich geben, beides geschieht zum ersten Male beim Uebergange in den Nymfenzustand, nachdem das Thier also vorher die Kammerwandung verspeist hat und von den schützenden Geweben berührt wird, welche nicht rein gehalten zu werden brauchen.

Die Nymfen unterscheiden sich von den Schmetterlingspuppen, durch die ganz frei liegenden, natürlich von der Nymfenhaut eingeschlossenen Fühler, Flügel und Beine, — welche Gliedmaassen bei den Schmetterlingspuppen bekanntlich an den Körper angedrückt, und in entsprechenden Vertiefungen der Körperbekleidung festgetrocknet sind.

Die vollkommene Thiere sind gewöhnlich vierflüglich (Fig. 12 Taf. I, Fig. 26 Taf. II, Fig. 35 Taf. III, Fig. 42 Taf. III), eine Aussnahme davon machen z. B. die flügellosen Biorhiza aptera (Fig. 14 Taf. I) und Biorhiza renum, und die ungeflügelten Weibchen von Teras terminalis. Die Flügel sind dünn und durchsichtig mit äusserst feinen Härchen besetzt und mit einer sehr einfachen Aderung vorsehen. Die Gallwespen sind schlechte Flieger und lassen sich wenn man die Pflanzen auf welchen sie sitzen berührt, einfach zu Boden fallen.

Der Kopf trägt zwei Fühler welche bei den Weibchen meistens 14- bei den Männchen 15-gliedrig sind, an demselben befinden sich zwei grosse Facettenaugen, drei Nebenaugen und gut entwickelte Oberkiefer welche, zum Zweck der Herstellung des Flugloches für das vollkommene Insekt, auf das Zernagen der Gallenwandung eingerichtet sind. Die Unterkiefer und die Unterlippe tragen Taster mit variabler Gliederanzahl.

An den Beinen ist neben dem eigentlichen Trochanter, ein halsförmig verengter Theil des Femur zu finden, welcher einzelne Systematiker zur Annahme eines doppelten Trochanters bei den Gallwespen, veranlasst hat. Die Füsse sind immer fünfgliedrig; das erste Fussglied der Vorderfüsse trägt einen

Kammapparat, welcher mit den beiden zu einem sichelartigen Stücke verwachsenen Dornen der Tibia eine Einrichtung zum Abbürsten des Gallenstaubes von den Fühleren, darstellt, welcher bei der Herstellung des Flugloches entsteht. Diese zweckmässige Einrichtung scheint den verschiedenartigsten Gallenbewohnern eigen zu sein (Synergiden und Parasiten, selbst einige Hemipteren besitzen dieselbe).

Am Hinterleibe kann man bei einiger Aufmerksamkeit sechs Ringe zählen, welche jeder aus einer Rücken- und Bauchplatte bestehen; die letzte Bauchplatte ist gross und endigt in einen behaarten Fortsatz. An den Flanken des Thieres sind die Bauchhälften grösstentheils unter den Seitenrändern der Rückenstücke verborgen. Das Insekt kann diese Ringhälften mehr oder weniger stark krümmen und dadurch das Abdomen zusammenpressen, was bei dem Legen der Eier ein Hülfsmittel ist, um dieselben in die Legeröhre zu schaffen. Das Stielchen wodurch der Bauch und die Brust verbunden sind, ist eigentlich ein siebenter Ring, besteht aber nur aus einem einzigen sehr festen und dicken kreisförmigen Theile.

Gehen wir nun zur Betrachtung der Legeröhre über.

Der ganze Genitalapparat besteht, abgesehen von den durch den Bauch eingeschlossenen Organen aus zwei Haupttheilen nämlich aus einem Scheidentheile und der eigentlichen Legeröhre. Der Scheidentheil, über welchem der Darm mit der Analöffnung sich findet, gleicht einem häutigen Sack, dessen Oeffnung von dem letzten Abdominalringe umspannt wird. Zur Verstärkung der häutigen Wand derselben, liegen in dieser drei paar untereinander bewegliche Chitinplatten, welche die Namen Quadratische- (*Qp*), Oblonge- (*Op*), und Winkel-platte (*Wp* Fig. 4 u. Fig. 12 C Taf. I, Fig. 26 Taf. II, Fig. 36 u. Fig. 43 Taf. III, Fig. 90 Taf. VI) führen; nur die beiden Oblongeplatten sind an einem der Längsränder mit einander verwachsen ohne dabei aber ihre Beweglichkeit zu verlieren. Die morphologische Deutung dieser Plattenpaare ist noch nicht vollständig aufgeklärt. LACAZE DUTHIERS * nahm darin metamorphosirte Abdominalringe an.

Die eigentliche Legeröhre (*Lr* Fig. 14 Taf. I, Fig. 26 Taf. II, Fig. 35 u. Fig. 42 Taf. III) besteht gleich der Bienenstachel aus drei Theilen, nämlich aus einem Paare sehr feiner *Stechborsten* (*Sb* Fig. 4, Fig. 12 u. Fig. 16 Taf. I, Fig. 90 Taf. VI) und einem dritten unpaaren Theile, der *Schienenrinne* (*Sr* in den genannten Figuren). Die Schienenrinne ist mit den beiden Oblongeplatten (*Op*) in directer Verbindung, während die Stechborsten in der Körperhöhle in eine

---

* *Recherches sur l'armure génitale femelle des Insectes,* Paris 1853.

Gabel mit zwei oder drei Zähnen enden, von welchen einer mit der Winkelplatte (*Wp*) festverbunden ist. Auch hier ist man über die morpologische Deutung der Theile im Unklaren, doch scheint aus der Entwicklungsgeschichte der Legeröhre hervorzugehen, dass dieselbe aus metamorphosirten Gliedmaassen besteht, und zwar die Schienenrinne aus einem Paare verwachsener, die Stechborsten aus einem Paare freier Körperanhänge.

Untersuchen wir nun diese drei Theile etwas näher, so erkennen wir in der Schienenrinne ein hohles halbcylindrisches Röhrchen (Fig. 15 u. 16 Taf. I); in Fig. 15, welche einen Querschnitt der Legeröhre von Cynips kollari darstellt, ist *H'* die Höhlung derselben. Auf ihrer flachen Aussenseite trägt die Schienenrinne zwei mit Eisenbahnschienen zu vergleichenden Rippen (*r* Fig. 15), mittelst derer die Stechborsten an der Rinne befestigt sind; an ihrem freien Ende hat Letztere einige stumpfe Sägezähne (Fig. 16). Die Stechborsten haben die Form eines hohlen Cylinderquadranten (*H* Fig. 15 ist deren Höhlung) und demzufolge hat der Querschnitt der ganzen Legeröhre ungefähr Kreisgestalt; die Spitze der Stechborsten ist gewöhnlich glatt (Fig. 16), nur bei den Neuroteren mit Sägezähnen besetzt (*sb* Fig. 27 Taf. II).

Auf der flachen Seite welche der Schienenrinne zugekehrt ist, haben die Stechborsten eine Grube, welche die entsprechende Rippe (*r* Fig. 15 Taf. I) der Schienenrinne dergestalt einschliesst, dass zwar eine hin und herschiebende Bewegung möglich bleibt, aber doch eine sehr feste Verbindung der drei Theile zu Stande gebracht ist. Wie es sich aus Fig. 15 ergiebt bleibt ein feiner Kanal *K* in der Mitte der Legeröhre offen, welcher einerseits von der Rinne anderseits von den Stechborsten begrenzt ist. Durch diesen Kanal muss das Ei passiren, was angesichts der Thatsache, dass die ganze Legeröhre nur die Dicke eines Menschenhaares hat, und der Querschnitt des Kanales in Verhältniss zur Mittellinie des Eies sehr klein ist, bei oberflächlicher Betrachtung unmöglich erscheinen möchte. Dennoch geschieht dieses und findet seine Erklärung in der eigenthümlichen Form des Eies selbst. Wie sich aus den Figuren 4 u. 12 D Taf. I, 28 Taf. II, 36 B u. 43 B. Taf. III, 90 C Taf. VI etc. ergiebt, hat das Ei die Gestalt einer sehr langgestielten Birne, deren *Stiel* (*Es*) eine feine sehr elastische Hohlröhre darstellt, welche ausser einer am freien Ende gelegenen Anschwellung, überall gleiche Dicke besitzt. Der Anschwellung gegenüber liegt also der *Eikörper* (*Ek*). Beim Legen des Eies wird der Inhalt des Eikörpers in den Eistiel und dessen Anschwellung gedrückt, während der leere Sack des Eikörpers in die Legeröhre, und durch diese hin allmählig aus dem Körper geführt wird. In dem Maassen nun als der Eikörper aus der Legeröhre heraustritt wird die im Hinterleibe zurückgebliebene Anschwellung zusammengedrückt, und

giebt nun ihrerseits ihren Inhalt wiederum durch den in der Legeröhre befindlichen Eistiel, an den Eikörper zurück. Ein Beleg für die Richtigkeit des Factums, dass der Eintritt des Eiinhaltes in den Eistiel thatsächlich möglich ist, liegt darin dass man in den Neurotereneiern (Fig. 28 Taf. II), selbst Wochen nach der Eiablage, den noch nicht vollständig in den Eikörper zurückgekehrten Eiinhalt im Eistiel (*Es*) auffinden kann.

Da das ganze Ei sammt dem Eistiele immer beträchtlich kürzer ist als die Legeröhre selbst, muss der Stiel natürlich sehr elastisch sein, was, wie oben angeführt, auch wirklich der Fall ist. Da aber die Elastizität des Eistieles eine gewisse Grenze hat, so ist begreiflich dass Gallwespenarten mit langen Legeröhren auch stets lange Eistiele haben.

Die hier gegebene Erklärung des Eierlegens, wurde zuerst von HARTIG * aufgestellt; nur irrte er insoweit als er meinte dass erst der Eistiel und dann der Eikörper nach aussen trete. H. ADLER † hat dagegen Einwand erhoben und den Vorgang dahingedeutet, dass nicht das ganze Ei sondern nur der Eistiel in den feinen Kanal der Legeröhre aufgenommen werde, der Eikörper dagegen die Vagina und damit den Körper des Thieres direct verlassend, einfach der Legeröhre entlang gleite, und von dieser nur mittelst des Eistiels geführt werde, um endlich an die richtige Stelle abgelegt zu werden. Gegen ADLER'S Auffassung des Vorganges ist nun aber einzuwenden, dass diese Erklärung mit meiner naturgetreuen Fig. 26 Taf. II, welche eine Eier-legende Neuroterus lenticularis darstellt — gerade das Thier welches von ADLER zur Unterstützung seiner Behauptung gewählt wurde — nicht in Einklang zu bringen ist. Auch die Fig. 14 Taf. I und Fig. 35 Taf. III, welche respective eine Eier-legende Biorhiza aptera und eine Dryophanta folii darstellen, beweisen dass das Ei den Körper des Thieres nur durch den Kanal der Legeröhre verlassen kann. Ueberdies habe ich bei Biorhiza aptera unter dem Präparirmikroskop unmittelbar *gesehen*, dass das Ei zuerst aus der äussersten Spitze der Legeröhre ersichtlich wird. Wie es möglich war diese Beobachtung auszuführen werde ich unten in meiner Darstellung der Terminalisgalle beschreiben (Kapitel III § 4).

Ich schliesse diese Betrachtung von den äusseren Theilen des Legeapparates mit der Bemerkung dass die Legeröhre ein sehr empfindliches Tastapparat ist.

---

* *Ueber die Familie der Gallwespen*, GERMAR'S Zeitschrift für die Entomologie, 1840, pag. 179.

† Zuerst in: *Beiträge zur Naturgeschichte der Cynipiden*, Deutsche entomologische Zeitung, 1877, pag. 209; neuerdings in: *Ueber den Generationswechsel der Eichengallwespen*, Zeitschrift für wissenschaftliche Zoölogie, 1881, pag. 219.

Zahlreiche Tasthärchen, welche sich in dem Röhrenkanal vorfinden, machen dem Thiere wahrscheinlich fühlbar, wie weit das Ei vorwärts geschoben ist. Die Spitze der Legeröhre ist am Besten dem Schnepfenschnabel zu vergleichen, denn in beiden Organen ist der Sitz eines fein ausgebildeten Gefühlssinnes, welcher bei der Gallwespe dazu dienen wird, den innern Zustand der Knospe zu erkennen, bei der Schnepfe ihre im Schlamme verborgene Nahrung zu finden.

In Bezug auf die im Innern des Körpers eingeschlossenen Genitalorgane sei Folgendes bemerkt.

Die Ovarien haben den gewöhnlichen Bau der fächerförmig verzweigten Arthropodenovarien. Bei den grösseren Gallwespenarten, deren Eier verhältnismässig klein sind, ist die Zahl derselben ziemlich gross; so findet man in einer einzigen Cynips kollari oder Biorhiza aptera ± 800 Eier. Da die Anzahl der Individuen dieser Arten in verschiedenen Jahren durchschnittlich constant bleiben möchte, verschwendet die Natur also zur Erzeugung einer einzigen Kollarigalle nahezu 800 Eier. Umgekehrt legen die kleineren Gallwespenformen in Beziehung zu ihren Körperdimensionen grosse und daher auch wenige Eier; so zählte ich in einem Terminalisweibchen mittlerer Grösse unmittelbar nach dem Ausschlüpfen desselben aus der Galle deren c. a. hundert. Bei einem grossen Exemplare von Dryophanta divisa fand ich 178 Eier in den Ovarien, während ein zwerghaftes Individuum dieser Art deren nur 20 enthielt. In diesem Falle war bemerkenswerth, dass die Eikörper bei der Riesin und Zwergin gleiche Grösse besassen, während die Länge der Eistiele sehr verschieden war und der Legeröhrenlänge beider Thiere entsprach.

Die Eikörper sind in den einzelnen Ovarienröhren dem Oviduct also der Legeröhre, die Eistiele dagegen dem Körperinnern zugewendet. Werden die Eier gelegt, so muss daher, wie ich schon oben sagte, der Eikörper zuerst aus der Legeröhre heraustreten.

Zwischen den beiden Ovarien findet man eine glashelle mit einer dicklichen Flüssigkeit angefüllte Blase, deren Inhalt durch künstliches Zusammendrücken des Abdomens durch den Kanal der Legeröhre theilweise nach aussen geschafft werden kann. Bald nachdem diese Substanz aus der Spitze der Legeröhre ins Freie gelangt ist, vertrocknet dieselbe und nimmt dabei die Gestalt eines feinen Stäbchens an. Wahrscheinlich ist die Schleimdecke der Apteraeier (*Sl* Fig. 14 Taf. I) durch diese Blase abgegeben. Es ist weiter anzunehmen, dass der Inhalt der Blase durch die Drüsenröhren geliefert wird, welche darin ausmünden, und die in ihrem wundervollen Bau mit den Giftdrüsen der Bienen und anderer Aculeaten übereinstimmen.

Adler ist der Ansicht, dass dieser Apparat die Kittsubstanz liefert, womit

die Eier an die Pflanzentheile festgeklebt werden. Diese Auffassung halte ich nicht für vollkommen richtig, da das Festkleben der Eier von Eichengallwespen, welches der Bildung ihrer Gallen stets vorangeht, einfach durch die Eischale selbst, bei den Rhodites-Arten durch eine besondere Vorrichtung, zu Stande kommt, welche schon an den Eikörpern sichtbar ist während dieselben noch in den Ovarien eingeschlossen sind. Dass die *Eistiele* mittelst des Blaseninhaltes bisweilen festgeklebt werden, ist dagegen nicht zweifelhaft. Uebrigens könnte die Blase auch eine mechanische Function erfüllen, da sie bei dem Eierlegen in den Scheidentheil des Legeapparates eindringt, und hier möglicherweise den durch die heraustretenden Eier entstehenden Volumenverlust compensirt; dass sie mit der eigentlichen Gallbildung in gar keiner Beziehung steht, ist vollkommen sicher.

Zuletzt müssen hier noch die beiden Fettbeutelchen genannt werden, welche sich nahe am Eingange der Legeröhre befinden. Man nimmt an, dass dieselben auch Fett absonderen, um dadurch die Beweglichkeit der Stechborsten längs der Schienenrinne zu erleichteren. Ich selbst fand die Fettbeutelchen in einer Apterawespe, welche alle ihre Eier gelegt hatte, vollständig entleert und schlaff geworden.

§ 6. *Das Legen der Eier.* Nur die allergenaueste Beobachtung des Verhaltens eines Weibchens während des Eierlegens, so wie der jungen Galle, kann eine sichere Entscheidung über die Frage geben, ob das Mutterthier die Stelle des pflanzlichen Gewebes, welche in die Galle umgewandelt werden soll, mit ihrer Legeröhre vorher verwundet, oder nicht. Bisher hat man immer angenommen, eine solche Verwundung finde wirklich statt, und übe einen wichtigen Einfluss, auf den Process der Gallbildung selbst aus Ich habe aber gefunden dass diese Annahme unrichtig ist, und werde dieses in meinen Detailbeschreibungen ausführlich begründen. Wie sich aus diesen ergeben wird, sind bezüglich des Legens der Eier an die geeignete Stelle die drei folgenden Fälle möglich: entweder schiebt das Thier die Legeröhre zwischen die Pflanzentheile, ohne diese und das gallbildende Gewebe zu verwunden; oder es erzeugt zwar eine Verwundung, um das Ei jedoch an eine vollständig unversehrte Stelle zu bringen *; oder endlich es legt das Ei in eine, in unmittelbarer Nähe des

* Diese beiden Fälle unterscheiden sich offenbar nur unerheblich von einander, dazu gehörige Beispiele sind die Baccarum, Albipes, Vesicatrix, Tricolor, Curvator; Rosae, Orthospinae, Spinosissimae, Eglanteriae, Rosarum; Glechomae; Megaptera, Taschenbergi, Similis, Verrucosa; Solitaria, Glandulae, Gemmae, Callidoma, Malpighii, Albopunctata; Inflator, Kollari, Argentea, Hungarica, Tinctoria-gallen.

gallbildenden Gewebes angebrachte Oeffnung *. Auch für diesen Fall werde ich zeigen, dass die Gallbildung durch die Verwundung nicht beeinflusst wird.

Beim Legen der Eier durch die Eichengallwespen kommen alle drei Fälle vor. Wird durch diese Wespen das Ei in eine Knospe gebracht, so geschieht dieses entweder ohne jede Verwundung von Pflanzentheilen, oder, im Falle eine solche durch die Legeröhre stattfindet, ist doch die Lage des Eies von der Verwundung in der Regel ganz unabhängig, nur die Terminalisgalle macht wie gezeigt werden wird, in dieser Beziehung eine Ausnahme. Ist dagegen ein *Blatt* bestimmt das Ei aufzunehmen, so machen die Wespen zuvor mit ihrer Legeröhre in der Blattsubstanz eine dafür geeignete Höhlung. Ein Paar Beispiele mögen das hier Gesagte erläuteren.

Die Wespe Neuroterus lenticularis (Fig. 26 Taf. II), welche die Baccarumgalle hervorruft, ist durch die eigenthümliche Krümmung ihrer Legeröhre (*Lr*) während des Legens der Eier so fest mit der Eichenknospe verbunden, dass bei einem schnellen Abziehen des Thieres von dieser, der ganze Legeapparat aus dem Leibe gerissen wird und in der Knospe stecken bleibt. Es leuchtet ein, dass unter solchen Umständen das Eierlegen ziemlich lange dauert z B. fünf bis zehn Minuten, ja eine halbe Stunde; man hat daher ausreichend Zeit die Knospe abzuschneiden und, bevor das Thier seine Legeröhre zurückgezogen hat, in Aether zu werfen, wodurch es sofort getödtet wird; die Legeröhre behält in dem Aetherpräparat genau ihre natürliche Lage bei. Daher war es möglich die Figur 26 Taf. II mit dem Zeichenprisma nach der Natur aufzunehmen, — nur beim Zeichnen der Blattgebilde (*bt*) war eine geringe Schematisirung nothwendig, — selbst die Füsse des todten Thieres standen genau so auf den Knospenschuppen, wie es bei der lebendigen Wespe der Fall war, und wie in der Figur zurückgegeben ist. Aus dieser Zeichnung in Verbindung mit Fig. 29 Taf. II, in welcher man das Ei zwischen den beiden Spreitenhälften eines noch durchmitten gefalzten Blättchens liegen sieht, und mit der Fig. 32 Taf. II, welche eine ganz junge Baccarumgalle darstellt, aus welcher der Eistiel noch hervorragt, ergiebt sich mit aller gewünschten Genauigkeit, dass das gallbildende Gewebe des Blättchens vollständig unversehrt geblieben ist.

Mit grossem Interesse habe ich das Verhalten unserer gewöhnlichen *Gallwespe der Eichenblätter* Dryophanta folii (Fig. 35 Taf. III) bei dem Legen der

---

* Hierzu gehören die Folii, Longiventris, Divisa; Renum, Numismatis, Lenticularis, Fumipennis, Ostreus, Laeviusculus, Aptera, Radicis, Sieboldi, Corticis, Globuli, Collaris, Terminalis, Hieracii, Minor-gallen.

Eier verfolgt, nachdem Dr. Adler mir freundlichst mitgetheilt hatte, dass sie die zierlichen Taschenbergigallen erzeugt. Im November 1880 hatte ich viele dieser Thiere in einem kalten Zimmer aus ihren Gallen auskriechen lassen, und dieselben sofort auf starke einjährige Eichenkeimlinge gesetzt. Diese kleinen Bäumchen, welche ihre Blätter schon abgeworfen hatten und nahe am Boden viele schlafende Augen (*cp* Fig. 35 Taf. III) trugen — aus diesen bildet sich die Taschenbergigalle (Fig. 40 und 41 Taf. III) — waren in Blumentöpfen cultivirt. Nachdem über die Bäumchen mitsammt den Wespen, grosse Bechergläser gesetzt waren, wurden die Töpfe ins Zimmer genommen. Die Foliiwespen suchten bald die schlafenden Knospen auf, untersuchten dieselben sehr genau mit ihren Fühlern, und im Falle die Knospen ihrer Erwartung entsprachen, richteten sie ihre kurze Legeröhre (*Lr*), die Knospenschuppen vertical durchstechend, genau auf den Vegetationspunkt. Nach einigen Minuten verliessen sie die Knospe und wiederholten das Spiel auf einer nächst höher stehenden. Es war ein Leichtes, das Ei auf dem Vegetationspunkte nach vorsichtigem Präpariren bei einer 30-fachen Vergrösserung eines Präparirmikroskops zu beobachten, und zu constatiren, dass eine Verwundung lebender Theile der Knospe durchaus nicht stattgefunden hatte: das Ei (*Ek*) lag einfach auf dem Vegetationspunkte (*vp*) woraus später die Taschenbergigalle entsteht. Diese Versuche mit der Foliiwespe gelangen ohne Mühe und wiederholt im November und Dezember 1880, so wie im Dezember 1881 und Januar 1882. Ich muss aber bemerken, dass man die Thiere, welche schon im September ganz ausgewachsen in den Blattgallen sitzen, freiwillig daraus hervorkommen lassen muss; zerschneidet man die Gallen im Oktober, so legen die Wespen keine Eier, trotzdem sie noch mehrere Monate leben können.

Aus der mikroskopischen Untersuchung des Bohrloches (*bl* Fig. 75 Taf. V), welches sich selbst unterhalb reifer *Kollarigallen* im Blattstiele (*bt*) auffinden lässt, und worin ich bisweilen Ueberreste des Eistieles gefunden habe, geht hervor, dass die Kollariwespe sich beim Legen der Eier ungefähr wie Neuroterus (Fig. 26 Taf. II) verhalten muss. Eigenthümlich jedoch ist bei der Kollariwespe die ausserordentliche Sicherheit, womit sie ihre Eier an die geeignete Stelle der Knospen zu bringen weiss. Es muss nämlich ihr Ei dergestalt in die Achsel eines in der Knospe vollständig eingeschlossenen Blattes zu liegen kommen, dass der Eikörper (*Ek* Fig. 70 Taf. IV) mit der Knospenbasis des secundären Achselknöspchens (Sommerknospe des nächsten Sommers, Winterknospe = Grosstriebknospe des folgenden Herbstes) in Berührung tritt, — welches Letztere im Moment des Eierlegens (September oder Oktober) nicht viel mehr als ein mikroskopisches Zellhöckerchen mit nur wenigen Blattanlagen ist. Es ist einleuch-

tend, dass das Insekt zur Auffindung einer so eng begrenzten Stelle mit einem sehr feinen Tastsinne in der Legeröhrenspitze begabt sein muss. Das Thier beginnt seine Arbeit stets damit, dass es die Basis des Blattstieles von unten nach oben, und zwar unmittelbar in der Nähe des Zweiges durchbohrt.

Auf die Stellung, welche die *Frühlingsgallen* am Blatte einnehmen, und welche in erster Linie durch die Knospenlage des Blattes selbst geregelt wird, übt auch die Weise, worauf die Eier in die geschlossene Winterknospe gelegt werden, einen erheblichen Einfluss aus. So werden z. B. die Albipesgallen gewöhnlich an derjenigen Stelle wo sich unter normalen Verhältnissen die unteren Blattlappen der Eichenblätter gebildet haben würden, oder auch wohl auf den Nebenblättern angetroffen, was mit der Gewohnheit der Mutterwespe (Neuroterus laeviusculus) zusammenhängt, bei dem Eierlegen immer die Nachbarschaft der Blattbasis aufzusuchen. Zufolge ganz kleiner Missstellungen oder Verschiebungen des Eies können die Gallen jedoch auch aus der Oberfläche der Rinde der Knospenachse selbst, oder aus den Blattstielen entstehen.

Ich will nun bei dem Eierlegen im Allgemeinen nicht länger verweilen, da ich in den Spezialbeschreibungen darauf zurückkomme. Doch möchte ich noch besonders eine genaue Betrachtung der Figur 14 Taf. I empfehlen, welche eine eierlegende Biorhiza aptera mit nach unten gekehrtem Kopfe auf einer in der Länge durchschnittenen Eichenknospe darstellt.

Die Schlussfolgerung, welche sich aus diesen Beispielen, so wie aus zahlreichen hier nicht genannten Wahrnehmungen ergibt, lässt sich dahin zusammenfassen, dass die Stelle einer Pflanze, welche eine Galle hervorbringt, von der Lage des Eies, nicht aber von der Verwundung seitens der eierlegenden Wespen bestimmt wird.

§ 7. *Die Parthenogenesis und die Heterogenesis der Cynipiden.* Wie es scheint gibt es unter den eigentlichen gallbildenden Gallwespen keine einzige Art, bei welcher die Individuenzahl der Männchen und Weibchen nahezu gleich ist, wie dieses bei nicht gallbildenden Thieren gewöhnlich zutrifft, sondern stets überwiegt bei den Gallwespenarten die Zahl der Weibchen diejenige der Männchen. Dieses kann aber auf verschiedene Weisen stattfinden, und zwar lassen sich in dieser Beziehung dreierlei verschiedene Verhältnisse der Geschlechtsvertheilung beobachten.

Erstens. Gewisse Arten z. B. Rhodites eglanteriae, R. rosae, R. orthospinae und Aulax hieracii, kommen zwar in beiden Geschlechtern vor, aber die Männchen sind sehr selten, bei R. rosae z. B. ein Männchen auf hundert Weibchen bei R. orthospinae noch weniger. Diese Thatsache ist für die erstgenannte Art durch

Adler, für die zweite durch mehrere Forscher, für die beiden anderen Arten von mir selbst constatirt. Ob hier bisweilen Befruchtung stattfindet, ist noch nicht sicher beobachtet; durch Adler's und meine eigene Gallenculturen im Garten ist dagegen unzweifelhaft festgestellt, dass eine Befruchtung nicht nothwendig ist, — die Eier also ohne diese zur Entwicklung gelangen und Gallen erzeugen können. Adler hat dieses für Rhodites rosae (die Bedeguarwespe) nachgewiesen *; ich selbst cultivirte in meinem Garten unter Gazenetzen an Rosa canina mit unbefruchteten, eben aus ihren Gallen geschlüpften Weibchen in den Jahren 1880 und 1881 schöne Bedeguare (Rhodites rosae) und Orthospinaegallen (Rhodites orthospinae). Weiter gewann ich in den genannten Jahren unter Glasverschluss und ebenfalls mit unbefruchteten Weibchen die Galle der Aulax hieracii an Hieracium vulgatum. Mit Bezug auf zwei Diastrophusarten, welche auf Brombeeren Gallen erzeugen, meine ich auf Grund vorläufiger Untersuchung schliessen zu können, dass auch bei diesen Arten die Zahl der Männchen eine so kleine ist, dass nur selten eine Befruchtung von Weibchen stattfinden kann. Bei allen diesen Beispielen sehen wir, wie die Natur so zu sagen den ersten Schritt auf dem Wege zur parthenogenetischen Fortpflanzung ablegt.

Zweitens. Aphilothrix albopunctata, A. marginalis, A. quadrilineata und A. seminationis pflanzen sich nach Adler nur mittelst Parthenogenesis fort. Was ich selbst von Albopunctata gesehen habe, bestätigt Adler's Ausspruch vollständig. Ich kann zu dieser parthenogenetischen Vierzahl noch die Cynips kollari, welche ich seit 1877 fortwährend beobachtet habe, hinzufügen. Die Gründe, wesshalb ich für diese Art Parthenogenesis für erwiesen halte, werde ich bei Gelegenheit meiner Besprechung ihrer Gallen darlegen. Die der Cynips kollari nächstverwandten Arten Cynips hungarica, C. argentea, C. tinctoria, C. lignicola, C. glutinosa, C. coriaria und C. polycera habe ich zwar nicht lebend gesehen, jedoch glaube ich auf Grund der Untersuchung ihrer Gallen mit zureichender Sicherheit auch für diese Thiere auf Parthenogenesis schliessen zu dürfen. In dieser Hinsicht zweifelhaft scheinen mir noch Cynips calycis und Cynips caput medusae zu sein.

Drittens. Zahlreiche andere Cynipidenarten, welche ihre Gallen auf unseren Eichen bilden, haben einen ganz besonderen Entwicklungsgang aufzuweisen, welchen man Heterogenesis genannt hat. Diese besteht darin, dass eine nur im weiblichen Geschlechte vertretene Generation Eier legt, aus welchen Thiere beider Geschlechter hervorkommen, welche ihrer Mutter nicht ähnlich sind; aus den Eiern

* Und überdies für die Tenthredinee Nematus valisnieri (capreae?) welche auf Weidenblättern Gallen bildet.

dieser Letzteren entsteht wieder eine weibliche Generation, welche ihrer Grossmutter gleicht und so weiter in steter Abwechselung. Diese wichtige Erscheinung möge zuerst an einigen Beispielen erläutert werden, da es für das richtige Verständniss meiner späteren Darstellung durchaus nothwendig ist, dieselbe fortwährend zu beachten. Später werde ich eine Uebersicht der bis heute bekannten Fälle angeben.

Im Juni findet man an den Spitzen der Eichenzweige sehr oft eine, zuweilen die Dicke eines Decimeters erreichende, schwammige Galle, welche unter dem Namen „Eichapfel" allgemein bekannt ist; oft bilden einige Individuen zusammen eine grosse formlose Masse am Zweigende. Sammelt man diese Gallen, und trocknet sie, so schlüpft daraus Anfang Juli das Insekt Teras terminalis Hartig. Die männlichen Thiere dieser Art (*A* Fig. 12 Taf. I) sind vierflüglig, die Weibchen (*B* Fig. 12) sind entweder gänzlich flügellos oder haben nur vier rudimentäre Flügel. Aus zahlreichen Gallen züchtete ich durchschnittlich etwas mehr Männchen als Weibchen. Im Frühjahr 1880 hatte ich einige Reihen Eicheln in meinem Garten gepflanzt aus welchen viele kräftige Keimpflanzen aufgegangen waren. Ueber dieselben wurde ein grosses Stück Nesseltuch gespannt und darunter am 10ten Juli zahlreiche Terminalis-Männchen und Weibchen gebracht. Einige der befruchteten Weibchen krochen den jungen Eichenstämmchen entlang in den Boden herab und legten ihre Eier in die Hauptwurzel oder in den Wurzelstock *; andere dagegen suchten Zaserwurzeln auf und legten ihre Eier in dünne Wurzelzweige. Im Herbst 1880 wurden einige Pflanzen, in welche wie ich wusste Eier gelegt waren, untersucht und daran erbsen- bis haselnussgrosse Gallen (Fig. 13 Taf. I), welche aus Rindenrissen der Wurzeln oder des Wurzelstocks hervorstachen, gefunden. Diese Gallen sind langsam weiter gewachsen, sodass sie im Sommer 1881 die ansehnliche Grösse von Wallnüssen erreichten; im Herbste letztgenannten Jahres enthielten sie Nymfen und vollkommene Thiere der ungeflügelten, nur im weiblichen Geschlechte vorkommenden, Biorhiza aptera (Fig. 14 Taf. I), welcher man diesen Namen gegeben hat ohne ihre Verwandtschaft mit der Terminaliswespe zu kennen. Dieser Versuch beweist also, dass Biorhiza aptera die weibliche Generation ist, welche sich aus den Eiern der in beiden Geschlechtern vertretenen Teras terminalis entwickelt. Umgekehrt gelingt es leicht den Beweis zu liefern, dass aus den Eiern der Biorhiza aptera Teras terminalis hervorgeht †. Im Winter

* Der Wurzelstock ist der Stammtheil welcher sich oberhalb der Samenlappen unter der Bodenoberfläche befindet.

† Zuerst habe ich dieses mitgetheilt in: Zoölogischer Anzeiger 1880.

nämlich verlässt die Apterawespe ihre Galle, kriecht an den Eichenstämmen hinauf um sich auf die Knospen niederzusetzen und in dieselben Eier zu legen (Fig. 14 Taf. I). Auf welche Weise dieses geschieht wolle man in der speziellen Beschreibung nachlesen; hier genügt darauf hinzuweisen, dass sich aus diesen Eiern in wenigen Monaten die Terminalisgeneration bildet, welche aus den grossen, obengenannten Schwammgallen Anfang Juli hervortritt und gleich ihren Grosseltern ihre Eier in die Eichenwurzeln legt. Man hat also in diesem Falle die folgende Beziehung:

Teras terminalis, ♂ und ♀, Bewohnerin des Eichapfels, erzeugt
Biorhiza aptera, nur ♀, Bewohnerin der Wurzelgalle der Eiche, legt ihre Eier in Eichenknospen und erzeugt wieder
Teras terminalis etc..

Ein weiteres geeignetes Beispiel für die Beleuchtung der Heterogenesis gibt uns die gewöhnliche Wespe der Eichenblätter Dryophanta folii (Fig. 35 Taf. III), welche wie die Biorhiza aptera ebenfalls nur im weiblichen Geschlecht vorkommt. Dieses Thier verlässt im November oder Dezember ihre Galle, sucht sofort ein schlafendes Auge (*cp* Fig. 35) womöglich auf einer alten Eichenmaser, legt auf den Vegetationspunkt (*vp*) desselben ihr Ei, und erzeugt dadurch die kleine, violetfarbige, sammetartig behaarte Taschenbergigalle (Fig. 40 und 41 Taf. III). Die Männchen und Weibchen *dieser* Form verlassen schon im Mai ihre Wohnungen; die befruchteten Weibchen (Fig. 42 Taf. III) stechen in die Rippen junger Eichenblätter und geben dadurch Veranlassung zur Entstehung der Blattgalle, aus welcher im Spätherbst wieder die Dryophanta folii hervorkommt. Hier hat man also:

Spathegaster taschenbergi, ♂ und ♀, Bewohnerin einer violetfarbigen kleinen Knospengalle, erzeugt
Dryophanta folii, nur ♀, Bewohnerin der gewohnlichen Eichen-Blattgalle, erzeugt wieder
Spathegaster taschenbergi etc..

Adler hat diesen Zusammenhang zuerst aufgedeckt; ich habe mit dem besten Erfolge, in den Jahren 1880 und 81 diese Culturen ausgeführt, und dadurch während des Frühjahrs 1881 ein ausgezeichnetes Material zur Untersuchung der jüngeren Zustände der Taschenbergigalle erhalten. Im Freien ist diese Galle erst nach einiger Uebung aufzufinden, weil sie gewöhnlich in den Rindenritzen alter Eichenmasern versteckt ist, und durch ihre Farbe und Kleinheit sehr wenig auffällt. Bei der Cultur im Garten gebrauchte ich, wie oben angeführt, die schlafenden Augen, welche sich an einjährigen Eichenkeimpflanzen befinden über welche sich leicht Gazenetze bringen lassen.

Da ich später die Megapteragalle ausführlich beschreiben werde, so will ich an dieser Stelle die Heterogonese ihrer Bewohnerin Trigonaspis megaptera mit Biorhiza renum gleichfalls kurz besprechen. Auch hier hat zuerst ADLER den wahren Sachverhalt klargelegt, was mit verschiedenen Schwierigkeiten verknüpft war; später habe auch ich mich mit den Gallen der beiden genannten Wespenformen viel beschäftigt und kann ADLER's Ergebniss vollkommen bestätigen. In gleicher Weise, wie die Taschenbergi ist die Megapteragalle (Fig. 59 Taf. IV) durch Umwandlung eines schlafenden Augens entstanden und findet sich im Mai zwischen Moos und Gras am Fusse alter Eichenstämme. Anfang Juni fliegen die männlichen und weiblichen — beide an der rothen Lackfarbe ihres Abdomens leicht zu erkennende — Wespen Trigonaspis megaptera heraus. Die Weibchen legen in derselben Weise, wie oben für Taschenbergi beschrieben, ihre Eier in die Nerven junger noch nicht ganz ausgewachsener Eichenblätter. In Folge dessen entwickelt sich nach langer Larvenruhe eine kleine, grüne, nierenförmige Blattgalle, welche im September aus dem Blattnerven hervorbricht, im November zu Boden fällt, und auf diesem liegend lange Zeit fortlebt; hier überwintert dieselbe, und erst nach Verlauf des ganzen folgenden Sommers kommt daraus das ungeflügelte Wespenweibchen Biorhiza renum hervor. Dieses sucht im Spätherbst wieder schlafende Augen am Fusse alter Eichenstämme auf, legt auf die Vegetationspunkte derselben seine Eier nach Art der Foliiwespe, und veranlasst dadurch das Auftreten einer neuen Generation der Megapteragalle. Also:

Trigonaspis megaptera, ♂ und ♀, Bewohnerin einer Knospengalle, erzeugt
Biorhiza renum, nur ♀, Bewohnerin einer Blattgalle, erzeugt
Trigonaspis megaptera, etc..

Durch eine sorgfältige Untersuchung der Eichenbestände in der Nachbarschaft meines Wohnortes war es mir im März 1879 und 1880 möglich eine reichhaltige Sammlung zahlreicher Entwicklungsstadien der Megapteragalle bei einander zubringen. Die Megapteraweibchen haben im Sommer 1881 in meinem Garten hunderte Eier in die jungen Eichenblätter gelegt, doch habe ich nur einzelne Renumgallen im November 1880 geerntet; besser gelangen die Culturen im Sommer 1881, seitdem ich bemerkt hatte, dass diese Galle gleich derjenigen des Mutterthieres nur kräftig im tiefen Schatten wächst.

Als letztes Beispiel zur Erläuterung der Heterogenesis will ich noch die Beziehung zwischen der Beerengalle der Eiche (Spathegaster baccarum) (Fig. 24 Taf. II) mit der dazu gehörigen Linsengalle (Neuroterus lenticularis) (Fig. 25 Taf. II) kurz beschreiben.

Auch in diesem Falle war ADLER der Erste, welcher die Zusammengehörigkeit der beiden Wespenformen, welche aus diesen Gallen hervorkommen, feststellte;

da die Ausführung der dazu nöthigen Versuche sehr leicht ist, haben verschiedene Beobachter seine Angaben schon bestätigen können. Auch ich habe seit drei Jahren die Baccarumgalle wiederholt aus den Eichenknospen, in welche ich Neuroterus lenticularis Eier legen liess, enstehen sehen. Die Baccarumgalle ist ein wachsartiges Aepfelchen, welches sich im Mai an den jungen Eichenblättern vorfindet, und woraus Anfang Juni die männlichen und weiblichen Baccarumwespen herausschlüpfen. Die Weibchen suchen junge Eichenblätter auf, in welche sie eine sehr grosse Anzahl Eier ziemlich dicht neben einander legen, in Folge dessen die schöne Lenticularisgalle im August aus denselben hervorsprosst. Im September wenn diese Galle reif wird, hat sie die Gestalt einer runden, mit rothen Sternhaaren überdeckten Scheibe von c. a. 5 mM. Mittellinie, welche zu Boden fällt. Hier wächst dieselbe als ein selbständiger Organismus während des Winters langsam weiter und bringt im März das Wespenweibchen Neuroterus lenticularis hervor, welches eine Eichenknospe aufsucht, um in dieselbe Eier zu legen (Fig. 26 Taf. II); kurz nachdem stirbt die Galle. Auch hier haben wir also wieder:

Spathegaster baccarum, ♂ und ♀, Bewohnerin der Beerengalle der Eiche, erzeugt
Neuroterus lenticularis, nur ♀, Bewohnerin einer Linsengalle, erzeugt
Spathegaster baccarum, etc..

Ueberblicken wir die sämmtlichen Angaben betreffs der Geschlechtsverhältnisse der Cynipiden, so kommen wir, wie schon im Anfange hervorgehoben wurde zum Resultate, dass keine Gallwespenarten bekannt sind bei welchen die männlichen und die weiblichen Thiere von Generation zu Generation in ungefähr gleicher Anzahl vorkommen, wie dieses bei den nicht gallbildenden Thieren gewöhnlich zutrifft. In wie weit diese Regel aber allgemeine Gültigkeit besitzt, lässt sich wegen Mangel an Kenntniss in Bezug auf die aussereuropäischen Formen, noch nicht entscheiden.

Dass es unter den Gallwespen gewisse Formen gibt, welche nur im weiblichen Geschlecht existiren, wurde zuerst von Theodor Hartig * sicher bewiesen. So hat er z. B. aus 28000 Gallen der Dryophanta divisa — eine Wespe, welche sich durch ausserordentliche Trägheit für dergleiche Untersuchungen, wo es auf das Abzählen der lebenden Insekten ankommt, besonders eignet — c. a. 10000 weibliche Wespen gezogen und untersucht, ohne dass sich darunter auch nur ein einziges Männchen befand; die übrigen Gallen lieferten Inquilinen und Parasiten

---

* *Zweiter Nachtrag zur Naturgeschichte der Gallwespen,* Germar's Zeitschrift für die Entomologie, Bd. IV, 1843, pag. 398.

oder gingen zu Grunde. Seine Versuche mit der Foliiwespe ergaben ein ähnliches Resultat. „Um solche grosse Insektenmengen zu musteren," sagt HARTIG, „bediene ich mich einer langen Glasröhre aus dünnem Glase dessen innerer Durchmesser die grösste Dimension des Insektes um etwas übersteigt. Diese Glasröhre fülle ich mit den Insekten vermittelst eines aufgekitteten Glastrichters. Hat man beide Enden mit Baumwolle oder Kork verschlossen, so kann man unter Benutzung des besten Lichtes ebenfalls jedes einzelne Exemplar und grosse Mengen rasch und in kurzer Zeit aufs Genaueste beschauen."

Dass solche weibliche Wespen in gewissen Fällen nur die eine Generationsform einer Art darstellen, welche in zweiter Generation sowohl in männlichen wie in weiblichen Exemplaren auftritt, mit diesen Thieren zweierlei Geschlechts also in heterogonetischen Zusammenhang stehen, wurde erst viel später in Amerika von WALSH * entdeckt und von BASSETT näher bestätigt. PACKARD † sagt in dieser Beziehung Folgendes: „Mr. B. D. WALSH has discovered that Cynips quercus aciculata O. SACK., which produces a large gall in the autumn upon the black oak, in the spring of the year succeeding lays eggs which produce disclosing Cynips quercus spongifica O. SACK..... The autumn brood of Cynips consists entirely of agamous females, while the vernal brood consists of both males and females, and Mr. WALSH declares after several experiments that, the agamous autumnal female form of the Cynips (C. q. aciculata) sooner or later reproduces the bisexual vernal form and is thus a mere dimorphous female form of C. q. spongifica." Auch RILEY spricht im Jahre 1877 von der Heterogenesis der Cynipiden als von einem wohl bekannten Factum, er sagt nämlich Folgendes § „One of the most interesting biological features of these gall-flies is the fact that two entirely different galls, produced on the same tree at different seasons of the year, may be made by insects specifically related. Thus there is a large woolly gall, the deformation of a bud which grows on our black oaks in spring and which produces in summer a common gall-fly Cynips quercus operator OSTEN SACKEN which is bisexual. The female oviposits between the acorn and cupula of the previous years setting, and the result is a pip-like gall C. q. operatola RILEY, embedded in that position, and generally about half exposed. These fall with the acorn to the ground, and the second spring succeeding give forth flies which are all females and which produce the woolly galls of spring."

---

* American Entomologist II, pag. 330.

† *Guide to the study of Entomology*, Salem 1872.

§ *Gallinsects*, in „JOHNSON's universal Cyclopaedia," New-York 1877, pag. 422.

Unabhängig von WALSH wurde die Heterogenesis später von H. ADLER in Schleswig aufs Neue entdeckt und beschrieben in seinem „*Beitrag zur Naturgeschichte der Cynipiden*" *. In diesem Aufsatz findet sich der Zusammenhang verzeichnet zwischen Neuroterus lenticularis und Spathegaster baccarum, zwischen Neuroterus numismatis und Spathegaster vesicatrix, zwischen Aphilothrix radicis und Andricus noduli, und zwischen Aphilothrix sieboldi und Andricus testaceipes. — Dann habe ich zuerst im Jahre 1880 † auf die specifische Beziehung zwischen Biorhiza aptera und Teras terminalis hingewiesen. Aber erst im Jahre 1881 hat die Heterogenesis ihre wisschenschaftliche Begründung erhalten durch die schöne Abhandlung ADLER's „*Ueber den Generationswechsel der Eichengallwespen*" §. Seit dem Jahre 1879 wiederholte ich verschiedene der von ADLER angegebenen Culturen und finde seine Beobachtungen überall bestätigt. Auch von anderer Seite, so von GUSTAV MAYR, FLETCHER und LICHTENSTEIN wurden die von ADLER angestellten Versuche wiederholt und die gleichen Resultate erhalten.

Die folgende Tabelle, in welcher die bisher sicher gestellten Fälle van Heterogenesis europäischer Cynipiden aufgenommen sind, ist grösstentheils ADLER's letztgenannter Abhandlung entlehnt. Nur Bathyaspis aceris mit Pediaspis sorbi findet sich bei ADLER nicht: der Zusammenhang dieser beiden Thierformen wurde von GUSTAV MAYR ** festgestellt. Das geflügelte Wespenweibchen Pediaspis sorbi lebt in einer Wurzelgalle von Acer pseudoplatanus in gleicher Weise, wie Biorhiza aptera in den Eichenwurzelgallen; die dazu gehörige geschlechtliche Generation Bathyaspis aceris bildet auf den Blättern der genannten Acerart eine der Baccarumgalle der Eiche ähnliche Blattgalle.

Die in der folgenden Tabelle verzeichneten Flugzeiten beziehen sich auf den Monat in welchem die *Mehrzahl der Individuen* jeder besonderen Art ihre Galle gewöhnlich verlässt, jedoch ist diese Zeit, wie zu erwarten war keine fest bestimmte; so hat u. a. die Art und Weise, wie man die im Freien eingesammelten Gallen aufbewahrt, darauf in gewissen Fällen einen erheblichen Einfluss. Es fanden sich z. B. im vergangenen Winter 1881—82 die Laeviusculuswespen, welche gewöhnlich im März oder selbst im April ausfliegen schon im Dezember ganz fertig in den zu Hause aufbewahrten Gallen; viele Thiere schlüpften

* Deutsche entomologische Zeitschrift 1877, pag. 202.

† Entomologische Nachrichten und Zoölogischer Anzeiger 1880.

§ Zeitschrift für wissenschaftliche Zoölogie 1881, pag. 151.

** *Genera der gallenbewohnenden Cynipiden,* Wien 1881. Inzwischen nach gefälliger brieflicher Mittheilung auch von ADLER constatir

schon im Januar heraus und am 31 dieses Monates sah ich dieselben in meinem Zimmer ihre ersten Eier in die Eichenknospen, welche ich ihnen darbot, niederlegen. Dergleiche, sei es auch geringere Abweichungen von dem normalen Verhalten, werden ebenfalls sehr oft in der freien Natur angetroffen.

An dieser Stelle muss ich noch bemerken, dass ich diejenigen Arten, für welche ich den von ADLER angegebenen heterogonetischen Zusammenhang durch eigene Erfahrung bestätigt gefunden habe, mit ! bezeichne.

	Parthenogenetische Generation.	Flugzeit.	Geschlechtliche Generation.	Flugzeit.
	Aphilothrix autumnalis HARTIG	April.	Andricus ramuli LINNÉ	Juli.
	〃 callidoma HARTIG	April.	〃 cirratus ADLER	Juni.
	〃 collaris HARTIG	April.	〃 curvator HARTIG	Juni.
	〃 corticis LINNÉ	April.	〃 gemmatus ADLER	Juli.
	〃 gemmae LINNÉ	April.	〃 pilosus ADLER	Juni.
!	〃 globuli HARTIG	April.	〃 inflator HARTIG	Juni.
	〃 malpighi ADLER	April.	〃 nudus ADLER	Juni.
!	〃 radicis FABRICIUS	April.	〃 noduli HARTIG	Juli.
!	〃 sieboldi HARTIG	April.	〃 testaceipes HARTIG	Juli.
!	Biorhiza aptera FABRICIUS	Dezember.	Teras terminalis HARTIG	Juli.
!	〃 renum HARTIG	Dezember.	Trigonaspis megaptera PANZER	Mai.
	Dryophanta divisa HARTIG	November.	Spathegaster verrucosa SCHLECHTENDAL	Mai.
!	〃 folii LINNÉ	Dezember.	〃 taschenbergi SCHLECHTENDAL.	Mai.
!	〃 longiventris HARTIG	Dezember.	〃 similis ADLER	Mai.
	Neuroterus fumipennis HARTIG	Mai.	〃 tricolor HARTIG	Juni.
	〃 laeviusculus SCHENCK	März.	〃 albipes SCHENCK	Juni.
!	〃 lenticularis OLIVIER	März.	〃 baccarum LINNÉ	Juni.
	〃 numismatis OLIVIER	April.	〃 vesicatrix SCHLECHTENDAL	Juni.
	Pediaspis sorbi TISCHBEIN	April.	Bathyaspis aceris FÖRSTER	Juli *.

* Nachträgliche Bemerkung. Während des Druckes dieser Abhandlung habe ich gefunden, dass die parthenogenetische Neuroterus ostreus eine bisher unbeschriebene zweigeschlechtliche Generation erzeugt, welche eine kleine, am Knospenringe vorkommende Rindengalle bewohnt, und für welche ich den Namen Neuroterus furunculus vorschlage.

§ 8. *Allgemeines über den anatomischen Bau der Cynipidengallen.* Dass die Eichengallen aus einer meristematischen Zellgruppe entstehen und also in dieser Hinsicht mit den normalen Organen der Pflanzen übereinstimmen, geht aus einer entwicklungsgeschichtlichen Arbeit PRILLIEUX's über die Vesicatrix-, Curvator- und Baccarumgalle hervor und ist von mir in zahlreichen Fällen bestätigt gefunden. PRILLIEUX beschreibt den Process der anfangenden Gallbildung mit den folgenden Worten *... „Formation au dépens du tissu normal de la plante d'un tissu primordial morbide ... Bientôt le tissu primordial se differencie d'une fâçon speciale donnant naissance à des tissus celluleux morbides, qui offrent des caractères particuliers et dont la structure est fort différente de celle des tissus de l'organe qui porte la galle."

Auf Grund meiner eigenen Untersuchungen über diesen Gegenstand ist es mir nöthig vorgekommen das meristemartige Gewebe aus welchem die Gallen entstehen mit dem Namen „Gallplastem" zu belegen. Der Gebrauch des Wortes Meristem schien in diesem Falle nicht erlaubt, weil dadurch ein sehr characteristisches Gewebe bezeichnet wird, welches nicht ohne weiteres mit dem Bildungsgewebe der Gallen gleichgestellt werden kann. Uebrigens sind auch die Plasteme verschiedener Gallenarten unter sich nicht immer vollkommen gleich. Mit dem normalen Meristem stimmt jedoch das Gallplastem insofern überein, als bei beiden die spätere Gewebedifferenzirung, wie ich noch genauer zeigen werde, in derselben Weise stattfindet.

Ueber den histologischen Bau der vollständig ausgebildeten Gallen liegt eine ältere Untersuchung von LACAZE DUTHIERS † vor aus welcher eine unerwartete Mannichfaltigkeit in den Gallengeweben erhellt. Allen von ihm untersuchten Cynipidengallen gemeinsam ist eine eigenthümliche die Larvenkammer bekleidende Gewebemasse, welche wegen ihres Gehaltes an nahrhaften Stoffen, wie Stärke und Eiweiss, und wie ich fand auch Oel, von LACAZE DUTHIERS Nahrungsgewebe (couche alimentaire) genannt wird, und dessen Gesammt-Volumen in umgekehrtem Verhältniss steht zur Grösse der Larve von welcher dasselbe verzehrt wird. Ausserdem enthalten alle Cynipidengallen Gefässbündel, welche in den mehr der Aussenseite zugekehrten Gewebeschichten liegen. Die übrigen von jenem Naturforscher aufgefundenen Gewebeformen weichen bei verschiedenen Gallen sehr von einander ab und lassen sich durch folgende Uebersicht kurz characterisiren.

---

* *Étude sur la formation et le Développement de quelques Galles,* Annales des sciences naturelles, Botanique, 1876, p. 135.

† *Recherches pour servir à l'histoire des Galles,* Annal. d. sc. nat., Botanique, 1853, pag. 273.

1. Bei den am einfachsten gebauten Cynipidengallen ist das parenchymatische Nahrungsgewebe durch eine Rindenschicht von gewöhnlichen, saftführenden Parenchymzellen umgeben in welcher eine veränderliche Zahl von Gefässbündeln in Ringlage angeordnet ist. Dieses Rindenparenchym ist bei den uniloculären * Ostreus-, Albipes-, Baccarum-, Aprilinusgallen † vollständig dünnwandig dagegen mehr oder weniger dickwandig und getüpfelt bei den multilocularen Gallen der Rhodites rosae und R. orthospinae.

2. Bei den Gallen einer zweiten Gruppe wird das Nahrungsgewebe durch eine Steinzellenbekleidung (tissu protecteur) eingeschlossen, der ganze Rest der Galle besteht aus dünnwandigem Parenchym. Beispiele, die Sieboldi-, Globuli-, Numismatis-, Lenticularis-, Fumipennis-, Laeviusculus, Autumnalis-, Renum-, Curvator- und Apteragalle, weiter die multilocularen Radicis- und Hieraciigalle. Die Gesammtheit der Larvenkammer, des Nahrungsgewebes und der Steinzellenschicht solcher Bildungen, werde ich im Folgenden mit den Entomologen „Innengalle" nennen, während dann für alles übrige Gewebe der Namen Gallenrinde gebraucht werden kann; Letztere enthält die Gefässbündel.

3. Zu einer dritten Gruppe gehören solche Gallen, welche ausserhalb ihrer Innengalle nur aus dickwandigen parenchymatischen Elementen bestehen (parenchyme dur), wie z. B. die Longiventris-, Divisa- und Agamagalle.

4. Eine vierte Gruppe umfasst diejenigen Formen deren Innengalle durch eine dicke Schicht eines Schwammgewebes (tissu spongieux), welches aus verzweigten Zellen mit weiten Interzellularräumen besteht, umschlossen wird. Die oberflächlichen Gewebe der Galle sind dabei gewöhnlich zu einer besonderen Hautschicht differenzirt. Beispiele, die uniloculare Argentea- und Folii-, und die multiloculare Terminalisgalle.

5. Endlich ist bei den am meisten complizirten, wie z. B. den Kollari- und Tinctoriagallen, die Innengalle von einem dickwandigen Parenchym, dieses von einem porösen Schwammgewebe und letzteres von einer eigenthümlich differenzirten Hautschicht eingeschlossen. Besonders die Gallen *dieser* Gruppe scheinen mehrere Charactere zu besitzen, welche sich nicht in der normalen Organisation der Nährpflanze nachweisen lassen.

§ 9. *Biologische Eigenschaften der Cynipidengallen.* Malpighi und Darwin

* Die unilocularen oder einkammerigen Gallen schliessen nur eine Larve ein, die multilocularen oder vielkammerigen mehrere.

† Lacaze Duthiers nennt nur die Ostreusgalle, die übrigen füge ich bei auf Grund eigener Untersuchungen; in gleicher Weise werde ich seine Angaben in Bezug auf die anderen Gruppen vervollständigen.

haben die höher organisirten Cynipidengallen mit Phanerogamenfrüchten verglichen und es muss anerkannt werden, dass dieser Vergleich in morphologischer Beziehung bis zu einem gewissen Grade zutreffend ist. Wenn man z. B. eine Gemmaegalle mit einer in ihrer Cupula sitzenden Eichel vergleicht, so ist bei aller Verschiedenheit die Uebereinstimmung doch eine überraschend grosse DARWIN sagt in Bezug auf diesen Umstand * „Or compare on the one hand the fruit of the peach with ist hairy skin, fleshy covering, hard shell and kernel, and on the other hand one of the more complex galls, with its epidermic and spongy and woody layers surrounding tissue loaded with starch-granules. These normal and abnormal structures manifestly present a certain degree of resemblance."

Jedoch müssen die äusseren Bedingungen unter deren Obwalten die natürliche Zuchtwahl, welche im Laufe der Generationen die Eigenschaften der Früchte ins Dasein gerufen hat, offenbar ganz verschieden gewesen sein von denjenigen, welche auf die Charactere der Gallen eingewirkt haben. Ein Beispiel zur Erläuterung. Es wird gegenwärtig allgemein anerkannt, dass eine Kirsche sowohl durch ihr Fruchtfleisch, wie durch ihren Steinkern der Verbreitung durch Vögel angepasst ist. Die Globuligalle, welche im Herbst aus den Eichenknospen zu Boden fällt gleicht in ihrem Bau einer Kirsche ziemlich vollständig, der Schlüssel zur Erklärung ihrer Structur jedoch muss jedenfalls in einem von dem Obigen durchaus verschiedenen biologischen Zwecke gesucht werden. Eine nähere Betrachtung der genannten Galle gibt in dieser Beziehung einige Aufklärung. Dieselbe ist nämlich eine grüne erbsengrosse Kugel, deren äussere Schale fleischig ist und durch ihren Gehalt an Pflanzensäuren und Zucker nicht unangenehm schmeckt; innerhalb dieser fleischigen Schicht liegt die kugelige Innengalle, das heisst die geräumige Larvenkammer sammt dem Nahrungsgewebe und der Steinzellenbekleidung. Da die Galle auf dem Boden überwintert ist man zu der Schlussfolgerung berechtigt, dass die Steinzellenschicht in diesem Falle der überwinternden Larve den nöthigen Schutz verleiht, während das Gallenfleisch, welches bald nach dem Abfallen der Galle vom Baume abstirbt, eine sehr hygroskopische Masse bildet, welche geeignet ist die jugendliche Larve vor einem ihr tödtlichen Austrocknen zu schützen.

Im Allgemeinen kann man in biologischer Hinsicht von den Früchten und den Gallen als sicher betrachten, dass beide in Bezug auf den Besitz schützender Einrichtungen in erster Linie gegen schädliche Thiere und zweitens gegen Clima

---

* *The Variation of Animals and Plants under Domestication*, 1st. Ed. 1868, II, pag. 284.

und Witterungsungunst übereinstimmen. Die Aussäungseinrichtungen der Früchte fehlen den Gallen natürlich vollständig, dagegen haben ihre Schutzmittel zur Abwehr schädlicher Thiere einen weit höheren Grad von Vollkommenheit erreicht, wie bei den Früchten; offenbar findet dieses darin seine Erklärung, dass die Gallen, wie schon früher hervorgehoben wurde, stets in viel höherem Grade den Anfällen der Parasiten, larvenzerstörenden Inquilinen und Vögel ausgesetzt gewesen sind, wie die Mehrzahl der Früchte. Auf viererlei Weisen hat die Natur die Gallen gegen die beiden erstgenannten Thiergruppen bewaffnet: Erstens, durch lange Anhangsgebilde ihrer Oberfläche, welche nicht selten klebende Stoffe abscheiden und Parasiten so wie Inquilinen von der Larvenkammer fern halten (Rosae, Caput medusae, Hartigi, Lucida, Serotina, Ramuli); zweitens, durch eine dicke schwammige Parenchymschicht, welche die Larve ausserhalb des Bereiches der Legeröhre ihrer Feinde bringt (Folii, Argentea, Terminalis); drittens, durch eine sehr geräumige Höhlung innerhalb der Gallenrinde, worin die Innengalle vollständig isolirt und loose, wie ein Hanfkorn in einer Schachtel liegt (Curvator), und viertens durch die festen Steinzellenschichten, welche in vielen Fällen für gewisse Parasiten undurchdringlich sein möchten (Folii wenn jung, Sieboldi). Zahlreiche Gallen besitzen mehrere dieser Schutzmittel zu gleicher Zeit, wie z. B. die Kollari-, Tinctoria-, Hungaricagallen in welchen sich sowohl eine Steinzellenschicht wie Schwammgewebe vorfindet, oder wie die Caputmedusaegalle, welche Anhangsgebilde und Steinzellengewebe hat, etc.. Jedoch gibt es keine einzige Gallwespe, welche vor dem Angriff ihrer Feinde vollständig gesichert ist, was augenscheinlich darin seinen Grund hat, dass die Vervollkommnung der Angriffsmittel der Parasiten mit derjenigen der schützenden Mittel der Gallen gleichen Schritt gehalten hat.

Es gibt gewisse Gallen, wie z. B. die im Mark der Eichenzweige eingeschlossene Noduligalle, welche in Folge ihres eigenthümlichen Standortes gegen schädliche Thiere Schutz finden, besondere Vertheidigungseinrichtungen mithin nicht nöthig haben und dementsprechend einfacher gebaut sind.

Als *indirecte* Schutzmittel gegen Parasiten kann die Kleinheit gewisser Formen und der multiloculare Bau anderer Arten betrachtet werden. Die multilocularen Gallen wie z. B. die Terminalis, Radicis und Orthospinaegalle erreichen häufig eine beträchtliche Grösse, wodurch wenigstens die nahe beim Mittelpunkt der Galle befindlichen Thiere vollständig ausserhalb des Bereiches ihrer Feinde sind. Jedoch wird durch den vielkammerigen Bau, — und dieses gilt ebenfalls für die kleineren Formen, wie die Hieracii-, Rosae-, Aptera- und Rubigalle, — noch ein anderer wichtiger Vortheil erlangt, nämlich dieser, dass nur eine *einmalige* Vorbereitung der Unterlage zur Aufnahme vieler Eier erfordert wird, wodurch die

Gallenmütter bei dem Eierlegen, es sei in Knospen, Wurzeln u. s. w., viel Zeit ersparen.

Der Schutz gegen Vögel ist auf zweierlei Weisen zu Stande gekommen, nämlich erstens durch den Gerbstoffgehalt in der Gallenrinde, welche die ganze Galle ungeniessbar macht (Kollari, Tinctoria, Terminalis, Folii, Megaptera), und zweitens durch Steinzellenschichten, welche dem Vogelschnabel Widerstand leisten (Sieboldi, Rhizomae). Dass der Gerbstoff hier wirklich als Schutzmittel gegen Vögel functionirt folgt hieraus, dass Hühner und Truthühner zu Boden liegende Folii oder Terminalisgallen zwar anpicken, dieselben jedoch, offenbar durch den widerlichen Geschmack abgeschreckt, sogleich wieder fallen lassen. Dagegen werden die gerbstoffarmen aber stärkereichen Lenticularisgallen von den genannten Vögeln sowie von Finken gern gefressen. Der im Pflanzenreich einzig dastehende Gerbstoffgehalt der Tinctoriagalle, welche 80 pCt. der Trockensubstanz betragen kann, oder der zwar viel kleinere immerhin aber noch beträchtliche Gehalt der unreifen Kollarigallen, welche circa 30 pCt. des Gewichtes der trockenen Gewebe ausmachen kann, wird dadurch einigermaassen erklärlich. Es leuchtet ein dass, wenn diese Auffassung des Nutzens des Gerbstoffes die richist, die jungen, weichen, saftreichen Gallen dessen mehr bedürftig sein müssen, wie die vollständig ausgewachsenen Exemplare, wodurch zu gleicher Zeit die praktische Erfahrung erklärt wird, dass die unreif gesammelten Galläpfel des Handels, welche noch keine Fluglöcher besitzen, besser sind wie diejenigen aus welchen die Wespen ausgeflogen sind. Bei der Beurtheilung letztgenannter Thatsache muss man in Betracht ziehen, dass die natürliche Zuchtwahl keinen Einfluss ausüben konnte auf die Enstehung besonderer Einrichtungen, welche einem Gerbstoffverluste seitens den von den Wespen verlassenen Gallen durch Ausregenen oder in anderer Weise vorzubeugen vermögen, da ein solcher für die Gallwespe offenbar gleichgültig ist.

Es dürfte der Gerbsäure im Pflanzenreich überhaupt eine ähnliche Bedeutung zukommen, wie in den Gallen, nämlich den Pflanzen Schutz zu verleihen gegen gewisse schädliche Thiere.

Von gewissen Waldvögeln werden die Schutzmittel der Gallen nur wenig geachtet; so habe ich bei Roozendaal ganze Reihen junger Eichenbäumchen in einer Baumschule gesehen, welche mit Kollarigallen schwer beladen waren und wo die Mehrheit der Gallen ein von einem Vogel verfertigtigtes Loch in ihrer Rinde hatten durch welches die Larve herausgerissen war. Auch bei der Megapteragalle habe ich bisweilen Aehnliches gesehen. Weiter habe ich an kalten Wintertagen Sieboldigallen von Vögeln vernichtet und die Insassen zerfressen gefunden, das Steinzellengewebe solcher Gallen lag neben dem Zweige auf welche

letztere befestigt gewesen waren, in kleine Stücke zertrümmert auf dem Schnee. RATZEBURG sah Aehnliches bei den Gallen von Rhodites rosae und er vermuthete, dass die herumfliegenden Meisen die Larven verzehrt hatten.

Anbetreffs der Schutzwehr der Gallen gegen Clima und Witterungsungunst sei hier auf das Fortleben vieler Formen während dieselben zu Boden überwinteren, als einfache und schöne Anpassung hingewiesen (Laeviusculus, Numismatis, Lenticularis und in beschränkterem Maasse auch Autumnalis, Ostreus und Renum). Hierbei wird die Stärke, welche zur Zeit des Abfallens reichlich in der Gallenrinde abgesetzt ist, aufgebraucht und die Gallen wachsen dabei bedeutend, zu gleicher Zeit nehmen sie besondere Farben an, welche es schwierig machen dieselben von ihrer Umgebung zu unterscheiden (Ostreus, Renum). Zur Zeit wenn diese Gallen im Herbste von den Blättern abgeworfen werden sind die darin eingeschlossenen Larven noch mikroskopisch klein, genau kugelförmig (*lk* Fig. 25 T. II) und allseitig mit dem Nahrungsgewebe der Larvenkammer in Berührung: erst nachdem die Gallen zu Boden gefallen sind wachsen die Thiere schnell weiter; leicht gelingt es solche Gallen im Zimmer auf feuchtem Sande, weiter zu cultiviren und die Thiere zur Reife zu bringen. — Dass das Fortleben der Gallen, nachdem sie von ihrer Nährpflanze getrennt sind, eine besonders nützliche Eigenschaft für die Gallenthiere sein muss geht aus der erstaunlich grossen Individuenzahl eben solcher Formen hervor. Alljährlich bin ich in der Lage mich von der ausserordentlichen Häufigkeit dieser Gallen im Allgemeinen und besonders von der Laeviusculusgalle im Monate Oktober in den Eichenwäldern bei Wageningen und de Grebbe zu überzeugen, indem die von den Eichenblättern sich ablösenden und von Blatt zu Blatt hinunterstürzenden Gallen so massenhaft vorkommen, dass sie sich durch ein förmliches Kletteren kundgeben.

Es mögen an dieser Stelle noch einige Bemerkungen über die Lebensdauer der Gallen Platz finden, da diese in vielseitiger Beziehung steht mit den biologischen Verhältnissen der Gallenbewohner an sich, und demzufolge mit der Jahreszeit in welcher die Gallen entstehen. Die Gallen sind meistens vergängliche Gebilde und stimmen auch darin mit den Früchten überein. Eine Baccarumgalle kann ihr ganzes Leben innerhalb dreier Monate vollenden; es kann nämlich die Gallenmutter Neuroterus lenticularis Anfang April ihr Ei in eine Eichenknospe legen und die dadurch erzeugte Beerengalle in den ersten Junitagen vollständig ausreifen, die Baccarumwespe hervorbringen und noch am Ende des nämlichen Monates vertrocknen. So ist es ebenfalls bisweilen mit der Megaptera, obschon in diesem Falle die Eier seitens der Gallenmutter Biorhiza renum gewöhnlich weit früher gelegt werden. Werden aber diese Gallen von Inquilinen heimge-

sucht so kann sich ihre Lebensdauer weit über das genannte Maass verlängern, da bei den von Insekten bewohnten Früchten gerade das Gegentheil stattfindet, — man denke zum Beispiel an die Frühreife der Aepfel, welche eine Raupe (Carpocapsa pomonana) einschliessen, — so scheint man berechtigt zu sein zu schliessen, dass der Einfluss der Inquilinen auf das Wachsthum der Galle, auf besondere Adaptationen seitens dieser Thiere selbst beruht.

Im Allgemeinen haben die Frühlingsgallen, welche bei dem Oeffnen der Knospen an den Blättern (wie Albipes, Verrucosa, Baccarum, Tricolor) oder aus schlafenden Augen (wie Taschenbergi, Similis und Megaptera) entstehen, die kürzeste Lebensdauer. Eine Ausnahme von dieser Regel sind die Inflator-, Vesicatrix- und Curvatorgalle deren Rindenpartie, längst nachdem die Galle von dem Insassen verlassen ist noch fortlebt; die Curvator- und Vesicatrixgalle, welche aus den Blättern der Eiche entstehen, leben so lange wie das Blatt selbst, die Inflatorgalle jedoch, welche das Umwandlungsproduct eines Sprosses ist, perennirt und erzeugt in den nachfolgenden Jahren neue und ganz normale Sprosse aus ihren Seitenknospen. — Diejenigen Gallen, welche während des Hochsommers aus den Blättern und den Sommerknospen brechen haben zwar ein längeres Leben, jedoch ist diese Länge sehr verschieden bei den verschiedenen Arten. Dabei lassen sich die vier folgenden Fälle unterscheiden: *erstens*, die Galle stirbt noch am Ende des nämlichen Sommers in welchem sie enstand (Solitaria, Gemmae, Kollari, Orthospinae, Rosae); *zweitens*, die Galle stirbt während des Winters des nämlichen Jahres in welchem sie enstand (Folii, Globuli, Collaris, Ostreus, Autumnalis); *drittens*, sie überwintert und stirbt erst im nächsten Frühjahre, ihre Lebensdauer beträgt daher c. a. 9 Monate (Numismatis, Laeviusculus, Lenticularis, Fumipennis, Renum), und *viertens*, die Galle stirbt erst im Winter des nächstfolgenden Jahres; die Lebensdauer der Galle beträgt daher c. a. 14 Monate, solche Gallen können daher zweijährig genannt werden (Radicis, Aptera, Sieboldi).

Die Zeit des Auschlüpfens der Wespe steht, wie schon oben hervorgehoben, im Allgemeinen in Beziehung zur Lebensdauer der Galle, jedoch können im Einzelnen nicht unerhebliche Abweichungen von dieser Regel vorkommen. Zahlreiche Gallen müssen nämlich sebst noch dann wenn sie schon längst gestorben sind, ihren lebendigen Bewohnern Schutz verleihen, wie dieses z. B. bei Gemmae, Radicis und Sieboldi der Fall ist; in anderen Fällen dagagen können die Gallen noch eine erhebliche Zeit fortleben nachdem die Wespen schon ausgeflogen sind, wie z. B. Longiventris, Folii und Numismatisgalle, sowie die drei oben besprochenen, von Andricus inflator, A. curvator und Spathegaster vesicatrix bewohnten Frühlingsgallen.

KAPITEL II.

DIE HIERACIIGALLE *.

Tafel I Figur 1—11.

§ 1. *Beschreibung, Verbreitung und Vorkommen der Galle.* Ich werde mich in diesem Kapitel mit den knolligen, bisweilen die Grösse einer Wallnuss erreichenden Stengelanschwellungen beschäftigen, welche in den Dünen und an waldigen Orten, wie es scheint über das ganze westliche Europa an verschiedenen Hieraciumarten gefunden werden. In Niederland findet man die Galle an Hieracium vulgatum, H. umbellatum und H. rigidum †, ob die daraus hervorkommenden Aulaxformen jedoch spezifisch gleichgestellt werden können würde ich nicht sicher behaupten dürfen, da ich meine Culturversuche der Galle nicht speziell zur Beantwortung dieser Frage angestellt habe; jedenfalls sind die aus Gallen verschiedener Hieraciumarten gezüchteten Bewohner in Farbe und Grösse ziemlich variabel. Dazu werden von verschiedenen Autoren noch Hieracium lanatum, H. boreale, H. sabaudum und H. murorum als Nährpflanzen der Hieraciigallen angegeben, wodurch die Identität der Urheberinen der Gallen noch unwahrscheinlicher wird. Wie es sich nun aber auch herausstellen möchte, sei es, dass alle knollenartige Gallen der genannten Pflanzenspecies von einer einzigen Aulaxart bewohnt werden, oder, was wahrscheinlicher ist, dass mehrere spezifisch verschiedene Thiere dabei betheiligt sind, — jedenfalls besitzt diese Frage für die folgende Darstellung nur untergeordnete Bedeutung, da die Entwicklungsgeschichte, die uns hier zunächst interessirt, wohl überall die nämliche sein muss; hier will ich mich desshalb der gegenwärtig gehegten Ansicht anschliessen und die verschiedenen Formen unter den Namen Aulax hieracii zusammenfassen, jedoch werde ich in § 2 auf diese Frage noch kurz zurückkommen.

Ende Juli oder Anfang August ist die Galle ausgewachsen. Gewöhnlich ist die ganze Oberfläche derselben mit Blättern vollkommen normaler Ausbildung besetzt, so z. B. bei den an Hieracium rigidum (Fig. 1 Taf. I) vorkommenden

---

* Bewohnt von Aulax hieracii BOUCHÉ.

† Die Artnamen der Hieracien nach KOCH, *Taschenbuch der deutschen und schweizer Flora*, 6e Aufl.. Hieracium rigidum und H. umbellatum stehen einander so nahe, dass sie nicht immer sicher zu unterscheiden sind.

Formen; bei Hieracium vulgatum und oft auch bei H. umbellatum stehen in den Blattachseln auf der Oberfläche der Galle gewöhnlich mehrere Blüthenspindeln. Die Oberhaut der Galle ist besonders an Hieracium vulgatum und H. umbellatum stark behaart, dagegen bei H. rigidum bisweilen gänzlich glatt, in anderen Fällen theilweise behaart. Die leichtgrünen Streifen, welche besonders den Rigidumgallen eigenthümlich sind, markiren diejenigen Stellen wo sich subepidermale Collenchymbündel (*cb* Fig. 9) vorfinden, je drei derselben treten von den Blättern auf den Stengel oder auf die Galle über.

Aus dem Querschnitt der erwachsenen Galle (Fig. 2) zu Ende des Monates Juli ergiebt sich, dass die Structur derselben im Allgemeinen mit derjenigen des normalen Stengels übereinstimmt indem sich darin Rinde, Fibrovasalstränge und Mark unterscheiden lassen; im Einzelnen zeigt die Galle jedoch sehr erhebliche Abweichungen von dem normalen Stengelbau, wie später dargelegt werden soll. Aus einer näheren Betrachtung der Fig. 2 geht hervor, dass sich nahezu in der Mitte der Galle, allseitig von dem Mark eingeschlossen, eine Höhlung (*eh*) sehr unregelmässiger Gestalt vorfindet, welche mit Bezug auf ihren Ursprung weiterhin die „Eihöhlung" genannt werden wird; successive Querschnitte eines eine Galle tragenden Stengels zeigen, dass diese Eihöhlung sich in die normalen nicht durch Gallenwuchs affizirte Stengeltheile sowohl unterhalb (*eh* Fig. 1) wie oberhalb der Galle verfolgen lässt und eine Länge von 2—3 dM. erreichen kann. Die Gestalt der Eihöhlung bestimmt bis zu einem gewissen Grade die Anordnung der Larvenkammern (*lk* Fig. 2); diese haben eine längliche Form und werden von einer Bekleidung sehr dickwandiger Tüpfelzellen (*ss* Fig. 3) geschützt; diese Bekleidung kann nachdem sie ihre vollständige Ausbildung erlangt hat stellenweise Gefässbündelzweige einschliessen. Dieses war z. B. der Fall in dem Präparate nach welchem, am 28. Juli 1881, die Figur 3 gezeichnet wurde. Diese Figur stellt eine Larvenkammer dar mit eingeschlossener Larve (*Lk*), die Schicht dickwandiger Zellen ist von den beiden punktirten Linien begrenzt und zwei starke Gefässbündel (*gb*) unterbrechen die Continuität derselben; solche Gefässbündel, welche offenbar im Mark entstanden sind, sind sekundären Ursprunges; dieselben werden nur in den Gallen gefunden, und fehlen den normalen Stengeln. So lange die Larve noch nicht gänzlich ausgewachsen ist, also den Nymfenzustand noch nicht erreicht hat, sind diejenigen Zellen (*ng* Fig. 3), welche den Larvenkörper unmittelbar berühren durch ihren eigenthümlichen Inhalt ausgezeichnet; sie sind die alleinige Nahrung des Thieres und werden in den ganz reifen Gallen nicht mehr angetroffen da sie von dem Thiere vollständig verzehrt werden. Man kann daher ihre Gesammtheit mit dem Namen „Nahrungswebe" bezeichnen, wie dieses auch weiterhin in den vorliegenden Seiten stets geschehen

soll; nicht nur in der Hiraciigalle sondern auch in allen anderen untersuchten Cynipidengallen ist ein solches Nahrungsgewebe aufgefunden geworden. Der Inhalt der Zellen des Nahrungsgewebes besteht aus trüblichem, körnigem Protoplasma, welches nach der Behandlung mit Kupfervitriol und Kali eine schöne Eiweissreaction gibt, und durch erwärmen mit Schwefelsäure zahlreiche Oeltröpfchen austreten lässt; die Wand dieser Zellen ist immer sehr dünn. Da die mikroskopische Structur des reifen Nahrungsgewebes der Hieraciigalle übereinstimmt mit derjenigen des gleichnamigen Gewebes der auf Eichenblättern vorkommenden Baccarumgalle kann das Nahrungsgewebe Letzterer (*ng* Fig. 24 Taf. II), die Hieraciigalle in dieser Hinsicht versinnlichen.

Zwischen den Nahrungszellen (*ng*) und dem Steinzellengewebe (*ss* Fig. 3 Taf. I) findet sich in den Hieraciigallen, so lange die Larven den Nymfenzustand noch nicht erreicht haben, ein saftführendes Parenchym (*sp* Fig 3), welches grösstentheils als Muttergewebe der Nahrungszellen betrachtet werden kann; in dem Maassen nämlich, wie diese von der Larve verzehrt werden, werden die dadurch verloren gegangenen Zellen aus dem genannten Parenchym wieder regenerirt, indem Letzteres sich von innen nach aussen mit Eiweiss und Oel anfüllt, jedoch bleiben die dem Steinzellengewebe angrenzenden Zellen des Saftparenchyms gewöhnlich unverändert.

Das Steinzellengewebe der Larvenkammern ist, wie schon oben hervorgehoben, von dem Marke eingeschlossen; mit Ausschluss der sekundären Gefässbündel, welche in diesem durch die Gallbildung entstanden sind, besteht das Mark aus grossen dünnwandigen Zellen mit zahlreichen Interzellularräumen, zufolge dessen die Querschnitte abgestorbener und vertrockneter Gallen im Winter eine schneeweisse Farbe und eine sehr poröse Textur aufzeigen. — Die primären Gefässbündel des gallbildenden Stengels zeigen selbst noch in den gänzlich reifen Gallen mit grösserer oder geringerer Schärfe ihre ursprüngliche, ringförmige Anordnung auf der Aussenseite des Markes; dieselben laufen nicht mehr, wie in den normalen Stengeln genau vertical von oben nach unten, sondern sie können in den Gallen einen sehr geschlängelten und daher theilweise selbst einen vollständig horizontalen Verlauf erhalten haben.

Um die Aussenseite der Gefässbündel herum finden sich einige Schichten farbloser Rindenzellen (*fr* Fig. 9), welche besonders in den jungen Stengeln und Gallen eine grössere Ausdehnung besitzen, dagegen in den reifen Gallen nur schwierig von den übrigen Geweben zu unterscheiden sind. An der Peripherie der Galle endlich findet sich die von der Epidermis überzogene grüne Rinde (*gd* Fig. 9), welche stellenweise von den aus den Blättern absteigenden Collenchymbündeln (*cb* Fig. 9) ersetzt wird.

Das Thier überwintert im Larvenzustand in der Galle; diese selbst stirbt im Herbste mit dem ganzen Kraute von welchem sie getragen wird ab und wird im Winter als weissgebleichtes, sehr leichtes Gebilde aufgefunden.

§ 2. *Aufzucht der Wespe. Cultur der Galle im Garten.* In gleicher Weise, wie bei den im Freien vorkommenden, schlüpfen die Wespen aus den im Herbst eingesammelten, zu Hause aufbewahrten Gallen Ende Mai heraus. Wie schon bemerkt wurde, erhält man aus verschiedenen Exemplaren der Hieraciigalle Wespen die in einzelnen Merkmalen von einander abweichen. So kamen aus meinen Rigidumgallen grössere, beinahe ganz schwarze Wespen, aus den Vulgatumgallen dagegen kleinere braun gezeichnete Individuen, für welche die HARTIG'sche Diagnose * zutreffend war. — Bei meinen Culturversuchen der Galle habe ich in erster Linie einige Weibchen, welche ihren Gallen eben entschlüpft, also sicher nicht befruchtet waren, und zweitens Weibchen und Männchen zusammen unter Bechergläser gebracht, welche über in meinem Garten angepflanzte Stöcke von Hieracium rigidum und vulgatum gestellt waren (Mai 1880 und 81). In beiden Fällen fand ein sehr ausgiebiges Eierlegen statt, und an einer Reihe von Versuchspflanzen bildeten sich sogar Gallen. Hierbei habe ich aus Vulgatumgallen herkünftige Thiere nur an Vulgatumpflanzen, aus Rigidumgallen gezogene nur an Rigidumstöcken stechen lassen; ich kann diese Versuche desshalb nicht als abgeschlossen betrachten, und zwar um so weniger, als ich bisher mit Hieracium umbellatum gar nicht experimentiren konnte. Trotz der Unvollständigkeit dieser Versuche meine ich jedoch sicher daraus schliessen zu können, dass in veschiedenen Fällen unbefruchtete Weibchen an Hieracium rigidum Gallen erzeugt haben, für H. vulgatum konnte ich dieses nicht sicher constatiren.

Bei Hieracium murorum, welche ich im Winter 1880—81 bei Oosterbeek gesammelt hatte, gelangen die Culturversuche der Galle nicht. Zur Zeit des Eierlegens waren diese Pflanzen nämlich im Garten sowie im Freien durch ihre schon weit vorgeschrittene Blüthenbildung zur Aufnahme der Eier nicht mehr geeignet; die Wespen haben denn auch die unter Bechergläser gestellten Pflanzen dieser Art nicht einmal angestochen, und sind, nachdem sie darunter mehrere Wochen gelebt hatten, gestorben. Ich glaube desshalb, dass diejenigen Autoren, welche auf Hieracium murorum Aulaxgallen gefunden zu haben angeben (angenommen, dass sie sich bezüglich der Species der Pflanze nicht irrten), eine be-

* Zeitschrift für die Entomologie 1840 pag. 195, unter Aulax Sabaudi HARTIG.

sondere Aulaxart vor sich gehabt haben. Ich halte dieses besonders darum für wahrscheinlich, weil gewisse, für so weit mir bekannt bisher unbeschriebene und von der Hieraciiwespe sehr verschiedene Aulaxspecies an den Blättern von Hieracium pilosella und am Stengel von Lampsana communis Gallen erzeugen *.

Schon bei oberflächlicher Betrachtung kann man die Hieraciumsprosse, welche Eier enthalten von den nicht infizirten unterscheiden, da die ersteren an den Stellen der Verwundung mit kleinen braunen Krusten besetzt sind. Diese Krusten enstehen durch das Eintrocknen des Milchsaftes, welchen die Pflanze unmittelbar nach dem Stiche über die Wunde ergiesst, um dieselbe zu schliessen †. Durch dieses Merkmal gelang es mir wiederholt, selbst im Freien die Eier enthaltenden Pflanzen von den unversehrten zu unterscheiden und mehrere dergleichen Exemplare für die weitere Untersuchung zu sammelen.

§ 3. *Die Lage der Eier in dem Hieraciumstengel.* Der Legeapparat der Hieraciiwespe, sowie ein aus dem Körper des Thieres isolirtes Ei finden sich in *A* und *B* Fig. 4 dargestellt. Der Bau des ganzen Apparates stimmt so genau mit der Kap. I § 5 gegebenen allgemeinen Beschreibung überein, dass es unnöthig ist, dabei an dieser Stelle lange zu verweilen; nur muss bemerkt werden, dass bei Aulax (und ebenfalls bei Rhodites) die chitinöse Quadratische-Platte (*Qp* Fig. 4 *A*) aus zwei Gliedern besteht, welche durch ein häutiges Band mit einander verbunden sind. Ferner sind die beiderseitigen Endglieder der linken und rechten Quadratischen-Platte, hier viel deutlicher wie bei den anderen Cynipiden mit einander verwachsen, infolge dessen sie einen einzigen „Rückenring“ darstellen. Wie man sieht beträgt die Länge des Eistieles (*Es* Fig. 4 *B*) noch nicht die Hälfte von derjenigen der eigentlichen Legeröhre.

Gehen wir zum Eierlegen selbst über. Unmittelbar, nachdem die Hieraciiwespe ihre Galle verlassen hat, sucht sie sich eine Hieraciumpflanze auf, setzt sich zwischen oder auf die jungen, in der Nähe des Vegetationspunktes eines kräftigen Sprosses befindlichen Blättchen und beginnt ihre Arbeit. An einer Stelle, wo der junge Stengel dünner ist, als die Länge ihrer Legeröhre, also in sehr geringer Entfernung des Vegetationspunktes (*vp* Fig. 5), sticht sie ihren Bohrap-

---

* Es wäre sehr erwünscht, dass die oben beschriebenen Versuche an anderen Orten und unter anderen Verhältnissen wiederholt würden. Jeder kann sich die Gelegenheit dazu leicht verschaffen; man braucht nur im Winter einige Hieraciumpflanzen aus dem Freien in den Garten zu bringen, so sind dieselben im nächsten Frühjahr für das Eierlegen der Aulaxwespen ganz geeignet.

† Ueber die Function des Milchsaftes, Wunden zu schliessen, findet man Näheres bei HUGO DE VRIES in „Landwirthschaftliche Jahrbücher", 1881, pag. 687, und in „Archives Néerlandaises", T. XVII.

parat quer durch einige Blättchen verschiedenen Alters bis tief in den Stengel hinein. Stunden, ja Tage lang verharrt sie an derselben Stelle, und es ist keine Seltenheit, im Freien todte Thiere anzutreffen, welche mittelst ihrer im Bohrloch steckenden Legeröhre, mit der Pflanze in Verbindung geblieben sind. Findet man Letztere kurz nach Beendigung des Eierlegens, so sind solche Funde sehr lehrreich, denn sie zeigen auf den ersten Blick, die ursprüngliche Verwundungsstelle im Stengel, welche sehr klein und im Allgemeinen schwierig aufzufinden ist. Letztere Schwierigkeit erklärt sich dadurch, dass die Wunden in den durchbohrten Blättchen durch das sehr intensive Wachsthum der Stengelregion, von welcher Letztere getragen werden, schon nach wenigen Tagen weit entfernt von der Verwundungsstelle des Stengels selbst, liegen können. Trägt man der Weise, wie diese Verlängerung, — welche von Sachs „grosse Periode des Wachsthums" genannt worden ist *, — zu Stande kommt, Rechnung, so wird es bisweilen möglich, auf die Stichstelle im Stengel dadurch zurück zu schliessen, dass man die verschiedenen Wundstellen der Blätter in Gedanken combinirt.

Aus im Mai verfertigten Längsschnitten, welche sowohl durch den Vegetationspunkt (*vp* Fig. 5), wie durch das Bohrloch (*bl* Fig. 5 *b*) Eier enthaltender Stengel gehen, sieht man, dass die Wespe innerhalb des Gefässbündelringes der Stengelspitze eine Birn förmige „Eihöhlung" (*eh* Fig. 5) gemacht und darin ihre Eier gelegt hat; die Stiele der Eier haben eine nahezu parallele Lage und finden sich gewöhnlich im unteren engeren Theile der Höhlung vor. Diese Höhlung schliesst sich bei den verschiedenen Vorgängen des Gallenwachsthums niemals vollständig; wir hatten auch bereits Gelegenheit, dieselbe in den reifen Gallen (*eh* Fig. 1 und 2) kennen zu lernen. In wohlgelungenen Schnitten junger, Eier einschliessender Stengelspitzen bemerkte ich das Bohrloch (*bl* Fig. 5 *b*) am oberen geräumigen Theile der Eihöhlung. Durch Entfernung der Eier (*eh* Fig. 5 *b*) ergiebt sich, dass die innere Wand der Eihöhlung mit einer dünnen, braunen, teigigen Schicht überzogen ist, welche anscheinend aus dem Milchsaft, den die verwundeten Milchröhren über die ganze innere Wundfläche ergossen haben, und den getötedten Zellen enstanden ist. Durch diese Schicht todter Substanz sind die Eikörper von den lebendigen pflanzlichen Zellen getrennt.

§ 4. *Die Hieraciilarven in der Eihöhlung.* Da der Eier enthaltende Stengel schnell wächst, so muss die Eihöhlung, welche sich gerade in demjenigen Stengeltheile vorfindet, der noch alle Phasen des Längenwachsthums zu durchlaufen hat, sehr stark in die Länge ausgezogen werden, und hierdurch erklärt sich

---

* *Lehrbuch der Botanik*, 4te. Aufl. 1876, pag. 788.

die Enstehung des in § 1 erwähnten Hohlkanales (*eh* Fig. 1), welcher sich in jedem Gallen tragenden Stengel vorfindet. Da der obere Theil der Wand des ursprünglichen, mit Eiern vollständig angefüllten Hohlraumes in Folge des Längenwachsthums sich stärker, wie der unterere Theil der Wand dieses Raumes vergrössert, so muss weil die Galle ungefähr aus dem mittleren Theil dieser Wand entsteht, der Hohlkanal unterhalb der reifen Galle im Allgemeinen länger sein wie oberhalb derselben. Es lässt sich leicht einsehen, dass Eier, welche beim Längenwachsthum des Stengels zufälliger Weise an der oberen, oder der unteren Partie der Wand der Eihölung kleben bleiben, sich von ihrem ursprünglichen Ablagerungsorte entfernen müssen, und dadurch an jeder beliebigen Stelle des Hohlkanales zur Gallbildung Veranlassung geben können. Oft bleibt die ganze Eiersammlung bei der Verlängerung mit dem oberen Wandtheil der Eihöhlung verklebt, wodurch vollständig terminale Gallen entstehen; solche Gallen liefern zugleich den Beweis, dass die Gewebe des Vegetationspunktes, nachdem das Eierlegen stattgefunden hat an dem eigentlichen Längenwachsthum des Stengels kaum mehr Antheil nehmen.

Gleichzeitig mit dem zu Stande kommen dieses Längenwachsthums werden in der Umgebung des Hohlkanales zahlreiche abnorme Zelltheilungen sichtbar; die neuen Theilwände sind dabei, in Uebereinstimmung mit der von SACHS aufgestellten Regel, zur Wundfläche zum Theil parallel, zum Theil senkrecht gestellt, jedoch bleibt eine eigentliche, den Hohlkanal verstopfende Calluswucherung, welche man unter solchen Umständen erwarten könnte, gänzlich aus, die Eihöhlung daher offen.

Die Larvenentwickelung aus den Eiern beginnt bald nach der Eiablage, sodass man an den ersten Junitagen den Larvenkörper innerhalb der Eischale in dem in Figur 6 dargestellten Entwicklungsstadium findet. Da die Dotterfurchung, wie bei den Cynipideneiern im Allgemeinen, eine partielle ist, so liegt in dem länglichen Embryonalleibe ein ebenfalls länglicher Nahrungsdotter (*Nd*) eingebettet; die Keimhaut (*Ht*) zeigt ihre zellige Struktur besonders deutlich, und erfährt am oberen, dem Eistiel zugekehrten Pole des Eikörpers bald eine Einbuchtung (*Os*), welche die erste Anlage der Mundöffnung darstellt. Der ganze Embryonalleib ist bekanntich von der Embryonalhaut (Faltenhautblatt) vollständig eingeschlossen, welche jedoch in der Figur nicht angegeben ist.

Während der Ausbildung der Larven innerhalb der Eischalen, steigert sich die Zelltheilung in den benachbarten pflanzlichen Geweben allmählich ausserordentlich, äusserlich giebt dieses sich dadurch kund, dass der Stengel, an der Stelle wo sich die Eihöhlung befindet, beträchtlich anschwillt und sich dabei nicht selten ein Wenig krümmt. Gleichzeitig mit dieser Verdickung des Stengels vergrössert

*

sich der innere Durchmesser der Eihöhlung ansehnlich, und die braune, oben erwähnte, aus dem Milchsaft enstandene Kruste wird dabei in schuppenartige Stücke aus einander gezogen (*kq* Fig. 7).

Inzwischen verlassen die Larven ihre Eischalen und können nun ganz frei in der geräumigen Eihöhlung umherkriechen (*Lk* Fig. 7), werden sich jedoch gewöhnlich — die Thiere sind mikroskopisch klein — wohl nicht weit von ihrer Geburtsstätte entfernen; in ihrem Körper erblickt man noch stets den grossen Nahrungsdotter. Was die Eihöhlung selbst anbelangt, diese kann zur Zeit des Ausschlüpfens der Larven zu einer Länge von 1 dM. angewachsen sein. Es giebt also zwei Ursachen, warum die Hieraciigalle sich nicht nothwendig an derjenigen Stelle, an welcher die Eier ursprünglich gelegt wurden, bilden muss. Erstens nämlich kann die ganze Eiersammlung, wie oben angeführt wurde, durch das Wachsthum des jungen Stengels auseinander gezogen werden, und zweitens besitzen die Larven, ehe sie von den Gallengeweben eingeschlossen werden, die Fähigkeit, sich frei in der Eihöhlung zu bewegen; hieraus erklärt sich der Umstand, dass man häufig Hieraciumstengel antrifft, welche eine Reihe von drei oder mehr Gallen über einander tragen, welche über der ganzen Länge des Stengels vertheilt sind. Unter solchen schnurweise angeordneten Bildungen finden sich oft einzelne Glieder, welche nur zwei oder drei, oder selbst nur eine einzige Larvenkammer einschliessen.

§ 5. *Die Einschliessung der Larven durch das Gallplastem.* Während der Zeit, in welcher die Larven im freien Zustande innerhalb der Pflanzen leben, entstehen in dem Wandungsgewebe der Eihöhlung, mit welchem sie durch Adhäsion verklebt sind, zahlreiche neue Zellen durch Zelltheilung und zwar bis in eine beträchtliche Entfernung von der inneren Oberfläche. Demzufolge bekleidet sich die Eihöhlung überall dort, wo sich Thiere vorfinden, mit einer dicken kleinzelligen Gewebeschicht, während an denjenigen Stellen derselben welche keine Larven berühren, die pflanzlichen Gewebe anfänglich unverändert bleiben. Das secundäre Gewebe, welches in diesem Falle, also offenbar durch die Wirkung der freibeweglichen Larven entsteht, belege ich mit dem Namen „Gallplastem", weil es (hier wie in anderen Fällen) das eigentliche Bildungsgewebe der Galle ist; es besitzt nämlich das Vermögen die Larven einschliessen zu können, um dadurch die Larvenkammer, gewiss den am Meisten characteristischen Bestandtheil der Galle, zu erzeugen.

Die bei dieser Kammerbildung der Wahrnehmung zugänglichen Vorgänge sind die folgenden. Zuerst, z. B. Ende Juni, bemerkt man, dass die im Anfang rundliche oder längliche Querschnittsform der Eihöhlung eine sehr unregelmässige

Gestalt annimmt (*eh* Fig. 8), was die Folge eines ungleich intensiven Wachsthums an den verschiedenen Stellen des Plastems (*gp*) ist. Dadurch enstehen mehrere tiefe Risse und Klüfte, ja es kann selbst die Eihöhlung sich in zwei (Fig. 8), oder drei vollständig durch Gewebe von einander getrennte Räume abtheilen. Den Boden der Risse und Klüfte findet man hier und dort mit Larven besetzt, und es hat den Anschein, als ob *diese* die Ursache des ungleich schnellen Wachsthums im Plasteme sind. Man hat nämlich Veranlassung anzunehmen, dass die Larven dem Ausdehnungsstreben des Plastems an den Berührungsstellen in einer unerklärten Weise entgegen arbeiten; ich schliesse dieses besonders auf Grund zahlreicher anderweitiger Beobachtungen, welche ich in den nächsten Kapiteln mittheilen werde. Wenn diese Auffassung die richtige ist, so haben die Larven der Aulax hieracii, wie die Cynipidenlarven überhaupt, eine doppelte Wirkung auf die pflanzlichen Zellen: sie verursachen darin neue Zelltheilungen und abnormes Wachsthum, wodurch das Plastem entsteht und sie widerstreben dem beschleunigten Wachsthum des Plastems an den Stellen des directen Contactes.

Die Enstehung der Risse und die Lage der Larven auf dem Boden derselben ist der erste Schritt zur Bildung der Larvenkammern; die weiteren Vorgänge finden dabei folgendermaassen statt. Während die zu Boden der Grube liegende Larve ohne sich weiter zu bewegen beträchtlich wächst, wuchern die Ränder dieser Grube (*rr* Fig. 8) selbst schnell weiter, und neigen sich demzufolge mehr und mehr zu einander hin; dieser Vorgang endet erst in Folge gegenseitiger Berührung beider Ränder (*rr* Fig. 9), welche sich dabei zusammenpressen, und zuletzt so vollständig zu einem Ganzen verwachsen, dass ihre ursprüngliche Trennungslinie, welche in Fig. 9 bei *kl* angegeben ist und die ich mit dem Namen „Kammerloch" bezeichnen will, gänzlich verloren geht; hierdurch wird die Larvenkammer (*lk*) sowie die sich darin vorfindende Larve (*Lk*) von der Eihöhlung (*eh* Fig. 9) vollständig isolirt. Sehr bemerkenswerth ist dabei, dass diese Larvenkammer, welche aus den zwei unregelmässigen Rissrändern hervorgeht und daher anfänglich keine bestimmte Gestalt besitzt, bald nach der Trennung von der Eihöhlung unter fortwährender Vergrösserung eine vollkommene Kugelform erhält. Zur Zeit, wenn diese Veränderungen in der jungen Galle stattfinden, das heisst ungefähr um die Mitte Juli, bemerkt man in dem Thiere die letzten Ueberreste des Nahrungsdotters als drei intensiv gelb gefärbte Tropfen ungleicher Grösse; bald nachher verschwinden diese, anscheinend in Folge vollkommener Resorption, wenigstens gelingt es später nicht mehr, dieselben in dem übrigen Körperinhalt zu unterscheiden.

§ 6. *Die Gewebedifferenzirung im Gallplastem.* An dieser Stelle muss ich

einige Bemerkungen über den anatomischen Bau des Stengels der Habichtskräuter vorausschicken. — Der Querschnitt eines erwachsenen Stengels von Hieracium rigidum oder H. umbellatum lässt Folgendes erkennen. In der Mitte liegt das weitzellige Mark, welches bei dicken Stengeln von c. a. dreissig Gefässbündeln eingeschlossen ist; da aus jedem Blatte drei dieser Bündel in den Stengel übergehen, laufen dieselben demnach im Allgemeinen durch zehn Internodien hinab, um dann mit benachbarten Bündeln seitlich zu verschmelzen. Auf der Innenseite der Xylemtheile lassen sich bei gewissen Hieracien, z. B. bei den beiden genannten Arten, Siebbündelchen (*ms* Fig. 7) nachweisen, in welchen ich bei Hieracium rigidum sogar Milchröhren auffand. De Bary, welcher diese Siebbündelchen erwähnt *, sagt, dass dieselben in der Peripherie des Markes gesondert verlaufen, in den Stengeln von Hieracium rigidum fand ich dieselben dagegen, wie angeführt, mit den Gefässbündeln im Zusammenhang. — Auf der Aussenseite jedes *rinden*ständigen Phloëmbündels (*ph* Fig. 9) findet sich, wie in den Dicotylenstengeln so oft, ein Sklerenchymfaserstrang (*sf* Fig. 7, 8, 9). Die Rinde (*fr* Fig. 8 und 9), welche diese Stränge bekleidet, ist farblos, und die das Sklerenchym unmittelbar berührenden Elemente derselben sind in Milchröhren umgewandelt. Noch weiter nach aussen liegt die grüne Rinde (*gd*), welche aus 7—10 Zellenschichten besteht und stellenweise den Collenchymbündeln (*cb* Fig. 9) Platz einräumt.

Die secundären Veränderungen im gesunden Stengel bestehen hauptsächlich in einer bedeutenden Sklerenchymbildung auf der Innenseite des Cambiums, wodurch zuletzt ein geschlossener Ring von Sklerenchymfasern unterhalb der Rinde entsteht; da sich keine eigentliche, Gefässe führende, secundäre Holzmasse bildet, ist in den alten Hieraciumstengeln das primäre Xylembündel durch dieses Fasergewebe von dem Phloëmtheile getrennt. Ein Hauptunterschied zwischen dem normalen Wachsthum und der bei der Gallbildung stattfindenden Anschwellung besteht in dem Ausbleiben der Sklerose auf der Innenseite des Phloëms in letzterem Falle. Dagegen wird in den Gallen gerade dort viel dickwandiges Gewebe gebildet, wo es in den normalen Stengeln ausbleibt, nämlich im Mark; jedoch lassen sich diese dickwandigen Zellen, denen die reifen Gallen ihre bedeutende Festigkeit verdanken, nicht mit Fasern, sondern wegen ihrer Kürze mit Steinzellen — genauer gesprochen mit sklerotischen Zellen — vergleichen: Freilich erreichen die Wände dieser Zellen nicht die beträchtliche Dicke, welche für das normale Steinzellengewebe bezeichnend ist, und welche wir auch bei manchen Eichengallen kennen lernen werden.

---

* *Vergleichende Anatomie der Vegetationsorgane der Phanerogamen und Farne*, 1877 pag, 242, 448.

Gehen wir nun zur Betrachtung der Veränderungen im Gallplastem selbst über. Die Abgrenzung desselben in Beziehung zu den sich nur indirect oder gar nicht an der Gallbildung betheiligenden Gewebe, ist nicht scharf ausgeprägt; in Fig. 9 ist dieselbe aufs Ungefähre durch eine Punktirung angegeben. Schon in einem sehr frühzeitigen Entwicklungsstadium ist dasselbe von sehr heterogener Natur, wie sich sowohl aus der Gegenwart procambialer Stränge (*pc* Fig. 8), wie auch aus der ungleichen Grösse der übrigen Zellen ergiebt (Fig. 10 = *pz* Fig. 8); im Allgemeinen ist die Grösse der Plastemzellen dessto beträchtlicher, je näher dieselben bei der Eihöhlung gelegen sind. Bei mikroskopischer Betrachtung gleicht das Plastem in gewissen Hinsichten einem Callusgewebe; die Quantität des Protoplasma's, welche in den Zellen desselben liegt, ist gewöhnlich gering, da in jeder Zelle ein weiter Saftraum gefunden wird; der Protoplast an sich ist hell und durchsichtig, etwas grünlich gefärbt, schliesst einen schönen Kern mit Kernkörperchen ein und sendet in den Saftraum Protoplasmaarme und Ströme aus; diese nämlichen Merkmale werden ebenfalls in manchem Callus zurück gefunden. Ueberall im Plastem bilden sich neue Theilwände, deren Stellung und Richtung sehr unregelmässig erscheint, im Gegensatz also zu denjenigen, früher schon besprochenen, neuen Zellwänden, welche bald nach dem Eierlegen jedoch vor Anfang der eigentlichen Plastembildung, in dem Markgewebe, welches die Eihöhlung einschliesst, entstehen, und deren Stellung senkrecht oder parallel zur inneren Grenzfläche der Eihöhlung ist.

Die Procambiumstränge (*pc* Fig. 8) enstehen im Plastem sowohl in unmittelbarer Nachbarschaft der Eihöhlung als auch in grösserer Entfernung von derselben, durch zahlreiche Zellenschichten davon getrennt; zur Lage der Larven liess sich in ihrer Stellung keine bestimmte Beziehung auffinden. Es ist bemerkenswerth, dass die weitere Differenzirung der Procambiumstränge zu secundären Gefässbündeln (*gb* Fig. 9) schon stattfindet zu einer Zeit wenn die Einschliessung der Larven seitens des Plastems noch nicht vollendet ist; da in dem Phloëm dieser secundären Gefässbündel Michsaftgefässe vorkommen, ist es verständlich, warum die gallbildenden Hieraciumstengel, selbst dann, wenn sie noch sehr jung sind, bei Verwundung aus ihrem Marktheil reichlich Milchsaft austreten lassen, was bei den gesunden Stengeln bekanntlich nicht, oder doch nur in sehr beschränktem Masse der Fall ist. In den weiter ausgereiften Gallen ist es leicht, eine directe Verbindung zwischen einzelnen im Gallplastem entstandenen secundären Gefässbündeln mit primären Gefässbündeln des Stengels nachzuweisen; da diese secundären Bündel jedoch ein sehr unregelmässiges Geflecht darstellen, welches der Untersuchung Schwierigkeiten darbietet, blieb bisher die Frage ungelöst, ob jeder Procambiumstrang *nur* in Berührung mit schon vorhandenen

Procambiumsträngen oder Gefässbündeln enstehen kann. Ich habe aber den Eindruck erhalten, dass dieses nicht nothwendig der Fall ist, dass also Stellen des Plastemgewebes, welche in gewissen Entfernungen von den schon existerenden Bündeln vorkommen zur Procambiumbildung angeregt werden können. Bei den übrigen Differenzirungen im Gallplastem, nämlich bei der Bildung des Nahrungsgewebes (*ng* Fig. 3) und der dickwandigen Zellenschicht (*ss*), glaube ich an dieser Stelle nicht länger verweilen zu müssen da ich diese Gewebe schon kurz in § 1 besprochen habe.

Besondere Beachtung verdient es, dass auch ausserhalb der eigentlichen Bildungszone der Galle das Wachsthum des stark anschwellenden Stengels beträchtlich verschieden von dem normalen ist. Vor Allem auffallend ist die sehr lange andauernde Zelltheilung, welche sich sogar im Xylemtheile der primären Gefässbündel bemerkbar macht und wodurch die in paralellen Reihen angeordneten Gefässe desselben seitlich auseinander getrieben werden (*xl* Fig. 9); eine besonders ausgiebige Thätigkeit der Cambialzone, welche die gewöhnliche Ursache der normalen Knollenbildungen der Dicotylen ist (die Hauptmasse der Kartoffel z. B. entsteht bekanntlich auf diese Weise) fehlt der Hieraciigalle dagegen vollständig. Längst nachdem der gesunde Stengeltheil sowohl unterhalb wie oberhalb der Galle ausgewachsen ist, ist diese selbst noch überall in regem Wachsthum begriffen; alle die verschiedenen Gewebesysteme des Stengels, welche vor Anfang der gallbildung ohne Ausnahme ihre ersten Entwicklungsstadien schon durchlaufen haben werden zufolge des lange andauernden Wachsthums der Galle, beträchtlich in ihrer weiteren Ausbildung modificirt. Sehr auffallend ist dieses bei den Anlagen der Sklerenchymfaserstränge (*sf*), welche schon frühzeitig in den jungen Stengeln, wie z. B. in dem durch Figur 7 dargestellten Zustand, mit grosser Schärfe zu sehen sind, deren Sklerose in den Gallen aber volltsändig ausbleibt. Dass ebenfalls die Bildung des sekundären Sklerenchymringes, welcher den alten normalen Stengeln eigenthümlich ist, in den Gallen nicht stattfindet wurde schon früher angeführt. Aut welche Weise man diese sehr erheblichen Abänderungen im Wachsthum, welche in so grossen Entfernungen von den Aulaxlarven zu Stande kommen erklären muss, ist noch nicht anzugeben; unter dem directen Einfluss des Thieres stehen dieselben wahrscheinlich nicht, sondern sie müssen vielmehr als die Folgen anderweitiger von den Thieren verursachten Wachsthumserscheinungen aufgefasst werden.

§ 7 *Besondere Stellungsverhältnisse.* Die Stellung der Gallen an den Habichtkräutern wird in der Hauptsache bedingt durch die Natur des Vegetationspunktes, welcher sich zur Zeit des Eierlegens oberhalb der Eihöhlung befindet,

nebensächlich aber auch durch die Grösse der Entfernung zwischen der ursprünglichen Stichstelle (*bl* Fig. 5*b*) und dem Vegetationspunkt (*vp*). Wenn Letzterer nämlich Anlage eines Blattsprosses ist, so enstehen die gewöhnlichen Gallenformen, auf welche in dem Vorhergehenden vorzugsweise Rücksicht genommen wurde und die sich nur dadurch von einander unterscheiden, dass sie entweder an der Basis, oder an der Mitte des Stengels der Nährpflanze sitzen, oder auch eine terminale Stellung an derselben einnehmen in welchem letzteren Falle sie von einem Blätterschopf gekrönt werden, wie in der Figur 1 dargestellt ist. Diese Verschiedenheiten sind offenbar abhängig von der grösseren oder geringeren Verlängerung, welche der Stengeltheil oberhalb und unterhalb der Galle erleidet.

Wenn dagegen die Anlage eines Blüthenköpfchens oberhalb des Bohrloches liegt, so können Gallbildung und Blüthenbildung mit einander in Collision treten, was unter Umständen zu sehr eigenthümlichen Resultaten Veranlassung geben kann. Hierbei lassen sich besonders zwei Fälle unterscheiden, je nachdem nur das Receptaculum, oder, ausser diesem, ebenfalls die Blüthensammlung theilweise oder vollständig unter den gallbildenden Einfluss gerathen ist. Im ersteren dieser beiden Fälle (Fig. 11) schwillt das Receptaculum zu einer Halbkugel an, welche die gleichfalls stark verdickte Blüthenspindel abschliesst; da die Ausdehnung an derjenigen Stelle wo sich das unveränderte Involucrum (*iv*) findet, am wenigsten ausgiebig ist, so entsteht hier eine ziemlich tiefe Furche in der Oberfläche der Galle; die anatomische Structur solcher Gallen stimmt mit derjenigen der gewöhnlichen Stengelgallen vollständig überein. Die von dem mächtig angeschwollenen Receptaculum getragenen Blüthen, treten seitlich mehr oder weniger auseinander und viele derselben erleiden erhebliche Aenderungen von dem normalen Bau. So können z. B. die Kronenblätter unter Beibehaltung ihrer Farbe und Textur, sowie die Staubfäden und Fruchtblätter in eine einzige Spirale gelber Blüthenblättchen umgewandelt werden. Diejenigen Blüthen, welche nicht oder nur wenig verändert sind ergeben sich grösstentheils als steril, einige können aber Früchte bringen, von denen einzelne nach meiner Erfahrung gute und keimkräftige Samen enthalten. Es werden in dem nun betrachteten Falle die Blüthen oder die Früchte früher oder später durch die Galle abgeworfen in gleicher Weise, wie bei den normalen Receptaculen.

Wenn der gallbildende Einfluss nicht auf Blüthenspindel und Receptaculum beschränkt bleibt, sondern sich auch über die Blüthen selbst ausdehnt, dergestalt, dass diese an der Bildung eines Theiles der Galle mithelfen, — was in den vorhergehenden Fall nicht geschah, — so treten in dem Blüthenkörbchen Blüthenvergrünungen auf, welche mehr oder weniger vollständig sein können. Bei leichtgradiger Vergrünung findet man unter dem rudimentären Fruchtknoten bisweilen

zwei grüne Vorblätter; diese müssen bekanntlich im Blüthentypus der Compositae angenommen werden, kommen aber unter normalen Bedingungen gewöhnlich nicht zur Entwicklung; solche Blüthen bringen auch meistens einen in fünf oder mehr grünen Blättern aufgelösten Federkelch. Ist die Vergrünung eine sehr vollkommene, so wird das ganze Blüthenkörbchen in ein verbreitertes, abgeplattetes, mit lauter grünen Blättchen bewachsenes Receptaculum umgewandelt. — Diese verschiedenen Missbildungen habe ich an Hieracium vulgatum gefunden, während Treub * ganz ähnliche Vorkommnisse bei Hieracium umbellatum beobachtet und beschrieben hat; dieselben beanspruchen ein gewisses Interesse, da man wenigstens die entfernteren Ursachen ihrer Entstehung ziemlich klar durchsehen kann.

KAPITEL III.

Die Terminalisgalle †.

Taf. I Fig. 12—16 und Taf. II Fig. 17—23.

§ 1. *Beschreibung der Galle.* In Niederland, Deutschland, Frankreich, England, Oesterreich, Italien und wahrscheinlich in vielen anderen Ländern Europa's findet man im Mai und Juni an den Gipfeln der Zweige von Quercus pedunculata, Q. sessiliflora und Q. pubescens (nicht an Q. cerris), eine grosse und sehr auffallende Galle, welche in vielen Gegenden unter dem Namen „Eichapfel" bekannt ist. Es ist ein scheibenförmiger Körper von 4—5 cM. Mittellinie und 3—4 cM. Höhe und von weisser, oder gelblicher Farbe, gewöhnlich mit rosafarbigem oder purpurnem Anflug auf der Sonnenseite. Unter der sehr dünnen glänzenden Epidermis liegt eine dicke schwammige Rinde, welche aus grossen unregelmässig verzweigten, in der Richtung des Radius der Galle stark velängerten Zellen besteht, welche ausserordentlich weite Interzellularräume zwischen sich offen lassen. Diese Zellen sind sehr reich an Gerbstoff, welcher zum Theil

---

* *Notice sur l'aigrette des Composées à propos d'une monstruosité de l'Hieracium umbellatum*, Archives neêrlandaises, 1873 pag. 13.

† Bewohnt von Cynips terminalis Fabricius. Synonym: Teras terminalis, Dryoteras terminalis, Andricus terminalis, und Biorhiza terminalis.

in der Form eines Tropfens im Protoplasma derselben zu finden ist; sie sterben frühzeitig und vertrocknen dann vollständig. Dass diese dicke Rinde alle Parasiten, welche eine kurze Legeröhre besitzen, von den Larven fernzuhalten vermag, und dass der Gerbstoff die Galle für Vögel ungeniessbar macht, wurde in Kapitel I § 9 dargethan. — Dem Nabelende * der Galle zugekehrt finden sich die zahlreichen Larvenkammern, jede von einer festen Steinzellenschicht eingeschlossen; die dadurch entstandenen Innengallen sind in Folge des Verschmelzens ihrer Steinzellenbekleidungen zu einer einheitlichen Masse verbunden, welche in überwinternden Gallen, deren Rinde durch Verwesung verloren gegangen ist, in Gestalt einer gestauchten Traubenrispe in Miniatur hervortritt. Jedoch werden die Innengallen in den reifen Gallen auch schon vor der Verwesung der Rinde, äusserlich sichtbar, da diese Letztere vorher durch Eintrocknen so stark einschrumpft, dass die Steinzellenschichten der Larvenkammern kleine Erhabenheiten darin erzeugen.

Ungeachtet des Schutzes gegen ihre Feinde, welchen die Terminalisgalle ihrer dicken Gerbstoff führenden Rinde und ihrem Steinzellengewebe verdankt, ist diese Galle — wie sich ja auch eben auf Grund der Existenz jener Einrichtungen erwarten liess, — ein geeignetes Beispiel um den gewaltigen Kampf ums Dasein, den die Gallen und ihre Bewohner zu bestehen haben zu demonstriren, denn schon vor dreissig Jahren kannte RATZEBURG nicht weniger als c. a. 33 verschiedene Arten von Parasiten und Inquilinen dieser einzelnen Gallenform †.

Da die Terminalisgalle aus einer Knospe ensteht und auf dem Ringtheil einer solchen befestigt ist, kann man selbst unter den reifen Gallen, die zurückgeschlagenen, in fünf Reihen auf der Knospenachse sitzenden Knospenschuppen leicht auffinden. An dieser Stelle sei schon bemerkt, dass die Galle während ihrer Entwicklung, die obere Hälfte der Knospe (*ok* Fig. 21 Taf. II) vor sich vorausschiebt, und daraus erklärt sich, dass man auf der Spitze der reifenden Terminalisgallen stets einen eigenthümlichen knospenartigen Körper verklebt findet.

---

* Der Gallennabel ist die Stelle wo die Galle mit der Pflanze verbunden ist.

† RATZEBURG, *Die Ichneumonen der Forstinsekten*, Bd. III, 1852, pag. 254. Diese 33 Arten sind die folgenden. *Inquilinen*, — Coleoptera: Balaninus villosus, — Lepidoptera, Paedisca corticana, — Hymenoptera, Synergus tacialis. *Parasiten*, — Ichneumoniden: Cryptus hortulanus, Hemiteles coactus, H. punctatus, Pimpla calobata, P. caudata, — Braconiden: Bracon caudatus, Microgaster breviventris, Microdus rufipes, Microtypus wesmaeli, — Chalcidien, Entedon amethystinus, E. deplanatus, E. scianeurus, Dendrocerus lichtensteinii, Eupelmus azureus, Eurytoma signata, Geniocerus cyniphidum, Mesopolobus fasciventris, Platymesopus erichsonii, Pteromalus cordairii, P. dufourii, P. leucopezus, P. meconotus, Torymus admirabilis, T. appropinquans, T. caudatus, T. cyniphidum, T. incertus, T. longicaudis, T. navis, T. propinquus.

*

Die innere Structur der Terminalisgalle lässt sich nur vollständig begreifen, wenn man mit der Entwicklungsgeschichte derselben bekannt ist, doch sei darüber vorläufig schon Folgendes bemerkt. Aus Längschnitten ganz junger, drei bis fünf mM. dicker Gallen (Fig. 23 Taf. II), in welchen das Steinzellengewebe noch lange nicht entstanden ist, geht hervor, dass die von dem Nahrungsgewebe (*ng*) eingeschlossenen Larvenkammern (*lk*) im Allgemeinen ziemlich unregelmässig in dem parenchymatischen Gewebe, welches die Grundmasse der Galle darstellt, zerstreut sind, nur die unteren derselben sind mehr oder weniger deutlich in einer wellenartig gekrümmten Fläche angeordnet; später wird sich ergeben, dass diese Anordnung die Folge ist der ursprünglichen Lage der die Galle erzeugenden Eier, innerhalb der Eichenknospen. Ein sich reich verzweigendes Gefässbündelsystem (*gb*) tritt aus dem Ringtheil der Knospenachse durch den Gallennabel in den Parenchymkörper der Galle hinein, dabei bleibt jedes Gefässbündel stets auf einem gewissen Abstand von den Larvenkammern entfernt; in der Gallenrinde sind die Zweige nahezu bis zur Oberfläche der Galle zu verfolgen, im Gallennabel sind sie zu einem loosen Geflechte vereinigt. Die Schattirung (*cz* Fig. 23) stellt eine meristematische oder cambiale Gewebezone dar, also diejenige Partie der jungen Galle in welcher die Zellentheilung und das Wachsthum im Allgemeinen am regsten sind. Das Ganze stimmt in vielen Hinsichten mit einem kräftig entwickelten Callus überein.

Gesunde Gallen werden im Juni oder Juli von den legitimen Bewohnern verlassen, nachdem sie grösstentheils abgestorben und vertrocknet sind. Bei starkem Winde lösen sie sich noch im Juli von den Bäumen und fallen in günstigen Gallenjahren in ungeheurer Anzahl zu Boden. Die von Inquilinen oder Parasiten bewohnten Exemplare überwintern dagegen an den Eichenzweigen, und sind selbst noch im zweiten Jahre als braune Massen von der oben beschriebenen gedrungenen traubenrispenförmigen Gestalt zu finden.

§ 2. *Die Gallenbewonerin Teras terminalis und ihre Lebensgeschichte.* Diese Form besteht sowohl im männlichen (*A* Fig. 12 Taf. I), wie im weiblichen Geschlecht (*B* Fig. 12), und ist dadurch characterisirt, dass verschiedene Gallen Thiere von sehr verschiedener Körperbildung enthalten; vor Allem die Weibchen haben in dieser Beziehung grosse Unterschiede aufzuweisen. Letztere besitzen, obschon sie niemals fliegen können entweder vier rudimentäre Flügel, oder dieselben sind vollkommen flügellos und dabei häufig zwerghaft. Eine ähnliche Zwergform, welche übrigens normal gebaut war und wohl ausgebildete Flügel besass habe ich, beiläufig bemerkt, auch bei den Männchen angetroffen. Die verschiedenen Sexen und Thierformen sind auf die einzelnen Gallen ungleichmässig

vertheilt, und zwar in der Weise, dass in jeder einzelnen Galle gewöhnlich eine bestimmte Form vorherrscht. So erhielt ich z. B. bei einem im Grossen angestellten Zuchtversuche im Jahre 1880, aus den meisten Gallen nur Männchen, aus einer kleineren Zahl kurzgeflügelte Weibchen (*B* Fig. 12), einzelne Gallen lieferten zu gleicher Zeit Männchen und kurzgeflügelte Weibchen, andere Männchen und ungeflügelte Weibchen.

Die ungeflügelten Weibchen sind sehr merkwürdig durch die Missbildung des Thorax; HARTIG hat im Jahre 1843 in Bezug auf diesen Umstand die folgenden Bemerkungen gemacht: * „Der Thorax ist bei weitem schmaler und dabei auch kürzer als bei den geflügelten Individuen beiderlei Geschlechtes, das Schildchen miszt kaum die Hälfte der normalen Grösse, so dass, da auch die Fühler kürzer und dicker sind, der Bau des Körpers vollkommen mit dem der Apophyllusarten † übereinstimmt. Im allen übrigen stimmen die ungeflügelten Weibchen mit den derselben Galle entschlüpfenden geflügelten Weibchen überein, so dass eine Artverschiedenheit nicht wohl angenommen werden kann. Was hat es aber mit dieser Verkümmerung des Brustkastens und der Flügel, die ich bei keiner anderen Art der ganzen Familie wieder gefunden habe für eine Bewandniss?" Die Antwort auf diese Frage HARTIG's wurde von Dr. ADLER und von mir durch den Nachweis gegeben, dass die Mutter der Terminaliswespe Biorhiza aptera ist, welche keine Flügel und einen missgebildeten Thorax besitzt.

Sofort nach dem Ausschlüpfen aus den Gallen werden, wie ich wiederholt beobachtet habe, die Terminalisweibchen § befruchtet, wonach sie an einem Eichenstamme entlang in den Boden hineinkriechen und sich gewöhnlich eine einjährige Wurzel aufsuchen. Sie bohren ihre Legeröhre vertical durch die Rinde derselben und legen in eine kleine Höhlung, welche sie im Phloëm an der Oberfläche des Hölzkörpers bilden, ihre Eier und zwar in der Weise, dass diese in kleinere oder grössere Entfernungen von einander zu liegen kommen; wenn diese Entfernungen klein sind, so können die später entstehenden Gallen mit einander verwachsen, jedoch scheint dabei stets jedem Eie eine besondere Bohrwunde zu entsprechen. Die Structur des sehr feinen Legeapparates, sowie des Eies, geht aus der Figur

---

* *Zweiter Nachtrag zur Naturgeschichte der Gallwespen*, in GERMAR's Zeitschrift für die Entomologie, 1843, pag. 407.

† Apophyllus ist synonym mit Biorhiza.

§ Der starke Geruch den diese Thiere abgeben, steht wahrscheinlich mit der Fortpflanzung in keiner Beziehung, denn auch die agamen Formen riechen stark. Ich halte diese Eigenschaft für ein Schutzmittel gegen Raubinsekten, welche wie die Insekten im Allgemeinen, durch scharfe Gerüche abgeschreckt werden.

12, *C*, *D*, *E* Taf. I hervor. Die Schienenrinne (*Sr* Fig. 12 *E*) ist mit einigen stumpfen Sägezähnen versehen, dagegen enden die beiden Stechborsten (*Sb*) in glatte Spitzen. Wie sich auf Grund der geringen Länge der Legeröhre erwarten liess, sind die Eier (Fig. 12 *D*) nur kurz gestielt, und nach dem Legen vollständig innerhalb der Wurzelrinde verborgen (*eh* Fig. 13).

Das Gallenwachsthum beginnt bald nach dem Eierlegen, so dass man schon zu Ende Juli oder Anfang August die erbsengrosse, gelblich aussehende Galle (Fig. 13 Taf. I) in Rissen der Wurzelrinde finden kann. Es ist diese die schon Malpighi bekannte Bildung, aus welcher im nächstfolgenden Jahre die Gallwespe Biorhiza aptera herauskriecht. Eine genaue Betrachtung der Entwickelungsvorgänge dieser Galle, welche ungefähr mit den später zu besprechenden der Foliigalle übereinstimmen, übergehe ich an dieser Stalle und gehe sogleich zur Beschreibung derselben im reifen Zustand über.

§ 3. *Die Apteragalle.* Die von der Terminaliswespe hervorgerufene, vom Boden bedeckte Apteragalle (Fig. 13 Taf. I), hat eine zweijährige Entwicklungsdauer. Am Ende des ersten Sommers erreicht sie bisweilen die Grösse einer kleinen Haselnuss, überwintert dann mit einer nur wenig ausgebildeten Larve, um im nächstfolgenden Sommer ihr Wachsthum zu erneuern und zu vollenden. Letzteres ist auch der Fall mit der eingeschlossenen Apteralarve, welche sich durch das Verzehren der mächtigen Nahrungsschicht eine sehr geräumige Höhlung in der Galle schafft, im Oktober kann man die Nymfpuppe darin finden, im November schlüpft die Wespe heraus. Die Grösse der reifen Apteragallen ist ausserordentlich schwankend und wechselt zwischen derjenigen einer Erbse und einer Wallnuss, und auch die eingeschlossenen Wespen sind dem entsprechend beträchtlichen Grössenunterschieden unterworfen; ob dieses nur durch die Nahrungsverhältnisse der wachsenden Galle, oder auch durch die Verschiedenheiten, welche die Gallenmütter (Teras terminalis) aufweisen können, bedingt werde, konnte ich noch nicht klarlegen.

In Beziehung zu ihrer Nährpflanze können die Gallen zweierlei verschiedenen Ursprunges sein; dieselben können nämlich entweder auf den dünnen Eichenwurzeln sitzen und dieses ist, wenigstens im Freien, weitaus der häufigere Fall; oder sie können, wenn es den Terminalisweibchen nicht gelungen ist, tief genug in den Boden ab zu steigen, durch in unterirdische Stammtheile gelegte Eier erzeugt werden. Letzteres war z. B. der gewöhnliche Fall bei den Gartenculturen der Galle, welche ich im Sommer 1880 anstellte und wozu ich einjährige Eichenkeimlinge verwendete, welche in einem festen Gartenboden standen, der nur in den oberen Schichten gelockert worden war, um den Wespen das Ein-

dringen in denselben zu ermöglichen; die sehr zahlreichen Gallen, welche ich dabei erhielt, sassen grösstentheils am Wurzelstock oberhalb der Samenlappen; zwischen den Gallen können sich in diesem Falle mehrere Säumaugen oder Cryptoblaste vorfinden. Gewöhnlich ist das Wachsthum der von den Wurzeln getragenen Gallen üppiger, wie dasjenige der stengelständigen, übrigens stimmen sie jedoch in ihrem Baue genau mit einander überein.

Zur Erläuterung der folgenden anatomischen Détails verweise ich auf die Figur 13, welche den Längschnitt einer, von einem querdurchschnittenen einjährigen Stämmchen, getragenen Apteragalle schematisch darstellt; es sind darin alle die verschiedenen Gewebe, welche in den zwei Lebensjahren der Galle entstehen und verschwinden, in ihrer relativen Lage aufgenommen. Unten am Gallennabel, tief im Holzringe verborgen, mithin in der Nachbarschaft des Markes, — und von diesem nur durch das vor Juni des ersten Jahres gebildete Holz getrennt, — sieht man die Eihöhlung (*eh*) und das Bohrloch (*bl*), welche zusammen ungefähr die ursprüngliche Gestalt des Terminaliseies, welches diesen Raum einmal anfüllte, nachamen. Da das Ei seitens der Terminaliswespe in die Cambium- und Phloëmschicht gelegt wird, muss die Galle, welche aus diesen Geweben entsteht, um nach aussen zu treten, die secundäre Wurzelrinde zerreissen, und zwar genau in der nämlichen Weise wie eine Seitenwurzel, welche einen ganz ähnlichen endogenen Ursprung in Bezug auf die Mutterwurzel hat.

Der anatomische Bau der Apteragalle ist in dem ersten Jahre ihres Entstehens ziemlich einfach, da sie abgesehen vor den Gefässbündeln aus einem gleichartigen, nur dem Zelleninhalt nach heterogenen, Gewebe besteht. Zu Ende des ersten Sommers, wenn die Larven und ihre Kammern noch vollständig kugelig sind, und Letztere eine Weite von circa 0.5 mM. erreicht haben, ist das ganze Parenchym (*sg* Fig. 13) mit Ausnahme der 1 mM. dicken Rinde (*sp*) dicht mit Stärke angefüllt, nur die inneren, die Larve berührenden Zellenschichten (*ng*) enthalten Eiweiss und Oel, und stellen das primäre Nahrungsgewebe dar. Zahlreiche feine Gefässbündel (*gb*) durchsetzen ohne strenge Regelmässigkeit das Stärkegewebe, sind ungefähr in einer zur Larvenkammer concentrischen Kugelschale angeordnet und haben normalen collateralen Bau, mit dem Centrum der Galle zugewendetem Xylem; ihre Elemente sind relativ kurz und weit. Derjenige Theil des Stärkegewebes, welcher innerhalb des Gefässbündelsystems gelegen, und viel durchsichtiger ist, wie der ausserhalb des Letzteren befindliche Theil des genannten Gewebes, bildet die Initialchicht für ein später entstehendes Steinzellen- und ein Eiweiss und Oel führendes secundäres Nahrungsgewebe. Während des Winters zernagt die Larve das primäre Nahrungsgewebe und einen grossen Theil des vorher in secundäres Nahrungsgewebe umgesetzten Stärkegewebes, wodurch die Larvenkammer eine unregelmässige Gestalt

erhält. Im Februar und März des zweiten Jahres fängt die Bildung des sklerotischen oder steinzellenartigen Zellengewebes (*ss* Fig. 13) an; dieses erreicht aber niemals eine grosse Ausdehnung (7 bis 10 Zellenschichten), und hat, in den zu einheitlichen Massen verschmolzenen vielkammerigen Exemplaren der Apteragallen, an den verschiedenen Orten seiner Ablagerung eine sehr ungleichmässige Dicke; gewöhnlich wird dasselbe derweise von den Gefässbündeln eingeschlossen, dass diese Letzteren in Vertiefungen der äusseren Oberfläche des Ersteren zu liegen kommen. Die sklerotischen, später in Steinzellen * übergehenden Elemente an sich besitzen nur unbeträchtlich verdickte Zellenwände und die der Larvenkammer zugekehrte Wand ist selbst gar nicht verdickt; die Tüpfel und Tüpfelkanäle der Zellen sind besonders gross.

Die Rinde (*sp* Fig. 13) der Apteragalle hat eine gelbliche Farbe und besteht aus Saftparenchym; theilweise ist sie in den jungen Gallen schon als solche vorhanden, anderntheils entsteht sie durch Umwandlung der äusseren Zellenschichten des Stärkegewebes. In der letztgenannten inneren Partie derselben findet während längerer Zeit Zelltheilung statt, selbst dann noch, wenn die Aussenfläche der Galle schon längst in Dauergewebe verändert, ja im Absterben begriffen ist. Dieses ist die Ursache der Borkebildung, welche fur die Apteragalle (so wie für die ähnlich gebaute aber immer vielkammerige Radicisgalle) kennzeichnend ist. Da dieser Process überall in radialer Richtung gleichmässig stattfindet, haben die Borkeschuppen eine vieleckige Gestalt, wie auf einem Testudinariastamme in Miniatur.

Durch Abzählen und Messen der Zellen, welche auf einer Mittellinie einer gut ausgebildeten Galle im ersten und zweiten Jahre liegen, gelang es mir zu zeigen, dass das Wachsthum im zweiten Jahre in der Hauptsache sicher (wahrscheinlich ganz) auf Zellenvergrösserung beruht. Das ganze, ausserhalb der Gefässbündel gelegene Zellengewebe, verliert, bei dieser im zweiten Jahre stattfindenden Dehnung, vollständig die reichlich abgelagerte Stärke; die Borkeschuppen, welche nicht durch weitere Zelltheilungen erneuert werden, werden theilweise abgeworfen und demzufolge kommen die aus der Aussenschicht des primitiven Stärkegewebes hervorgegangenen Zellen an die Oberfläche der Galle zu liegen und dadurch in Berührung mit dem Boden.

Ich schliesse diese kurze Beschreibung der Apteragalle mit der Bemerkung, dass ich bei der Durchmusterung und der Aufzucht zahlreicher Exemplare, eine Inquilinen- und eine Parasiten-Art aufgefunden habe, was man bei dem versteckten Vorkommen der Galle möglicherweise nicht erwartet haben würde.

---

* De Bary, *Vergleichende Anatomie*, 1877, pag. 128, 134.

§ 4. *Das Eierlegen der Apterawespe, Gallenmutter der Terminalisgalle.* Unmittelbar nachdem die ungeflügelte Apterawespe im Spätherbst oder im Winter ihre unterirdischen Wohnungen verlassen hat, begibt sie sich nach den Eichenknospen zum Zwecke der Eiablage; bisweilen wird sie aber erst im Frühjahr daran aufgefunden, nämlich dann, wenn früh sich einstellender Frost das Thier im Bodem zurückgehalten hat. In den drei letzt verflossenen Wintern hatte ich Gelegenheit die Thiere, so oft ich das nur wünschte, während des Eierlegens zu beobachten und, was mir dabei auffiel, war die ausserordentliche Grössenverschiedenheit derselben. Die grössten Individuen möchten die Riesinnen aller europäischen Gallwespen sein, denn sie übertreffen in dieser Hinsicht selbst die Kollari- und Tinctoriawespe, die kleinsten Exemplare dagegen sind den grösseren Formen der Terminalisweibchen nur wenig überlegen. Mit Ausnahme der oben besprochenen, unvollständigen Ausbildung des Thorax, welche Erscheinung offenbar mit der Flügellosigkeit zusammenhängt, ist der Körperbau demjenigen der übrigen Gallwespen ähnlich. Die Farbe des Thieres ist ein glänzendes Braun, welches auf dem ersten Rückenschild des Abdomens und an den Augen am dunkelsten ist; der Kopf, die Brust, die sechs kräftigen Beine und die Fühler sind mit einer feinen Behaarung überzogen.

Die grösste Aussicht, das Thier bei seiner Arbeit zu beobachten, hat man in kränklichen Waldungen, wo es viele Knospen mit schwacher Vegetationskraft gibt. An gesunden Bäumen werden besonders solche Knospen durch die Wespe bevorzugt, welche sich an Zweigen finden, die nach der Aestung aus schlafenden Augen hervorkamen. Mit den Fühlern wird der Zustand der Knospe genau ermittelt; hat eine andere Apterawespe schon vorher darin ihre Eier abgelegt, so entfernt sich das Thier sofort. Ist die richtige Knospe gefunden, so stemmt sich die Wespe fest dagegen an, indem sie mit den beiden Krallen der letzten Fussglieder die Knospenschuppen ergreift, und bohrt darnach ihre Legeröhre (*Lr* Fig. 14 Taf. I) quer durch die Schuppen in die Knospe hinein. Die Legeröhre hat den in Kap. I § 5 beschriebenen Bau; der Querschnitt derselben stimmt vollständig mit demjenigen der Legeröhre van Cynips kollari überein (Fig. 15 Taf. I); die etwas zurückgekrümmte Spitze der Schienenrinne (*Sr* Fig. 15, 16 Taf. I) trägt 6 oder 7 stumpfe Sägezähne, dagegen sind die Stechborsten (*Sb*) an ihren Enden nicht eingeschnitten; für die weiteren Besonderheiten erlaube ich mir auf die Erklärung der Figuren 15 und 16 hinzuweisen. Mit Hülfe dieser Vorrichtung vermag die Wespe die Knospenachse in horizontaler Richtung mitten durch zu sägen, und zwar an derjenigen Stelle, wo sich die Grenze zwischen Ringtheil und Sprosstheil der Knospensache befindet; hierdurch wird eine Höhlung (*eh* Fig. 14 Taf. I, Fig. 17 und 18 Taf. II) geschaffen, welche geräumig genug ist, um eine sehr beträcht-

liche Anzahl Eier aufzunehmen. Die grosse Sicherheit, mit welcher sie diese Arbeit auszuführen versteht, kann man der Thatsache entnehmen, dass sie sich bisweilen zeitweise von ihrer Werkstätte entfernt und dann, wenn sie nach einigen Augenblicken auf die nämliche Knospe zurückehrt, ohne zu suchen ihre Legeröhre in die früher gebohrte Oeffnung wieder hineinschiebt. — Der von der Knospe geschnittene obere Theil (*ok* Fig. 14, 17, 18) würde sich unter normalen Umständen zum grünen beblätterten Spross entwickelt haben, während der untere, Ringtheil (*rt*), die Region der Knospenschuppen darstellt, zwischen welchen die Stengelinternodien sich nicht verlängern. Eine besondere Technik der Apterawespe bei dem Eierlegen besteht darin, dass dieselbe die Achse des oberen Theiles (*ok*) der Knospe ein einziges oder mehrere Male durchsägt, oder wenigstens stark verwundet; dadurch erklärt sich warum dieser Theil nach dem Lospräpariren aus der Knospe, leicht in zwei oder drei Platten auseinanderfällt. Der Zweck dieses Vorgehens mag darin zu suchen sein, dass die Verwundung einen frühzeitigen Tod des genannten Theiles veranlasst, wodurch ein starkes Einschrumpfen desselben stattfindet und der Druck auf die darunter befindlichen Eier, welche allmählich zu wachsen beginnen, aufgehoben wird.

Ich gehe nun zur Beschreibung einiger speziellen Beobachtungen über. — Die Zeit, während welcher die eierlegende Biorhiza aptera an ein und derselben Knospe verweilt, ist im Freien besonders von der Witterung abhängig; an kalten Tagen, z. B. bei Frost und Schnee sitzen die Thiere 24 Stunden und länger an der nämlichen Stelle und sind dann nicht selten über dem ganzen Körper mit Eis bedeckt. Während einer hellen Januarnacht (1881) bei —6^0 C., wurden einige Aestchen mit ruhig arbeitenden Wespen in einem mit Wasser angefüllten Trinkglase auf den Schnee ins Freie gestellt; am folgenden Morgen hatten sich einige der Thiere über den Schnee entfernt, andere verfolgten ihre Arbeit anscheinend, ohne dieselbe unterbrochen zu haben; ein einzelnes Individuum war ins Wasser gefallen und eingefroren, nach dem Aufthauen aber ist es, als wäre Nichts geschehen, mit Eierlegen aufs Neue begonnen. Am 8ten Dezember 1881 Mittags, fand ich eine Apterawespe mit ihre Legeröhre in einer Knospe versenkt; der Zweig wurde abgeschnitten, und während eines zweistündigen Spazierganges mitgetragen, das Thier arbeitete dabei ruhig fort. Zu Hause wurde der Zweig in einem erwärmten Zimmer ins Wasser gestellt und erst spät am Abend unterbrach das Thier die Arbeit, fand sich aber Nachts um drei Uhr auf einer anderen Knospe, wo es bis zwei Uhr Mittags des 9ten verweilte, es hatte also zwölf Stunden auf dieser einen Knospe zugebracht. Nachdem dieses Thier noch in zwei Knospen Eier gelegt hatte, untersuchte ich den Körper desselben; kein einziges Ei fand sich mehr darin, die grosse Schleimblase war zu-

sammengeschrumpft und ebenso die paarigen Drüsenkörper am inneren Eingang der Legeröhre. In anderen Fällen waren die Thiere bei Zimmerversuchen sehr unruhig und legten in die Knospen, an welchen sie sich nur kurze Zeit aufhalten wollten, jedesmal nur einzelne Eier.

Gewöhnlich werden alle Knospen eines Zweiges, welche sich zum Eierlegen eignen von der nämlichen Wespe besucht; es müssen demzufolge auch die Terminalisgallen, welche an demselben Zweige sitzen, im Allgemeinen von einer und derselben Gallenmutter herrühren. Es würde interessant sein, solche Gallen gemeinsamen Ursprunges, auf die Geschlechts- und Formverschiedenheit der darausschlüpfenden Terminaliswespen zu prüfen, und mit anderen, von anderen Mutterthieren erzeugten Individuenreihen zu vergleichen.

Gelegentlich meiner Beschreibung des Eierlegens der Cynipiden (Kap. I § 6) habe ich angeführt, dass es mir gelungen ist, bei Biorhiza aptera das Ei aus der Legeröhre nach aussen kommen zu sehen; an dieser Stelle will ich die genannte Beobachtung ausführlicher besprechen.

Ein Blick auf die Fig. 14 Taf. I zeigt sofort die Möglichkeit einer solchen Beobachtung. Wenn man nämlich zuerst den von der Wespe abgekehrten Zweigtheil, welcher sich oberhalb der Knospe befindet, abschneidet, wodurch Letztere an den Gipfel des übrigbleibenden Zweigtheiles zu stehen kommt, so kann man, ohne das Thier bei seiner Arbeit zu beunruhigen, die von demselben abgekehrten Knospenschuppen mit einer feinen Nadel entfernen und so einen freien Blick in die von der Wespe gefertigte Eihöhlung (*eh*) bekommen. Ist das Präparat gut gelungen, so sieht man in dieser Höhlung die Legeröhrspitze circuläre oder pendelartig rotirende Bewegungen ausführen, und kann aus Letzterer mit einer starken Loupe, den allmählich anschwellenden Eikörper zu Vorschein kommen sehen. Zuerst erscheint die Eischale als ein schlaffer, faltenwerfender Körper, welcher durch die schnell hin und herschiebende Bewegung der Schienenrinne und Stechborsten nach aussen geschafft wird. Sobald die Eischale für einen geringen Theil frei aus der Legeröhrspitze hervortritt, fliesst der Eiinhalt in dieselbe über, wodurch sie ihre Falten verliert und die straffgespannte, glänzende Oberfläche, welche dem Eikörper weitherhin kennzeichnet, erhält. Mit besonders glücklichem Erfolge gelang es mir diese Beobachtungen, mit welchen ich seit 1879 vertraut bin, am 24 Dezember 1881 zu wiederholen. Eine Wespe hatte ihre Arbeit eben angefangen, und anstatt sich zu beunruhigen über den grossen Raum, welchen ich durch das Entfernen der hinteren Knospenhälfte ihrer Legeröhre darbot, schien sie dieses sehr bequem zu finden, da sie nun selbst weniger zu bohren und zu sägen hatte. Ich sah, wie auch von ADLER angegeben, dass sie die Knospenachse siebförmig durchbohrte; in jede Siebpore ward dann

*

sogleich ein Ei gelegt; so bald der Eikörper die Legeröhre verlassen hatte, wurde derselbe von den pflanzlichen Geweben zurückgehalten und als das Thier dann seine Röhre zurückzog, blieb das Ei an Ort und Stelle, wo es abgelegt worden war, liegen. Dieser Darstellung gemäss müssen die Eistiele, wie auch factisch der Fall, immer nach einem einzigen Punkte — der Eintrittssstelle der Legeröhre in die Knospe — convergiren (Fig. 14 Taf. I, Fig. 17, 18 Taf. II). Als zuletzt die Knospenachse vollständig mitten durchgesägt war, wurde das Eierlegen dann und wann zeitlich unterbrochen, und es kam dann anstatt des Eies, der dickliche Inhalt der Schleimblase als eine farblose Substanz aus der Legeröhrenspitze hervor. Diese Substanz bildet unter normalen Umständen zuletzt eine Decke über die ganze Eiersammlung (*sl* Fig. 14), mittelst derer die Eistiele mit einander und mit dem Obertheil der Knospe (*ok*) verklebt werden. Durch diese Darstellung wird ebenfalls erklärt dass, wie schon oben erwähnt wurde, der letztgenannte Theil der Knospe selbst noch auf den reifen Gallen gefunden werden kann (zu vergleichen *ok* Fig. 21 Taf. II).

Bei meiner Versuchsanstellung war es ein Leichtes den Schleim von der Legeröhrenspitze des Thieres auf eine feine Nadel überzunehmen: es ergab sich als eine neutral reagirende geruch- und geschmacklose Substanz, welche der Luft ausgesetzt ziemlich lange dehnbar blieb, aber später vertrocknete und sich bräunte. Kleine Stückchen dieser Substanz brachte ich in jugendliche schnell wachsende Gewebspartieen von Tulpen und Erbsen, welche ich zufällig cultivirte, doch traten dadurch keine andere Gewebeveränderungen auf als diejenigen, welche die Verwundungen an sich zur Folge haben. Ich kann diesem noch hinzufügen, dass ich im Jahre 1880 ähnliche Versuche angestellt hatte mit Stückchen des getrockneten Schleimes, welchen ich Knospen, worin sich Eier vorfanden, entlehnte; ich brachte diese Stückchen damals in die Achsen junger Eichenknospen so wie unter Eichenrinde in die Cambialschicht, jedoch ebenfalls ohne besonderen Erfolg.

Hier möge noch eine kurze Bemerkung in Bezug auf die Anordnung der Eier in der Eihöhlung Raum finden. Dieselben haben die gewöhnliche Form der Cynipideneier; sie bestehen aus einem gestielten Eikörper und sind, in Uebereinstimmung mit der sehr variabelen Grösse der Wespe selbst, von ausserordentlich verschiedener Grösse; anders also wie bei Dryophanta divisa, wo nicht die *Grösse* der Eier sondern ihre *Anzahl* mit der veränderlichen Körpergrösse der Wespe schwankt, — in kleinen Thieren gering, in grossen Exemplaren dagegen gross ist. — Die Stiele sind, wie sich auf Grund der relativ geringen Länge der Legeröhre erwarten liess, nicht sehr lange. Wenn man, nachdem eine Wespe eine kurze Zeit mit Eierlegen beschäftigt war, das Thier von der Knospe entfernt und von Letzterer einen Längschnitt verfertigt, so findet man die zuerst

gelegten Eier (Fig. 17 Taf. II) (diese Figur wurde am 6 Januar 1881 nach viertelstündigen Beschäftigung der Wespe mit den Zeichenprisma aufgenommen) in höchst regelmässiger Anordnung auf der Wundfläche der Ringtheiles innerhalb der Eihöhlung; und hieraus erklärt sich die ebenfalls genau bestimmte Lage der unteren Larvenkammern (*kl* Fig 23 Taf. II) in der jungen Terminalisgalle, wie sich bei der Beschreibung der Kammerbildung ergeben wird. Betrachten wir nun die Figur 18, welche den Längsschnitt einer starken Knospe darstellt, die dem Angriff einer grossen Wespe bis zu Ende ihrer Thätigkeit ausgesetzt geblieben war und über dreihundert Eier einschloss, so finden wir die strenge Regelmässigkeit in der Lage der Eier zwar nicht mehr mit derselben Deutlichkeit wie im Anfang des Eierlegens, doch sind auch darin die Eikörper noch ausnahmslos der Wundfläche des Ringtheiles zugekehrt, die Eistiele dagegen dem Obertheil der Knospe; die freien Enden der letzteren convergiren mehr oder weniger nach der Stelle, wo die Legeröhre zu Anfang der Eiablage in die Knospe eindrang.

§ 5. *Veränderungen im Ringtheil der Knospe in Folge von Verwundung.* Um zu erfahren, welchen Einfluss die von der Apterawespe hervorgebrachte Verwundung an sich auf den Ringtheil der Knospe ausüben würde, wenn keine Eier gegenwärtig wären, habe ich im März 1880 in Eichen- und Ahornknospen künstliche, den natürlichen so viel möglich ähnliche Verwundungen angebracht, und deren Folgen beobachtet. Hierbei mustte beachtet werden, dass die Wespe wie aus den Figuren 14, 17, 18 hervorgeht, die Knospenachse an einer Stelle, welche ungefähr oberhalb der fünften Knospenschuppenétage gelegen ist, durchsägt. Es ist nicht schwer, diese Stelle, welche beim Oeffnen der Knospen im Frühjahre noch eine geringe Verlängerung erfährt, von aussen zu erkennen und hier die Knospenachse mit einer feinen Lanzette durchzuschneiden; freilich unterscheidet sich eine solche künstliche Verwundung doch noch immer beträchtlich von den natürlichen. Eine Untersuchung derselben zu Ende April — um diese Zeit beginnen die Terminalisgallen im Freien überall sichtbar zu werden — ergab, dass sowohl bei Quercus pedunculata, wie bei Acer pseudoplatanus keine gewöhnliche Korkschicht, sondern ein kleinzelliger Callus über der Wundfläche des Ringtheiles gebildet war. Dieser Callus bestand aus zahlreichen Zellenschichten, welche aus allen lebenden Geweben des Ringtheiles durch Zelltheilung entstanden waren. Die Zellen selbst waren sehr klein, mit grünlichem Protoplasma angefüllt und ohne deutliche Vacuolen; aus einem Vergleiche mit den gesunden, nicht verwundeten Geweben ging hervor, dass jede in Callusbildung begriffene Zelle ungeachtet der Zelltheilung, welche darin stattgefunden, sich nur unbeträchtlich vergrössert hatte. Anders verhält sich die Sache, wenn man

die Callusbildung an durchschnittenen Knospenachsen unter Glasverschluss, wodurch die Transpiration aus der Wundfläche verhindert wird, zu Stande kommen lässt; die neuentstandenen Zellen erreichen in diesem Falle eine beträchtliche Grösse und bilden ein Gewebe, welches in mancher Beziehung den jüngsten Entwicklungsphasen der Terminalisgalle gleicht, sich von diesen aber dadurch unterscheidet, dass es bald aufhört weiter zu wachsen und daher nur geringe Grösse erreicht. Die Uebereinstimmung mit der ersten Anlage der Terminalisgalle möchte sich aus dem Umstand ergeben, dass auch bei dieser die Transpiration aus der Wundfläche, sowohl in Folge der Gegenwart der Eier, wie auch durch die dicht an einander gepressten Knospenschuppen herabgesetzt wird, wodurch auch in den von der Wespe mit Eiern belegten Knospen, vor dem Anfang der eigentlichen Gallbildung die Bedingungen für die Entstehung eines grosszelligen Callus verwirklicht sind. Im Laufe des Sommers sind die Knospen, welche für diese Versuche gedient hatten vollständig abgestorben und von den Zweigen in derselben Weise abgelöst, wie es bei sehr zahlreichen, nicht als schlafende Augen fortbestehenden normalen Knospen, sowie bei vielen Zweigen der Fall ist.

Ich komme also zum Schlusse, dass die Verwundung der Knospenachse durch die Legeröhre der Wespe zwar zu einer nicht unbeträchtlichen Callusbildung Veranlassung geben, unmöglich aber die Ursache der Gallbildung sein kann; in diesem spezielen Fall der Terminalisgalle bleibt aber die Möglichkeit bestehen, dass die Entstehung der Galle von der vorhergehenden Callusbildung bedingt werde. Diese Voraussetzung jedoch scheint sehr unwahrscheinlich, da, wie später gezeigt werden wird, die meisten übrigen Cynipidengallen gänzlich unabhängig von jeglicher Verwundung oder Callusbildung entstehen *.

In der Regel geht die Mehrzahl der Knospen, welche Apteraeier führen, zu Grunde; es färben sich dabei die Zellen der Wundfläche braun und vertrocknen, und von ihnen aus setzt sich das Absterben des Ringtheiles der Knospe allmählich nach unten fort. Vor dem Absterben sind die betreffenden Gewebe gewöhnlich schön geröthet und nicht selten kann man das rothe Pigment selbst bis in die Blattkissen, welche unter den Knospen sitzen, verfolgen. Auch solche todten Knospenreste werden während des Sommers abgeworfen.

§ 6. *Ausbildung der Terminalislarven in den Apteraeiern.* Eine selbst kurze

* Wie z. B. die Baccarum, Albipes, Inflator, Tricolor, Gemmae, Solitaria, Glandulae, Megaptera, Taschenbergi, Similis, Verrucosa, Callidoma, Malpighi, Autumnalis, Kollari, Argentea, Hungarica Tinctoria, Glechomae, Orthospinae und Rosae-galle.

Erörterung dieses Vorganges würde an dieser Stelle vielleicht unterbleiben können, wenn es nicht nothwendig wäre, die Thatsache, dass die Embryobildung der Gallbildung vorangeht, in ein helles Licht zu stellen.

Anfang März, wenn noch einzelne Wespen besonders nach strengen Wintern, mit Eierlegen beschäftigt sind, ist in den während des Winters in die Knospen gebrachten Eiern, die genau kugelförmige Larve schon ziemlich vollständig ausgebildet (*Lk* Fig. 19 Taf. II). Nur in der Embryonalhaut, welche schon in einem sehr frühen Entwicklungsstadium den Larvenkörper vollständig einschliesst gelingt es leicht eine eigenthümliche zellige Structur zu beobachten, während letztere in dem übrigen Larvenkörper, sehr schwierig wahrzunemen ist. Da die Dotterfurchung der Cynipideneier eine partielle ist, findet sich in den Embryonen ein Nahrungsdotter (*Nd* Fig. 19), welcher bei den Terminalislarven eine kuglige Gestalt besitzt und eine excentrische Lage einnimmt. Derselbe ist stets durch zahlreiche sich darin vorfindende Oeltropfen und durch eine trübkörnige Structur ausgezeichnet, und stimmt unter dem Mikroskope gesehen sehr viel mit dem Zelleninhalt des eigentlichen Nahrunggewebes der späteren Galle überein, — in physiologischer Beziehung ist die Function dieser beiden Gebilde von so verschiedenem Ursprunge natürlich genau dieselbe. Während der Embryobildung hat sich in dem Raume innerhalb der Eischale oberhalb des Embryonalleibes eine Flüssigkeit (*Fl* Fig. 19) angesammelt, welche, da der Eistiel zu dieser Zeit augenscheinlich verstopft ist, einen gewissen Druck auf die Larve ausüben möchte, wodurch sich die Embryonalhaut letzterer fest an die Eischale anschmiegt. Da diese Veränderungen im Eiinhalt von einer nicht unbeträchtlichen Anschwellung des ganzen Eikörpers begleitet sind, so muss angenommen werden, dass Wasser oder gewisse andere Nährstoffe aus der Pflanze schon vor dem Anfang der eigentlichen Gallbildung in das Ei übergehen können.

§ 7. *Die Bildung und das Verhalten des Gallplastems.* Nachdem die Terminalislarve den obenbeschriebenen Entwicklungszustand erreicht hat, werden die ersten sichtbaren Andeutungen anfangender Gallbildung wahrnehmbar. Wie gesagt geht also die Larvenentwicklung der Gallenentwicklung voraus, und dieses ist eine Regel, welche für alle von mir untersuchten Cynipidengallen ohne Ausnahme zutrifft.

Die oberen Zellenschichten der freien Wundfläche des Ringtheiles erleiden die ersten Veränderungen, später werden diese auch in den tieferen Zellenlagen sichtbar; dieselben bestehen in einer Zelldehnung und einer darauf folgenden Zelltheilung. Beachtenswerth ist, dass letztere sich den Phloëmbündeln entlang weiter von den Eiern entfernt bemerkbar macht, wie im übrigen Rinden-

und Markparenchym. Das eigenthümliche Gewebe, welches demzufolge entsteht, und welches ich mit dem Namen Gallplastem belege, bekleidet anfänglich die ganze Wundfläche in gleichmässiger Ausdehnung, besitzt eine grünliche, später verloren gehende Farbe und ist in jeder Hinsicht, wie früher angeführt, mit einer gewöhnlichen Calluswucherung zu vergleichen, unterscheidet sich aber von einer solchen durch die ausserordentliche Vegetationskraft, welche die Terminalislarven in demselben hervorrufen. Das Gallplastem individualisirt sich bald zu einem einheitlichen Initialgewebe, welches durch spätere Differenzirung in die sehr complizirte Galle umgebildet wird; schon sehr frühzeitig hören in dem Ringtheil der Knospe unterhalb des Gallplastems weitere erhebliche Veränderungen auf. Die bei der Verwundung getödteten Zellen bilden zusammen eine Decke über der Plastemanlage, welche erst beim weiteren Wachsthum letzterer gespalten und gebrochen wird. Da diese Kruste die lebenden Eier von dem Plastem trennt, scheint das gallbildenende Agens sich in diesem Fall durch todte Materie fortbewegen zu können; allein muss bemerkt werden, dass schon sehr frühzeitig einzelne, später alle Eier mit dem Gallplastem in *directe* Berührung treten.

Die allerjüngste Gallenanlage ist mit den Eiern nur schwach verklebt, sodass es leicht gelingt, beide ohne Verletzung von einander zu entfernen; mit vorschreitender Entwicklung wird aber der Zusammenhang zwischen Gewebszellen und Eischale inniger und fester, und bald gelingt es nur mit der grössten Vorsicht, ihre Trennung herbeizuführen. Diese Verklebung zwischen den beiden so heterogenen Körpern, scheint mir eine wichtige Erscheinung bei der Gallbildung zu sein; ich habe dieselbe auch in anderen Fällen z. B. bei der Entstehung der Baccarumgalle, bei welcher das Ei (*Ek* Fig. 29 Taf. II) an der Oberfläche eines in der Knospe gefalteten Blattes (*bt*) liegt, so wie bei der aus einem Vegetationspunkt entstehenden Taschenbergigalle (*Ek* und *vp* Fig. 35 Taf. III), welche ich in dieser Hinsicht genauer untersuchen konnte, beobachtet. Dagegen kam eine solche Verklebung nicht zu Stande zwischen einem kräftig wachsenden Callus, welcher aus der Wundfläche eines unterirdischen, querdurchsnittenen Sprosses von Rosa canina entstanden war, und den Apteraeiern, welche ich darauf ausgesäet hatte; diese haben auch keine Gallbildung veranlasst und sind abgestorben.

Die nächste sichtbare Veränderung, welche nach der Verklebung innerhalb der Eischale zu bemerken ist, besteht in einer starken Anschwellung des Larvenkörpers, durch welche die Eihaut im unteren Theile des Eikörpers anfangs gleichmässig gedehnt wird (*A* Fig. 19). Kurz nachher entsteht an einer Stelle des Eies, welche mit dem Gallplastem in Berührung ist, eine Ausbuchtung (*B* Fig. 19), durch welche die kugelige Gestalt der Larve in eine ovale umgewandelt wird.

Eine sorgfältige Untersuchung dieser Ausbuchtung lehrt, dass sich darin das Kopfende der Larve findet, an welchem bei diesem frühzeitigen Entwicklungsstadium die äusserst feinen Chitinkiefer schon sichtbar sind; wir werden sehen dass bei der Terminalisgalle, so wie bei den Eichengallen im Allgemeinen, dieses Kopfende *zuerst* von dem Gallplastem eingeschlossen wird, während dieses bei den Rhoditeslarven eben *zuletzt* geschieht.

Eine wichtige Wirkung, welche die Larve um diese Zeit auf das Gallplastem auszuüben beginnt, ist eine Hemmung der Wachsthumsintensität des letzteren an der Stelle unmittelbarer Berührung und eine Beschleunigung dieses Wachsthums in geringer Entfernung von dieser Stelle. Dieser Vorgang, welcher bei der Gallbildung von grösster Allgemeinheit ist, erinnert an die vollkommen analogen Veränderungen in denjenigen Meristemen, aus welchen hohle Organe, wie z. B. peri- oder epigynische Blüthen hervorgehen — allein mit dem wichtigen Unterschied, dass im Falle der Gallbildung die Erscheinung durch den äusserlich dem Plastem anliegenden Larvenkörper, dagegen in den Meristemen durch unbekannte innere Ursachen bedingt wird. Eine nähere Betrachtung dieser Thatsache veranlasst zur Frage, ob nicht in den beiden Fällen die *nächste* Ursache der Wachsthumsänderung auf ähnlichen Kräften beruhen könnte und von welcher Natur diese Kräfte wohl sein mögen; eine entscheidende Antwort lässt sich in dieser Beziehung jedoch noch nicht geben.

§ 8. *Die Ausbildung der Larvenkammer.* Dieser Process (Fig. 19 und 20 Taf. II), welcher bei sehr verschieden gestalteten Gallen in übereinstimmender Weise stattfindet, fängt mit der eben beschriebenen örtlichen Verringerung des Plastemwachsthums an, wodurch allmählich eine Erhebung des Plastems entsteht, welche die Gestalt eines die Larve umschliessenden Ringwalles besitzt.

Bei der weiteren Ausdehnung des Gallplastems, erhebt sich dieser Wall höher und höher ringsum den Larvenkörper, wobei sich die Contactfläche zwischen beiden schnell vergrössert. Beim weiteren Fortschreiten dieses Ueberwallungsprocesses hat es den Anschein, dass die Eischale an der Stelle, wo sich die früher erwähnte Ausbuchtung vorfindet, allmählich erweicht und zuletzt so wenig widerstandsfähig wird, dass sie dem Druck des Eiinhaltes nachgebend aufplatzt, und dadurch der Larve freien Austritt gewährt. So viel ist sicher, dass man die ganze Eischale späterhin auf der freien Oberfläche des Plastems, die von der Eihaut vollständig befreite Larve auf dem Boden der Vertiefung in dem Letzteren zurückfindet.

Nachdem das Plastem so hoch wie die Mittellinie des Larvenkörpers um diesen herangewachsen ist, sucht der Ueberwallungswulst sich unmittelbar oberhalb des Scheitels des kugeligen Thieres scharf umzubiegen und zu schliessen. Dieser

D 10

Schluss wird jedoch durch die Gegenwart der Eischale, welche dem Larvenkörper noch einige Zeit anhaftet, vorläufig verhindert, um erst später, wenn die Larve tiefer vergraben ist zu Stande zu kommen; die Höhlung im Plastem hat demzufolge anfangs eine mehr oder weniger längliche Gestalt (*D* Fig. 20), welche im Verlauf der Zeit sich kugelförmig abrundet. Von diesem Augenblicke an kann man sagen, dass die Larvenkammer fertiggestellt ist. Die Stelle (*kl* Fig. 20 *D*), an welcher das Gallplastem sich zuletzt schliesst, wird in Uebereinstimmung mit der Bezeichnung des analogen Ortes bei der Hieraciigalle weiterhin mit dem Namen Kammerloch, und die um diese Stelle gelegenen Zellenschichten werden mit dem Namen Kammerlochgewebe belegt werden. Auf der Aussenseite gewisser Gallen, wie z. B. besonders deutlich bei der Baccarum, Aprilinus, Albipes, Curvator und Inflator-galle, kann man, selbst im reifen Zustand, das Kammerloch in der Form eines kleinen braunen Höckerchens, welches weiterhin mit dem Namen Gallennarbe bezeichnet werden wird, wahrnehmen.

Nach der gegebenen Darstellung lässt sich leicht begreifen, warum die Eischale beim Schliessen des Kammerloches durch das überwallende Plastem von dem Larvenkörper vollständig abgepresst und abgestreift, dabei aber in der sich verengenden Röhre festgehalten werden kann, so dass man selbst bei beinahe gänzlich ausgereiften Terminalisgallen noch Eistiele finden kann, welche mit der Oberfläche der Galle ziemlich fest zusammenhängen; bereits im Jahre 1687 hat Malpighi davon eine Abbildung gegeben. Bei zahlreichen anderen Gallen, wie Taschenbergi, Similis, Gemmae, Solitaria liegt die leere Eischale ganz loose auf den noch jugendlichen Gallengeweben, wird dabei also von dem Kammerloch nicht festgehalten.

Es bleibt mir jetzt noch übrig, die noch nicht erklärten Figurendétails, welche sich nunmehr, sehr leicht übersehen lassen, kurz vorzuführen.

Die Figur 19 Taf. II stellt eine kleine Partie eines Gallplastemes, welches sich in regem Wachsthum befindet und sieben Terminalislarven theilweise eingeschlossen hat, in perspectivischer Ansicht dar. Die drei Embryonen *A*, *B*, *C* sind noch innerhalb ihrer Eischale eingekapselt; bei *A* hat das Thier noch eine kugelige Gestalt, doch zeigt das Plastem an der Berührungsstelle mit demselben schon eine geringe Vertiefung; die Larve *B* hat die oben besprochene seitliche Ausbuchtung in der Eischale veranlasst und der Plastemwall erhebt sich deutlich ringsum dieselbe. Bei der Darlegung der weiteren Entwicklungszustände kann Figur 20 zu gleicher Zeit mit erklärt werden, da diese Figur einen verticalen Längsschnitt eines Plastemes, welches drei Terminalislarven (*A*, *B*, *C*) beinahe, und eine vierte (*D*) vollständig überwallt hat, veranschaulicht. In allen diesen Stadien, nur mit Ausnahme der beiden in *C* Fig. 19 und *A* Fig. 20 dargestell-

ten, sind die Eihäute durch präpariren entfernt; bei *D* Fig. 19 ist eine leere Eihaut neben dem noch eben ausserhalb des Plastems hervoragenden Larvenkörper abgebildet; *D*, *E*, *F*, *G* Fig. 19 sind alle vollständig mit einander übereinstimmende Phasen der Ueberwallung, welche ungefähr der Figur 20 *B* entsprechen, und welche sich nur dadurch von einander unterscheiden, dass *C*, *D*, *F* Profilzeichnungen sind, *F* dagegen eine en Face Ansicht ist. Bei *G* Fig. 19, welche mit *C* Fig. 20 übereinkommt, ist das Thier ziemlich vollständig überwallt, in Folge dessen das Kammerloch schon klein ist; bei *D* Fig. 20 endlich, hat Letzteres sich vollständig geschlossen, die längliche Gestalt der Larvenkammer rundet sich erst später zur Kugelform ab. — Alle Verschiebungen in Beziehung zu den benachbarten Geweben des Gallplastems, welche das Thier nach der vollständigen Ueberwallung erfährt werden durch das Gewebewachsthum und die secundären Differenzirungen des Plastemes an sich, bedingt.

Es werden nun in der beschriebenen Weise von dem fortwachsenden Plastem alle Eier nach und nach eingeschlossen, und zwar beginnt der Ueberwallungsprocess mit den unmittelbar auf der Wundfläche ruhenden Eiern (Fig. 17 Taf. II) und dehnt sich allmählich über die gesammte Zahl — häufig über 300 Stück — dieser, in mehreren Etagen (Fig. 18) über einander liegender Eier aus. Zu Folge der gegenseitigen Verklebung der stets nach oben gekehrten Eistiele mit einander und mit dem Obertheil (*ok* Fig. 18) der Knospe vermittelst der mächtigen Schleimdecke (*Sl* Fig. 14), werden die Eier zu einer wohlgeordneten einheitlichen Masse zusammengehalten. Hieraus erklärt sich, dass wenn man von einer jungen, Galle den Obertheil der Knospe (*ok* Fig. 21) zu entfernen sucht, dieses erst gelingt nachdem, die mit demselben verbundenen Eistiele der im Gallplastem (*gp*) vergrabenen Eier nahezu parallel in die Länge ausgespannt und dann zerrissen sind; dabei werden sehr leicht einzelne, noch nicht vollständig eingewachsene Eier, aus dem Plastem gezogen und zeigen sich zwischen denEistielen. Besonders günstige Ansichten von solchen sehr interessanten Präparaten erhält man, wenn man zuvor die Knospenschuppen von dem Ringtheil der Knopse (*rt* Fig. 21) entfernt hat.

§ 9. *Gewebedifferenzirung im Gallplastem.* Untersucht man die mikroskopische Structur des Gallplastems, ehe die Gewebedifferenzirung in demselben anfängt, so findet man, dass sowohl die Zellen der freien Oberfläche (*fo* Fig. 22), wie auch diejenigem (*la*) welche den Larvenkörper berühren, mit den tiefer gelegenen in ihrer Structur übereinstimmen, da dieselben alle einen beinahe glashellen Protoplasten mit deutlichem Kern, Protoplasmafäden und weitem Saftraum einschliessen. Die Zellen haben eine isodiametrische Gestalt und bilden ein Gewebe ohne,

oder mit sehr kleinen Interzellularräumen. Eine parallele und rechtwinklige Stellung der Zellwände zur freien Oberfläche lässt sich sicher nur beobachten in den allerjüngsten Zuständen, in welchen das Plastem eine dünne Schicht über der Wundfläche der Knospenachse bildet; dieses Verhältniss wird aber später verwischt. In der Mitte dieses übrigens homogenen Zellenkörpers liegt eine Zone (*cz* Fig. 23, in welcher während einer beträchtlich längeren Zeit Zelltheilung stattfindet, wie ausserhalb dieser Zone, dieselbe kann deshalb mit dem Namen „Cambialzone" bezeichnet werden. Auch in anderen Gallen kommt eine ähnliche, ihre Theilungsfähigkeit lange beibehaltende Region zur Ausprägung, und wir werden im Kapitel, welches der Kollarigalle gewidmet ist, gewisse Wachsthumsvorgänge kennen lernen, welche durch eine solche Cambialzone bedingt sind. Die Entstehung der verschiedenen späteren Differenzirungen des Plastems, nämlich der Epidermis, der Gerbstoffrinde, der Gefässbündel und der die Larvenkammer einschliessenden Gewebe der Innengalle, geschieht in derselben Weise, wie in den gewöhnlichen Meristemen der normalen Organe. Folgendes möge darüber an dieser Stelle Platz finden.

Die Gefässbündel (*gb* Fig. 22 Taf. II entstehen sehr früh, ja sie finden sich schon in den unteren Partieen des Gallplastems, wenn die oberen Regionen desselben noch fortfahren, Eier einzuschliessen, sie wachsen also mit dem Plastem weiter heran. Ihre Structur bleibt bis zum Ende sehr einfach, im Xylemtheile sah ich nur deutlich Netz- und Spiraltracheïden, im Cambiform lange und dünnwandige sehr feine Elemente, doch liess sich nicht entscheiden ob sich darunter Siebgefässe vorfanden. Bemerkenswerth ist das vollständige Fehlen von Fasern nicht nur in der Terminalisgalle sondern, wie es scheint, in den Cynipidengallen überhaupt *. Die Anordnung und die Verzweigung der Gefässbündel (*gb*) in der weiter entwickelten Galle ergiebt sich aus der Figur 23, und wurde schon oben in § 1 kurz besprochen, hier sei noch bemerkt, dass die Verzweigungsstellen unterhalb der Larvenkammern gelegen sind, und dass sich im Gallennabel netzartig verbundene Gefässbündelschlingen vorfinden, welche nur Xylemelemente und kein eigentliches Cambiform aufzuweisen haben.

Ausser diesen im Gallplastem entstandenen Gefässbündeln finden sich an verschiedenen Orten, ja selbst an der freien Oberfläche der Galle eigenthümliche Gefässbündelreste oder genauer gesprochen Xylemmassen (*xm* Fig. 23) eines ganz anderen Ursprunges. Dieselben sind nämlich aus dem Ringtheil der Knospe her-

---

* Die Bedingungen für die Entstehung der Holzfaser sind von HUGO DE VRIES dargestellt in seiner Abhandlung *„Ueber Wundholz"*, Flora 1876, pag. 58.

künftig und sind an diesen von ihrer ursprünglichen Lage so weit entfernten Stellen, auf die folgende Weise angelangt: Da *alle* lebendigen Zellen der Knospenachse, gleichgültig ob sie im Phloëm, im Mark- oder im Rindenparenchym vorkommen, in Folge der Einwirkung der benachbarten Apteraeier sich an der Gallbildung betheiligen, so ist es begreiflich, dass dieses auch mit den lebenden Zellen des Xylems der Fall sein kann. Dann ist es aber klar, dass die todten Xylemelemente, z. B. die Spiral- und Netzgefässe, welche keiner weiteren Veränderung fähig sind, von den darunter und dazwischen gelegenen wachsenden und sich vermehrenden Zellen mitgezogen werden können, um erst in grosser Entfernung (*xm* Fig. 23), wenn das Plastem zu wachsen aufgehört hat, zur Ruhe zu kommen *. Auch die krystallführenden Zellen des ursprünglichen Mark- und Rindenparenchyms des Knospenringes, können auf dieselbe Weise passiv in die Galle geführt werden.

Von grossem Interesse ist die Bildungsgeschichte der die Gallen vorzugweise charakterisirenden Gewebe der Innengalle, zu deren Besprechung wir nun übergehen. In dieser Beziehung muss jede der folgenden Bildungen: das primäre Nahrungsgewebe, das Stärkegewebe, das secundäre Nahrungsgewebe und das schützende Steinzellengewebe, gesondert betrachtet werden. Beginnen wir mit dem primären Nahrungsgewebe (*ng* Fig. 23). So lange die Galle noch nicht mehr als 2 cM. Mittellinie besitzt, sind die zwei oder drei, an die $^1/_4$ mM. weite Larvenkammer grenzenden Zellenschichten von dem übrigen Gallplastem dadurch deutlich unterschieden, dass ihre Zellen einen trüben, gelblichen, körnigen Inhalt führen; diese Trübung rührt daher, dass die Protoplasten der ebengenannten Zellen mit Oel und Eiweiss durchtränkt sind. Die Structur dieses Gewebes, welches in allen Cynipidengallen vorkommt, ist bei den complizirteren Eichengallen immer nahezu dieselbe, sodass die in *ng* Fig. 39 Taf. III und *ng* Fig. 55 Taf. IV gelieferten Abbildungen des gleichnamigen Gewebes der Taschenbergi- und der Foliigalle auch das Nahrungsgewebe der Terminalisgalle veranschaulichen können.

Die Stärkeschicht entsteht auf der Aussenseite des primären Nahrungsgewebes zu einer Zeit wenn die Gallen nahezu $2^1/_2$ cM. Dicke erreicht haben und die Larvenkammern kaum $^1/_3$ mM. weit sind. Der dabei stattfindende Vorgang ist sehr einfach, da die Plastemzellen keine andere sichtbare Veränderung erleiden, wie eine Anfüllung mit kleinen Stärkekörnchen; in den verschiedenen Plastemzellen geschieht dieses in centrifugaler Richtung von der Larvenkammer aus

---

* Ueber ähnliche Vorgänge bei der Callusbildung an Baumwunden berichtet Trécul, *Accroissement des végétaux dicotyledonés ligneux*, Annal. des sc. nat. Bot., 1853, pag. 157.

und zwar bis zu einer erheblich grösseren Entfernung in der Höhen-, wie in der Dickenrichtung der Galle, wodurch das gesammte Stärkegewebe die Gestalt eines ellipsoidischen Körpers erhält. Seit dem Augenblicke, in welchem das Stärkegewebe sich nicht weiter ausdehnt, scheint überall in der Galle die Zellentheilung aufzuhören, von da an möchte das Wachsthum der Galle also nur auf Zellenvergrösserung beruhen.

Das secundäre Nahrungsgewebe stimmt mit dem primären in jeder Hinsicht überein, führt demnach gleich diesem Eiweis und Oel und ist ebenfalls durch ein trübes Aussehen gekennzeichnet. Dasselbe entsteht in Folge der Umwandlung des Zellinhaltes von den der Larvenkammer zugekehrten Schichten des Stärkegewebes, schon zu einer Zeit, wenn das letztere noch fortfährt, sich auf der dem Nahrungsgewebe entgegengesetzten Seite weiter auszudehnen.

Die Steinzellen bilden sich, nachdem die Neubildung von Stärkezellen beendet ist, und zwar aus den an der Aussenfläche der Stärkeschicht gelegenen, so wie aus den nächsten, die Stärkeschicht begrenzenden Zellenlagen; die Gallen haben wenn dieses stattfindet, wie wir oben sahen nahezu, 3 cM. Dicke erreicht. Die ellipsoidische Gestalt der Steinzellenbekleidung, und somit der Innengalle, erklärt sich aus der ähnlichen oben betrachteten Form der Stärkeschicht; die grosse Achse der Innengalle erreicht dabei durchschnittlich eine Länge von nahezu 5 die kurze von 2 mM. — Anbetreffs einiger anderer Gewebedifferenzirungen der *reifen* Terminalisgallen kann nunmehr auf den Anfang dieses Kapitels hingewiesen werden.

KAPITEL IV.

Die Baccarumgalle *.

Taf. II Fig. 24—34.

§ 1. *Beschreibung der Galle.* Die Baccarumgalle ist eine grünlich oder röthlich gefärbte mehr weniger durchsichtige Kugel von höchstens $1^1/_2$ cM. Mittel-

* Bewohnt von Cynips baccarum LINNÉ. Synonym: Spathegaster baccarum, Spathegaster interruptor und Neuroterus baccarum.

linie, welche sich im Mai und Juni entweder an den männlichen Blüthenkätzchen oder auf der Unterseite (*a* Fig. 33 Taf. II) oder am Rande (*b* Fig. 33) der jungen Eichenblätter vorfindet; da die blattbürtigen Gallen theilweise durch die Blätter hindurchgewachsen sind, sind dieselben auf der Blattoberseite als eine zirkelrunde schwache Erhebung — Gallennabel — sichtbar. In der Mitte dieses Nabels liegt ein brauner Punkt (*nb* Fig. 33), welchen wir später als die Narbe des Kammerloches kennen lernen werden. Sitzen die Gallen am Blattrande, so geben sie oft Veranlassung zur Entstehung von Falten und Kräuselungen in der Blattspreite, wenn nämlich die Ausdehnung der Letzteren mit dem Wachsthum der Galle keinen gleichen Schritt hält; sind die Gallen dagegen ringsum mit der Blattspreite verbunden, so bleibt diese gewöhnlich volkommen eben. Wenn die Baccarumgallen von den höchsten oder den niedrigsten Blättern der Eichensprosse getragen werden, ereignet es sich oft, dass das ganze Blatt zur Bildung der Galle verwendet worden ist, und dieses erklärt sich aus der Kleinheit der Anlagen der betreffenden Blätter zur Zeit der Eiablage seitens der Gallenmutter.

Gallen von ungefähr 5 mM. eignen sich am Besten dazu, die anatomischen Verhältnisse des erwachsenen Zustandes kennen zu lernen, da einerseits die Larven dann noch klein sind und die Gewebe ihrer Umgebung noch wenig zernagt haben, andererseits keine Neubildungen in den letzteren mehr entstehen, da das Wachsthum derselben von da an ausschliesslich auf Zelldehnung beruht.

Wenn man eine solche junge Galle dergestalt mitten durch schneidet, dass dabei die Narbe und die Larvenkammer getroffen werden, so findet man, dass Erstere aus einer kleinen Gruppe abgestorbener brauner Zellen besteht (*nb* Fig. 24 Taf. II). Darunter liegt ein Gewebestrang (*lg*), welcher seinem Ursprunge nach das Gewebe des Kammerloches genannt werden kann, und welcher aus verlängerten, mehrentheils dünnwandigen Zellen besteht, von denen nur die nahe bei der Oberfläche gelegenen dickere Zellwände haben und dadurch collenchymatischen Elementen gleichen. Das Nahrungsgewebe (*ng* Fig. 24), welches die Larvenkammer einschliesst, besteht aus drei oder vier Schichten trübkörniger, Eiweiss und Oel führender Zellen, in den reifen Gallen fehlt dasselbe weil es von der Larve gänzlich verzehrt wird.

Uebrigens besteht die ganze Galle, abgesehen von den Gefässbündeln, beinahe vollständig aus einem grosszelligen saftreichen Parenchym (*sp*), welches gewöhnlich so durchsichtig ist, dass man die Bewegungen der ausgewachsenen schwarzen Wespe innerhalb der Larvenkammer reifer Gallen leicht sehen kann. Die Zellen dieses Parenchyms enthalten einen glashellen Protoplasten * mit einem

* Dieses mehrfach von mir gebrauchte Wort rührt von Hanstein her: Botanische Abhandlungen, 1880, Bd. IV, Heft 2, pag. 9.

oder bisweilen zwei, nicht selten zu riesigen körnigen Kugeln anschwellenden Kernen, und einem grossen Saftraum, in welchem Letzteren sich gelöster, der Galle einen süfsen Geschmack verleihender Zucker vorfindet, welcher aus Fehlingscher Kupferlösung Kupferoxydul präcipitirt. Nur die Epidermis und die subepidermalen Schichten bestehen aus kleineren Zellen, welche aber in ihrer Structur, sowie ihrem Inhalte nach, mit den ebenbeschriebenen übereinstimmen.

In annäherend gleicher Entfernung von der Oberfläche und der Larvenkammer verlaufen die ziemlich unregelmässig verzweigten Gefässbündel (*gb* Fig. 24 Taf. II), welche mit den Gefässbündeln der Blattspreite verbunden sind, und bei ihrem Eintritt aus dem Blatte in den Gallennabel sich gabelförmig verzweigen. Diese Verzweigung findet in der Weise statt, dass die unteren der dadurch entstandenen Bündel die Larvenkammer umkreisen, um der Gallennarbe gegenüber in dem Parenchymgewebe der Galle frei zu enden; die oberen Gefässbündelzweige dagegen, welche eine nur unerhebliche Länge erreichen, bleiben auf den Gallennabel beschränkt, liegen also auch stets oberhalb der Larvenkammer, sie verlaufen ungefähr parallel mit der Blattspreite und enden in der Nähe des Kammerlochgewebes.

In denjenigen Fällen, wo es gelingt, in den Gefässbündelchen, welche immer sehr fein sind, Xylem und Cambiform deutlich zu unterscheiden, ist es Regel das erstere dem Centrum der Galle zugekehrt zu finden.

§ 2. *Die Baccarumwespe und die von ihr erzeugte Lenticularisgalle* *. Anfang Juni fliegen aus den Baccarumgallen die Männchen und Weibchen der Gallwespenform Spathegaster baccarum heraus. Nach der Kopulation setzen die Weibchen sich auf die Unterseite junger, in rascher Vergrösserung begriffener Eichenblätter, welche sich da zur Zeit an der Spitze des Frühlingssprosses befinden. Sie stechen ihre feine Legeröhre in einer zur Blattebene beinahe parallelen Richtung in die Blattsubstanz und zwar in das Schwammgewebe derselben, und niemals in die dickeren Nerven; durch Hin- und Herschiebung machen sie am Ende des $^1/_4$ mM. langen Bohrkanälchens (*bl* Fig. 25 Taf. II) eine kleine Höhlung (*eh*) im Blattparenchym, in welcher der Eikörper Raum finden kann. Derselbe wird dadurch allseitig durch eine Umhüllung zusammengepresster und absterbender Zellen eingeschlossen, welche ihn von den nächst benachbarten lebenden Elementen trennen.

Wie wir bei der Besprechung der Heterogenesis gesehen haben, ist die Bac-

---

* Bewohnt von Cynips lenticularis OLIVIER. Synonym: Neuroterus lenticularis und Neuroterus malpighii.

carumwespe die Urheberin der Lenticularisgalle; zur Entstehung dieser Galle eignen sich von den lebendigen Geweben des Blattes nur die Cambiformbündelchen der feineren Gefässbündelzweige, welche zur Zeit des Eierlegens noch im procambialen Zustande verkehren möchten; die übrigen lebenden Zellen des Blattes, welche den Eikörpern ebenso nahe liegen wie die genannten Bündelchen, nehmen zwar an der Gallbildung selbst keinen directen Antheil, erleiden aber gewisse andere secundäre Veränderungen, welche in der Hauptsache die folgenden sind.

Zuerst muss bemerkt werden, dass alles Gewebe, welches zwischen dem Bohrloch und der Blattunterseite gelegen ist, vollständig abstirbt, wodurch sich erklärt, warum die reife Lenticularisgalle stets neben einer bei zehnfacher Vergrösserung sehr deutlich sichtbaren braunen Narbe auf der Unterseite der Eichenblätter sitzt. In Bezug auf die *oberhalb* des Eikörpers gelegenen Zellen der Blattoberseite lässt sich nun weiter anführen, dass diese in zwei oder drei Schichten vorkommen können, oder, dass die Epidermis auch direct den Eikörper berühren kann; jedenfalls füllen alle diese Zellen sich mit rothem Pigment und bilden im August intensiv rothe Flecke auf der Blattoberseite, genau an denjenigen Stellen, wo sich auf der Unterseite des Blattes die Gallen befinden. Diejenigen *unterhalb* des Eikörpers gelegenen Gewebe der Blattunterseite, nämlich einige Schichten Schwammparenchym und die Epidermis, bleiben im Anfang der Gallbildung unverändert, werden jedoch später durch das wachsende, aus dem Cambiform eines Nerven entstandene, Gallplastem, zur Seite gedrückt und endlich zerrissen, wodurch zwei oder mehr kleine Klappen neben dem letzteren, und daher auch später neben dem Nabel der reifen Galle, entstehen. Das Sklerenchymfaserbündelchen, welches den Cambiformtheil des Blattstranges (*bs* Fig. 25) begleitet, nimmt an der Gallbildung keinen Antheil, sondern wird durch das Plastem etwas zur Seite geschoben.

Zur näheren Beleuchtung dieser Verhältnisse ist in der Fig. 25 die ursprüngliche Lage des Baccarumeies unterhalb der Galle im Blatte bei *eh* schematisch angegeben; der Stiel des Eies endet in der klaffenden Wunde zur rechten Seite der Galle und durchsetzt theilweise das todte Gewebe des Blattes, welches zwischen dem Bohrloch (*bl*) und der unteren Grenzfläche des Blattes liegt.

Wie angeführt entwickelt das Gallplastem der Lenticularisgalle sich aus dem Cambiform desjenigen Gefässbündels, welches dem Eikörper am nächsten liegt, und bricht im Juli aus dem Blattgewebe in der Form eines halbkugligen Höckerchens, welches durch weiteres Wachsthum allmählich die für die Lenticularisgalle characteristische Gestalt einer planconvexen Linse annimmt, die in der Mitte ihrer platten Seitenfläche mittelst eines feinen Stielchens am Blatte aufge-

hängt ist. Während der Monate August und September wächst die junge Galle äusserst langsam, erreicht Anfang Oktober ein erstes Reifestadium, löst sich dann vom Blatte und fällt zu Boden um zu überwinteren und danach, im nächsten Frühjahr, ihre definitive Reife zu erlangen.

Zum richtigen Verständnisse der weiteren Vorgänge, welche in den abgefallenen und überwinternden Gallen stattfinden, ist es nun nothwendig die anatomische Structur derselben, unmittelbar vor deren Trennung vom Blatte, kennen zu lernen. Diesen Zweck wird durch die Untersuchung eines medianen Längsschnittes der Galle erreicht, welcher Folgendes beobachten lässt.

Die vollkommen kugelrunde Larvenkammer (*lk* Fig. 25 Taf. II) ist gänzlich von der noch sehr wenig ausgebildeten Larve — welche ihren Nahrungsdotter aber schon verzehrt hat — angefüllt. Das primäre Nahrungsgewebe (*ng*) besitzt eine sehr eigenthümliche Structur und Form. Es hat nicht, wie in den meisten übrigen Gallen, die Gestalt einer Kugelschale, welche die Larve einschliesst, sondern umgürtet diese, wie ein Ring dessen Querschnitt dreieckig ist. Die Zellen desselben sind Parallelopipeden, deren Seitenflächen aber congruent mit der Oberfläche des Larvenkörpers gekrümmt und dazu normal gestellt sind; der Inhalt derselben ist sehr durchsichtig und lässt einen deutlichen Kern und oft auch Oeltröpfchen erkennen, mit Kupferlösung und Kali entsteht darin eine deutliche Violetfärbung, welche auf die Gegenwart von Eiweiss hindeutet. Die Zellwände sind mehrentheils sehr dünn, doch gilt dieses nicht für alle primären Nahrungzellen ohne Ausnahme, es gibt darunten nämlich solche, welche eine oder zwei stark verdickte Wände besitzen und dadurch den Uebergang zu dem im nächst Folgenden zu besprechenden sklerotischen Gewebe bilden; diese dicken Wände finden sich immer an solchen Seiten der Nahrungszellen, welche den sklerotischen Zellenschichten zugekehrt sind, — so haben z. B. diejenigen Nahrungszellen, welche vom Larvenkörper so weit möglich entfernt sind, und daher einen Ring bilden, welche mit den sklerotischen Zellen auf zwei Seiten in Berührung steht, zwei einander gegenüber liegende stark verdickte Endflächen, welche mit einander durch dünne Seitenwände verbunden sind.

Das Gewebe sklerotischer Zellen (*ss* Fig. 25 Taf. II) bildet eine vollständige Bekleidung des primären Nahrungsgewebes, — mit Ausnahme nur des ebengenannten äussersten Randes des letzteren, welcher aus einer einzigen unbedeckten Zellenreihe besteht, — und stellt demzufolge einen Hohlkörper innerhalb der Galle dar, welcher, wie diese selbst, die Gestalt einer Linse hat. Dem Nabelende gegenüber, also der convexen Seite der Galle zugewendet, besteht dieses Gewebe aus zwei Zellenschichten, dagegen lassen sich in dem Nabelende selbst, die zahlreichen sklerotischen Zellen bis tief in das Stielchen, mittelst dessen die Galle am Blatte

befestigt ist, verfolgen. Die Zellen selbst haben sehr merkwürdige Eigenschaften; zwar sind ihre Wände mehrentheils stark verdickt, doch sind besonders die der Larvenkammer zugekehrten dünn geblieben. Sie führen einen lebenden Protoplasten mit zahlreichen Körnchen, welche daran ein dunkeles Ansehen verleihen und können in Folge eines sehr beträchtlichen secundären Grössenwachsthums in secundäres Nahrungsgewebe veränderen, worüber unten Näheres.

Die Hauptmasse der Galle besteht aus dünnwandigen Zellen, welche sehr dicht mit Stärke angefüllt sind (*sg* Fig. 25) und eine, dass sklerotische Gewebe allseitig einschliessende Rindenschicht darstellen; die auf der Grenze dieser beiden Gewebe befindlichen Zellen kommen in allen Uebergängen zwischen den eigentlichen Stärkezellen und sklerotischen Zellen vor, sind daher mehr oder weniger dickwandig und mehr oder weniger Stärke-reich. Die Stärkekörnchen sind ziemlich klein und zeigen ihre Schichtenstructur sehr deutlich. Nur die der Epidermis angrenzende Schicht der Gallenrinde besteht aus Stärke-freien Zellen mit farblosem Zellsaft und einzelnen Chlorophyllkörnern.

In dem, dem sklerotischen Gewebe berührenden Theile der Stärkeschicht, so wie auch allseitig von dem sklerotischen Gewebe eingeschlossen, verlaufen die ziemlich zahlreichen, sich in einer ebenen Fläche unterhalb der Larvenkammer radienartig ausbreitenden Gefassbündel (*gb* Fig. 25). Dieselben setzen sich im Eichenblatte an dasjenige Gefässbündel (*bs*) an, aus dessen Cambiform das ursprüngliche Gallplastem, und demzufolge die ganze Lenticularisgalle entstanden ist; sie dringen in das Stielchen der Galle hinein, durchsetzen das sklerotische Gewebe desselben, oder bleiben auf die äussere Oberfläche des Letzteren beschränkt, biegen sich in der Nachbarschaft der Larvenkammer scharf rechtwinklig nach aussen und kommen einerseits mit der Stärkeschicht (*sg*) in Berührung, wie aus der Figur 25 ersichtlich, während sie anderseits, und zwar mit ihrem nach innen gekehrten Xylemtheile, mit den sklerotischen Zellen in Contact bleiben. Wie schon aus dieser Darstellung hervorgeht haben diese Gefässbündel, gerade wie diejenigen des Eichenblattes mit welchen sie verbunden sind, einen einfach-collateralen Bau *, in dieser Hinsicht stimmen dieselben also mit denjenigen der Apteragallen, und, wie wir nachher sehen werden, vieler anderer — jedoch nicht aller — Eichengallen überein.

Ich schliesse diese Uebersicht der Structur der Lenticularisgalle mit der Erwähnung, dass ihre Epidermis (*ep* Fig. 25 Taf. II) sich auszeichnet durch schöne Sternhaare, welche zerstreut daraus hervorsprossen und die nicht selten ein im Zellsaft gelöstes rothes Pigment führen, wodurch die Galle, welche in Folge

* De Bary, *Vergleichende Anatomie*, pag. 351.

*

der Gegenwart einzelner in der Rinde vorkommender Blattgrünkörnchen eine gelbliche Grundfarbe besitzt, stellenweise einen braunrothen Anflug erhält.

§ 3. *Veränderungen in der Lenticularisgalle während der Ueberwinterung.* Die meisten Cynipidengallen, welche sich im lebenden Zustand von ihrer Nährpflanze lösen, um, ehe die Wespe herausfliegt zu Boden zu überwinteren, sterben bald nach dem Abfallen; dieses ist z. B. der Fall mit den Gemmae-, Globuli-, Collaris-, Autumnalis- und Albopunctatagallen. Dagegen verhalten sich die verschiedenen, ebenfalls zu Boden überwinternden Linsengallen, wie z. B. die Lenticularis-, Numismatis-, Fumipennis- und Laeviusculusgalle, anders, indem dieselben längere Zeit fortleben und selbst heranwachsen, wenn schon längst von ihrer Nährpflanze getrennt. Die sich dabei ereignenden Vorgänge verdienen eine besondere Besprechung, welche ich an anderer Stelle zu geben hoffe; vorläufig sei in Bezug auf die Lenticularisgalle schon Folgendes bemerkt.

Wenn man die im Oktober von den Blättern fallenden Gallen auf feuchtem Sande aufbewahrt, so schwellen dieselben schon im Laufe dieses Monates erheblich an und veränderen dabei ihre planconvexe in eine biconvexe Form, jedoch bleibt die Länge der Mittellinie der Galle constant dieselbe. Auch die Larve ist zu dieser Zeit schon stark gewachsen und hat durch zernagen des primären Nahrungsgewebes die Kugelgestalt ihrer Kammer in eine unregelmässige umgewandelt. Die mikroskopische Untersuchung lehrt, dass die Vergrösserung der Galle in der Hauptsache auf *Dehnung der sklerotischen Zellen* beruht. Die Möglichkeit einer solchen Dehnung beruht auf das Vorkommen unverdickt gebliebener Partieen der Wandung dieser, lebendes Protoplasma führender Zellen; diese dünnen Partieen der Zellwand werden, wie wir gesehen haben, besonders auf der der Larve zugekehrten Seite der Zellen gefunden. Bemerkenswerth ist, dass die im Gallenstielchen befindlichen, sowie diejenigen dickwandigen Zellen, die auf der flachen Unterseite der Galle die Gefässbündel nach aussen begrenzen, überall gleichmässig verdickte Wände besitzen, welche keines weiteren tangentialen Flächenwachsthums fähig, und demzufolge in den vollständig reifen Gallen von echten Steinzellen nicht zu unterscheiden sind.

Der Zellinhalt des durch Dehnung der sklerotischen Schichten entstandenen secundären Nahrungsgewebes — mit diesem Namen muss man das eben beschriebene Gewebe auf Grund seiner Entstehungsweise und Funktion belegen, — besteht aus einer ziemlich klaren Masse, in welcher sich grosse, leicht sichtbare Oeltropfen und viel gelöstes Eiweiss vorfinden. In der Mitte der gewöhnlich lang-cylindrischen Zellen liegt ein dunkelbrauner Körper rundlicher Gestalt, dessen Auftreten mit der Oel- und Eiweissbildung zusammenhängt. Aehnliche „braune

Körper" werden auch im secundären Nahrungsgewebe zahlreicher anderer Eichengallen gefunden, ungemein schön in der Kollarigalle, bei derer Besprechung wir darauf noch zurückkommen werden.

Während dieser Umwandlung der sklerotischen Zellen verliert die Gallenrinde allmählich ihre Stärke, welche ohne Zweifel theilweise fur die Oelbildung im secundären Nahrungsgewebe, anderntheils auch für die Herstellung neuer Zellwandsubstanz das Material liefert. Zu gleicher Zeit mit dem Verschwinden der Stärke aus den Rindenzellen, dehnen diese sich einigermaassen aus und tragen dadurch etwas zur Vergrösserung der Galle bei. Inzwischen erreicht die Lenticularislarve ihre Reife, und nachdem sie alles Nahrungsgewebe bis auf die entleerte Rinde verzehrt hat, verwandelt sie sich in eine Nymfpuppe, aus welcher kurz nachher, nämlich in Februar oder nach kalten Wintern in März, die Lenticulariswespe herausschlüpft.

§ 4. *Das Eierlegen der Lenticulariswespe.* Diese Wespe ist ein glänzend schwarzes Thier, mit grobpunktirtem Thorax, halbkuglichem Scutellum und fünfgliedrigen Labialtastern. Unter dem Namen Neuroterus Malpighii gibt HARTIG * davon die folgende Beschreibung: „Niger; mandibulis, orbitis oculorum facialibus genitalibusque rufis; antennis basi pedibusque testaceis; coxis, femoribus basi, tibiisque posticis apice plus minus nigris. Abdomen valde compressum, dorso carinato; alae nervis nubeculatis; ♀. Long 2.5 mM." Das Thier steht der Neuroterus numismatis so nahe, dass eine genaue Untersuchung gefordert wird um die auf Eichenknospen gefangenen Exemplare mit Sicherheit zu bestimmen; wünscht man Culturversuche der Baccarumgalle auszuführen, so ist es rathsam die Lenticulariswespe aus ihren Gallen zu züchten und keine im Freien gefangenen Exemplare dabei zu benutzen, weil dieses leicht Täuschungen mit der Numismatiswespe würde veranlassen können. Uebrigens ist es leicht die verschiedenen Neuroterusarten in grosser Anzahl im März, von den Eichenknospen in welche sie Eierlegen, einzufangen.

Beobachtungen über das Eierlegen dieser Art sind leicht auszuführen, da die aus ihren Gallen gezüchteten Lenticulariswespen sich für solche Versuche sehr gut eignen †. Wenn die Thiere auf den Knospen beschäftigt sind, kann man die Zweige, welche diese Knospen tragen, abschneiden ohne die Arbeit zu stören, welche, besonders bei kaltem Wetter, eine Stunde oder mehr ununterbrochen

---

* *Ueber die Familie der Gallwespen*, GERMAR's Zeitschrift, 1840, pag. 192.

† Neuroterus laeviusculus und N. numismatis, welche der Lenticulariswespe im Körperbau so nahe stehen, stimmen auch in ihrer Lebensweise in allem Wesentlichen mit dieser Art überein.

auf der nämlichen Knospe fortgesetzt wird. Wirft man solche Knospen in Aether, so erlaubt die eigenthümliche Verbinding ihrer Legeröhre mit dem Knospeninnern, den Thieren nicht ihre Stellung beim Sterben auch nur im Geringsten zu ändern. Solche Präparate sind desshalb vorzüglich geeignet hinsichtlich der Lage der Eier innerhalb der Knospe ins Klare zu kommen. Meine dessbezüglichen Wahrnemungen will ich nun mittheilen.

Neuroterus lenticularis stellt sich auf die Spitze kräftiger Winterknospen (Grosstriebknospen) ein (Fig. 26 Taf. II), sucht durch hin- und herschiebende Bewegungen der Spitze ihrer haarfeinen Legeröhre die Oeffnung zwischen zwei Knospenschuppen, und lässt ihre Röhre (*Lr*) letzteren entlang bis zur Knospenachse hinabgleiten. Die Legeröhre wird darnach zurückgebogen, und zu gleicher Zeit werden dabei die Basen einiger Knospenschuppen oder die Rinde der Knospenachse durchbohrt, wodurch die Spitze der Legeröhre, zwischen die gefalteten grünen Blätter anlangt. Ist der feine Bohrkanal in die Basen der Knospenschuppen (Nebenblätter) angebracht, so findet man denselben in den angestochenen, von der Wespe verlassenen Knospen, als eine Reihe, genau übereinanderliegender, schwarzer Flecke zurück. Sowohl die Spitze der Schienenrinne (*Sr* Fig. 27 Taf. II), wie diejenige der Stechborsten (*Sb*), welche bei der Herstellung dieser Verwundungen arbeiten, tragen einige sägezahnartige Einschnitte, wie für die Neuroteren im Allgemeinen kennzeichnend. Dadurch dass die Rückenringe stark gekrümmt werden, und demzufolge das ganze Abdomen comprimirt wird, ist nicht nur die Legeröhre sondern dass ganze, nach aussen gepresste äussere Legeapparat, beim Eierlegen sichtbar; darum kann man an Eier-legenden Thieren die quadratische Platte (*Qp* Fig. 26 Taf. II) und die oblonge Platte (*Op*), welche im Ruhezustand vollständig von den Abdominalringen verdeckt liegen, leicht sehen.

Sobald die Spitze der Legeröhre (*Lr* Fig. 26 Taf. II) an die gehörige Stelle in der Knospe angekommen ist, tritt aus derselben der Eikörper hervor, welcher gewöhnlich an den Rand, oder zwischen die beiden Hälften eines durchmitten gefaltenen Blattes (*bt* Fig. 29) dermaassen niedergelegt wird, dass eine directe Berührung zwischen demselben und dem lebenden pflanzlichen Gewebe zu Stande kommt. Wenn das Thier nach der Beendigung dieser ersten Phase des Eierlegens seine Legeröhre zurückzieht, verharrt der Eikörper (*Ek*) an der einmal behaupteten Stelle, doch bleibt der Eistiel theilweise in dem Bohrkanal in der Knospenachse (*a* bis *b* in *ak* Fig. 29) oder in den Knospenschuppen zurück, um andertheils (*Es* Fig. 29) frei zwischen den Letzteren zu enden. Untersucht man den Zustand eines eben gelegten Eies, so zeigt sich dass der Eiinhalt dann noch nicht vollständig in die Schale des Eikörpers (*Ek* Fig. 28) zurückgeflossen ist, sondern, dass auch die Basis des Eistieles (*Es*), welcher letzterer, wie wir ge-

sehen haben, im lebenden Gewebe der jungen Knospenachse vorkommen kann, damit angefüllt ist. Da diese Knospenachse aber niemals zur Gallbildung Veranlassung gibt, ist man berechtigt zu schliessen, dass nicht die Berührung der lebenden pflanzlichen Gewebe mit einem Cynipideneie an sich zur Entstehung einer Galle zureichend ist; dazu ist etwas anderes erforderlich, nämlich, dass sich im Eie ein Embryo vorfindet, dieser beginnt erst auf einem gewissen Entwicklungszustand die Gewebe zu affiziren.

Zur näheren Erklärung der Figur 29 möge hier noch kurz erwähnt werden, dass dieselbe eine kleine Partie einer Knospenachse (*ka*) darstellt, welche ein mittendurch gefalztes Blättchen (*bt*) mit einem, zwischen den beiden Spreitenhälften gelegenen Lenticulariseie (*Ek*) trägt. Uebrigens sieht man auf der Oberfläche der Knospenachse drei junge Seitenknospen deren Tragblätter alle entfernt sind, und ein Nebenblatt welches zu *bt* gehört.

Diese verschiedenen Beobachtungen in Bezug auf die Ablage des Eies wurden im März 1880 ausgeführt und im März 1881 wiederholt. Als die Eier-enthaltenden Knospen im April auf's Neue untersucht wurden, ergab sich, dass der kugelförmige Baccarumembryo sich schon in dem Lenticularisei vorfand. Die Eischale war zu dieser Zeit mit der Oberfläche des Blättchens so fest verklebt, dass es nur durch vorsichtiges Präpariren gelang beide unbeschadet von einander zu trennen. Von diesem Augenblicke an beginnen die ersten Spuren der Gallbildung sichtbar zu werden.

§ 5. *Die Entstehung und das Verhalten des Gallplastems der Baccarumgalle.* Zur Zeit, wenn die Lenticulariswespe ihre Eier in die Eichenknospen legt, sind die grünen Blätter noch in Ruhe und vollständig von den Knospenschuppen eingeschlossen. Die anatomische Structur solcher jungen Blätter ist an den Gefässbündelfreien Stellen die Folgende. Ausser der Epidermis der Blattoberseite und der Unterseite besteht die ganze Dicke aus fünf Zellenschichten ohne deutliche Interzellularräume; der Zellinhalt dieser Schichten besteht aus einem gleichmässig grüngefärbten Protoplasten, welcher noch keine Vacuolen einschliesst. Das Pallisadenparenchym, welches sich schon deutlich von dem übrigen Gewebe unterscheiden lässt, besteht noch aus einer einzigen Schicht, da dasselbe jedoch in den ausgewachsenen Eichenblättern eine doppelte Lage bildet, müssen die Pallisadenzellen sich noch, durch eine mit der Oberfläche der Blattspreite parallelen Wand, quertheilen. Uebrigens findet bei der Vergrösserung des Blattes, nach dem Oeffnen der Knospen, kein weiteres Dickenwachthum in dem Chlorophyllparenchym mehr statt, — während die Zelltheilungen für das Breitenwachsthum des Blattes dann erst recht intensiv stattzufinden anfangen, was sich besonders leicht in dem Pallisaden-

parenchym nachweisen lässt. Freilich verdicken die Blätter sich nach der Entfaltung ziemlich stark, doch beruht dieses auf die Zellenvergrösserung und die Entstehung der Interzellularräume, welche damit gleichen Schritt hält. Die Zellenvergrösserung ist hier, wie im Allgemeinen, die Folge der Vacuolenbildung, doch möchte auch das Protoplasma der Zellen sich dabei noch etwas vermehren.

In den Nerven der jungen, in den Knospen verschlossenen grünen Blätter, verlaufen Gefässbündelchen, deren Spiralgefässe sehr enge gewunden sind. Die Entstehung der Sklerenchymfaserbündel gehört einem viel spateren Entwicklungsstadium des Blattes an, da diese Differenzirung, wie auf Grund ihrer anatomischen Structur zu erwarten war, erst in den längst entfaltenen Blättern, zur Zeit wenn die Vergrösserung derselben aufhört, stattfindet.

Gehen wir nach dieser Besprechung des Baues der Knospenblätter, woraus die Baccarumgallen entstehen, zur Betrachtung des Processes der Gallbildung selbst über. Wie schon bemerkt wurde, geht das Verkleben des Eies mit der Blattspreite diesem Processe voran. Die Umbildung des Blattgewebes in Gallplastem, ist in den Hauptpunkten mit dem übereinstimmenden Vorgang bei der Terminalisgalle identisch; auch hier nimmt man eine schwache, von einer Entstehung von Vacuolen begleitete * Vergrösserung derjenigen Zellen wahr, welche die junge, in der Eischale beschlossene Baccarumlarve umgeben. Hierbei erfahren alle auf dem Querdurchschnitt des Blattes vorkommenden Zellenschichten die abnorme Zelltheilung. Ueber die Weise, wie diese Zelltheilungen zu Stande kommen, finden sich in einer Abhandlung PRILLIEUX's † einige richtigen, durch meine eigene Untersuchung bestätigten Angaben, welche sich auf die Baccarum, Vesicatrix und Curvator-galle beziehen; jedoch muss ich bemerken, dass PRILLIEUX von der Lage des Eies zum Blatte eine durchaus falsche Vorstellung hat, da er von der irrigen Ansicht ausgeht, die Mutterwespe lege ihr Ei mitten in das Gewebe des Blattes. Dieser Fehler erklärt sich daraus, dass er die ersten Entwicklungsphasen, der von ihm untersuchten Gallen, nicht gefunden, und dass er, die längst durch Plastemüberwallung eingeschlossenen Larven, als aus innerhalb der Blattgewebe gelegten Eiern herkünftig betrachtete. Dessenungeachtet eignen sich die von ihm untersuchten Entwicklungsstadiën sehr gut zur Feststellung gewisser Verhältnisse der Zelltheilung, und thatsächlich richtig ist, was er bei seiner Besprechung der Baccarumgalle in dieser Beziehung von den verschiedenen Ge-

---

* Das Plastem der Tricolorgalle, welche durch Neuroterus fumipennis erzeugt wird, entsteht aus Zellen die schon Vacuolen besitzen.

† *Étude sur la formation et le développement de quelques galles*, Annales d. sc. nat. Bot., 1876, pag. 113.

webegruppen, welche in der Dicke der Blattspreite vorkommen, sagt. Von der Epidermis der Blattoberseite (welche ursprünglich das Ei berührte) heisst es: „J'ai vu la masse cellulaire émanant ainsi" (durch Zelltheilung) „de la couche épidermique atteindre une épaisseur au moins trente fois plus grande que celle de l'épiderme normale." PRILLIEUX spricht sich über die Epidermis der Blattunterseite nicht besonders aus, ich selbst sah darin aber eine *noch viel regere Zelltheilung*, wie in der dem Ei angrenzenden Epidermis. Ueber das Pallisadenparenchym bemerkt er „On voit chacune de ces longues cellules se transformer par cloisonnement en une file de quatre à cinq cellules à peu près isodiamétriques." Das übrige grüne Gewebe des Blattes zeigt, wie P. angibt, die stärkste Intensität der Zelltheilung: „La mnltiplication des cellules y atteint son maximum. C'est surtout dans une direction perpendiculaire au rayon partant de l'oeuf de l'insecte que se fait et se repète incessamment le cloisonnement." Hieraus geht also hervor, dass alle Gewebe, welche in der Dicke des Blattes gelegen sind, an der Plastembildung theilnehmen.

Selbst in den erwachsenen Baccarumgallen sind diese Beziehungen zwischen den ursprünglichen Blattzellen und den Zellen der Galle, noch ziemlich deutlich aus der Richtung der Theilwände ersichtlich. So ist z. B. durch Betrachtung der Figur 24 möglich, den Antheil, welchen die Epidermiszellen der Blattoberseite an der Gallbildung genommen haben, im Ungefähren zu beurtheilen. Im Vergleich mit der grossen Anzahl der zur Blattfläche parallelen Theilwände, ist die Zahl der dazu verticalen Wände auffallend gering.

Es ist noch zu bemerken, dass beim Uebergang des Blattgewebes in das Plastemgewebe der Chlorophyllfarbstoff in den Zellen nicht zerstört wird, vielmehr später der reifen Baccarumgalle, in gleicher Weise wie bei der Vesicatrix- und Curvatorgalle, ihre characteristische grüne Farbe verleiht. Die ungefärbten Albipes- und Tricolorgalle dagegen, entstehen aus einem ungefärbten Plastem und dieses aus grünen Blattzellen; freilich haben diese beide Gallenformen jedoch bisweilen einen grünen Anflug.

§ 6. *Ausbildung der Larvenkammer. Verwundung der gallbildenden Gewebe findet nicht statt.* Während die Neubildung des Plastems noch dadurch fortdauert, dass stets neue, darangrenzende Gewebeschichten des Blattes, in Plastem übergehen, tritt an der Berührungsstelle des Eies mit demselben, in gleicher Weise wie bei der Terminalisgalle, eine Wachsthumshemmung ein, welche auch in diesem Falle die Ursache der Entstehung der Larvenkammer ist. Diesen Vorgang sollen die halbschematischen Figuren 30 *a*, *b*, *c* und *d* Taf. II veranschaulichen. Man denke sich in denselben, die als einfache Kugel dargestellte

Larve (*Lk*) noch in der Eischale, welche der Einfachheit halber nicht mitgezeichnet wurde, eingeschlossen. In den Larvenkörpern sind überall die Nahrungsdotter (*Nd* Fig. 30 *a*) angegeben, überdies, in dem durch Fig. 30 *d* dargestellten Zustand, die Köperringe der Larve.

Hier haben wir einen derartigen Ueberwallungsvorgang vor uns, wie ihn das Plastem der Terminalisgalle wiederholt ausführt. Die verschiedenen Stadien dieser Ueberwallung: die Bildung des Plastemwalles ringsum die Larve (*a* Fig. 30), die Erhebung desselben bis oberhalb des Larvenkörpers (*b*, *c*), und das Zusammenneigen der Wulstränder wodurch das Kammerloch entsteht, — alle diese Vorgänge werden durch die angeführten Figuren so vollkommen deutlich, dass ein längeres Verweilen bei denselben unnöthig erscheint. In gleicher Weise möchte sich nun die Erklärung der Figur 31, welche eine sehr junge, vollständig geschlossene Baccarumgalle in Längsschnitt darstellt, von selbst ergeben; hier ist beim Schliessen des Kammerloches (*kl*), das Plastemgewebe derart zusammengepresst, dass eine kleine Erhabenheit, die frühzeitig absterbende und sich braun färbende Gallennarbe (*nb*), auf der Oberfläche des Nabels der Galle entsteht. Oft wird der Eistiel, eben wie solches bei der Terminalisgalle Regel ist, beim Zustandekommen des Schlusses des Kammerloches von den Wulsträndern festgehalten, wie in der Figur 32 perspectivisch abgebildet, und ist bei schwacher Vergrössung, auf $^1/_2$ mM. dicken Gallen, leicht aufzufinden, geht aber später beim Oeffnen der Knospen durch allerlei Umstände verloren.

Wie leicht es auch gelingen mag, durch die Anschauung einzelner glücklicher Präparate, über diese verschiedenen Entwicklungsphasen im Allgemeinen Aufklärung zu erlangen, so schwierig ist es ausreichendes Material für eine détaillirte histologische Untersuchung des Plastemwalles herbeizuschaffen. Wenigstens ist mir dieses bisher noch nicht vollständig geglückt. Allerdings fand ich, wie oben mitgetheilt wurde im Allgemeinen die Angaben PRILLIEUX's betreffs der Zelltheilung bestätigt; damit ist das Problem aber keineswegs gelöst, denn die am Meisten vor der Hand liegenden Fragen: warum „sinkt" die Larve durch die Blattspreite, und warum entsteht die eigentliche Galle auf der Blattunterseite? Sind dadurch in keinerlei Weise befriedigend beantwortet. Die verschiedenen Hypothesen, welche, bezüglich der Erklärung dieser Erscheinungen, sich leicht aufstellen liessen, übergehe ich, und erlaube mir für einige Verhältnisse, welche in dieser Beziehung zu verwerthen sind, auf das unten, bei der Besprechung der Stellungsverhältnisse der Baccarumgalle Gesagte, zu verweisen.

Die morphologische Deutung der verschiedenen Theile der erwachsenen Baccarumgalle (*a* und *b* Fig. 33 Taf. II) ist aber jedenfalls durch die obige Darstellung klargelegt, und die Betrachtung der anatomischen Structur derselben

gewinnt demzufolge an Interesse. Die kleine Vertiefung, welche in der Mitte der Narbe (*nb* Fig. 24 Taf. II) bemerklich ist, erklärt sich aus der Entstehungsweise der Letzteren; das darunter befindliche Gewebe des Kammerloches (*lg*), sowie das um die Larvenkammer vorkommende primäre Nahrungsgewebe (*ng*), welches dort, wo es mit dem Kammerlochgewebe zusammen kommt, örtlich fehlt, ergeben sich als aus der Epidermis der Oberseite des Blattes entstandene Gewebeformen.

In den ganz jungen Gallen bemerkt man ein stark entwickeltes Stärkegewebe (*sg* Fig. 31 Taf. II), welches die im reifen Zustand so durchsichtige Galle, vorher vollständig opac macht; auf der Innenseite grenzt dasselbe an das Nahrungsgewebe und wird von zahlreichen Gefässbündelchen (*gl* Fig. 31 Taf. II) durchsetzt, welche letztere schon frühzeitig ihre definitive Dicke erreichen, und daher in den jungen Gallen relativ mächtiger sind, wie in den erwachsenen Exemplaren.

Es könnte überflüssig erscheinen bei der durch die Entwicklungsgeschichte vollständig erledigte Frage, ob eine Verwundung der gallbildenden Gewebe stattfinde oder nicht, noch länger zu verweilen. In der Literatur über Cynipidengallen wird aber die Existenz einer von der Gallwespe herrührende Stichwunde so vielfach als selbstverständlich vorausgesetzt, und für die Erklärung des Vorganges der Gallbildung dermaassen als wichtig betrachtet, dass ich auf das Irrthümliche dieser Behauptung noch besonderen Nachdruck legen zu müssen glaube. Vor Allem ist es die obengenannte Arbeit PRILLIEUX's, auf welche ich in diesem Sinne zurückzukommen wünsche.

Nicht nur über die Baccarumgalle sondern auch betreffs der Curvator- * und der Vesicatrixgalle † werden von PRILLIEUX Angaben gemacht; auch von diesen Bildungen habe ich die Entstehungsweise verfolgen können und überdies die kleine, aber sehr gemeine Albipesgalle § genau untersucht. Im Gegensatz zu PRILLIEUX, welcher das Ei in allen diesen Fällen als ursprünglich innerhalb des Blattgewebes niedergelegt auffasst, habe ich gefunden, dass diese verschiedenen Bildungen durch die Ueberwallung und Einschliessung von Larven erzeugt werden, welche sich aus an der äusseren Oberfläche des Blattes liegenden Eiern entwickeln. Auch habe ich Grund für die Tricolorgalle **, welche mit der Baccarumgalle in allem Wesentlichen übereinstimmt, auch auf eine ähnliche Bil-

---

* Gallenmutter Aphilothrix collaris.

† Gallenmutter Neuroterus numismatis.

§ Gallenmutter Neuroterus laeviusculus.

** Gallenmutter Neuroterus fumipennis.

*

dungsgeschichte zu schliessen. Ich kann darum das von PRILLIEUX gegebene Résumé seiner Untersuchung nicht unterschreiben. Er sagt nämlich * „Dans certains cas on peut nettement distinguer dans le travail organique qui se produit à la suite de la piqûre de l'insecte les effets différents de deux ordres distinctes d'action de cette piqûre, la lésion mécanique et l'irritation spécifique qui produit une tumeur différente selon la nature de l'insecte. Les suites de la lésion mécanique sont identiques à celles, que causerait une piqûre faite par la pointe d'un instrument quelconque. Il se forme une petite quantité d'un tissu particulier identique à celui qui se produit sur toute plaie fait à un végétal oú la vie est encore active. Ce tissu cicatriciel formé par cloisonnement des cellules voisines de la plaie, ferme la blessure, son développement est très limité." Dieses ist aber im Widerspruch mit den Resultaten der Entwicklungsgeschichte, denn was PRILLIEUX hier als Cicatrisationsgewebe beschreibt, entspricht dem strangförmigen Gewebe des Kammerloches (*lg* Fig. 24) sowie der braunen und todten Zellenmasse der Gallennarbe (*nb*).

PRILLIEUX's weitere Aussage: „Telle est la première phase de l'action spécifique de la piqûre: formation aux dépens du tissu normal de la plante, d'un tissu primordial morbide qui entoure l'oeuf du parasite", — wird erst dann richtig, wenn man darin das Wort „piqûre" durch „jeune larve" ersetzt, aber gerade darauf kommt in diesem Sinne alles an.

§ 7. *Verschiedenheiten in der Stellung der Baccarumgallen an den Organen der Eiche.* Nicht immer sind die Baccarumgallen an den Spreiten der Eichenblätter befestigt sondern sie können auch an den übrigen aus den Knospen hervorkommenden Organen erzeugt werden, so findet man dieselben z. B. nicht selten an Blattstielen, auf der Zweigrinde (*c* Fig. 33 Taf. II), an Nebenblättern, Spindeln männlicher Blüthenständen, Perigonblättern und Staubfäden oder auf dem Blüthenboden männlicher Blüthen, und sie scheinen nur an den weiblichen Blüthen und deren Blüthenspindeln immer zu fehlen. Dass die innere Verschiedenheit jener Organe unter einander, sich nicht über diejenigen Eigenschaften, welche in der Baccarumgalle zur Ausbildung gelangen erstreckt, geht daraus hervor, dass die Charaktere der Galle im Allgemeinen unabhängig von denjenigen des tragenden Organes sind. Nur in einer Hinsicht übt die Natur der Unterlage einen beträchtlichen Einfluss aus auf den Bau der Galle, nämlich auf die relative Lage der Gallennarbe zum Nabel der Galle. Diese Angelegenheit verdient eine nähere Be-

---

* L. c. pag. 134.

trachtung. Wenn das Lenticularisei an die Oberfläche eines Zweiges oder eines Blattstiels abgelegt worden ist, so ist klar, dass ein „Sinken" der Larve oder ein „durchwachsen" der Galle, wie es bei den aus Blättern entstehenden Exemplaren Regel ist, vollständig ausgeschlossen sein muss: das Plastem, welches sich in diesen Fällen nur einseitig erheben kann, nimmt dabei Larve und Narbe des Kammerloches (*nb* Fig. 33*c* Taf. II) mit nach oben und in den reifen Gallen wird die Narbe dann dem Gallennabel gerade gegenüber gefunden. Da die Xylemtheile der Gefässbündel des Zweiges oder des Blattstiels ihren Verlauf vollkommen ungestört unter der Galle verfolgen, sich dagegen im Phloëm der Gefässbündel abnorme procambiale Stränge differenziren, welche in das Gallplastem übergehen, — so ist klar, dass die Gallwirkung seitens des Thieres nur bis zur Oberfläche der Xylembündel in das pflanzliche Gewebe eingedrungen ist; eine solche Tiefe stimmt aber nahezu mit der Dicke eines Eichenblattes überein. Denkt man sich nun eine schwache Lenticularislarve in Berührung mit einem besonders dicken Eichenblatte, so hat es den Anschein, dass die Gallwirkung nicht ausnahmslos durch die ganze Dicke der Blattspreite dringen muss, dass vielmehr in gewissen Fällen der nicht affizirte Theil der Letzteren, eine Gegenstrebe des sich erhebenden Plastems darstellen kann. Es müsste dadurch dann eine Bildung entstehen, welche, wie die rindenständigen Baccarumgallen, ihre Narbe auf dem dem Nabel gegenüber liegenden Pole der Galle zeigte; solche Gallen kommen wirklich bisweilen vor (*d* Fig. 33).

Aus der oben gegebenen Uebersicht der verschiedenen Organe an welchen die Baccarumgalle angetroffen wird, geht hervor, dass die Lage des Lenticulariseies innerhalb der Knospe nicht an besonders streng fixirten Regeln gebunden ist. Es lässt sich desshalb erwarten, dass die Eier bisweilen mit der Rückenseite, anstatt mit der Bauchseite oder dem Rande, des zusammengefaltenen Blättchens in Berührung werden kommen können. An den reifen Gallen müssen in diesem Falle Kammerloch und Gallennarbe nach unten, der Gallenkörper selbst nach oben gekehrt sein, übrigens müssen dieselben mit den schon beschriebenen Blattgallen gänzlich übereinstimmen und unter einander dieselben Verschiedenheiten wie diese, darbieten können. Solche umgekehrten Gallen scheinen aber selten zu sein; es würde interessant sein in günstigen Gallenjahren, wenn die Baccarumgallen bei Tausenden zu finden sind, alle die genannten Züstande, welche dann unzweifelhaft vorkommen, für eine genaue anatomische Untersuchung zu sammeln. Ein solches Jahr ist für die Gegend von Wageningen 1877 gewesen, damals war mir aber der ganze Sachverhalt noch unbekannt; seitdem sind hier die Baccarumgallen von Jahr zu Jahr seltener geworden obschon in März 1880 die Gallenmutter Neuroterus lenticularis noch gemein war.

Dass das Wachsthum der Galle und dasjenige des Blattes im Allgemeinen gleichen Schritt halten geht besonders daraus hervor, dass die Blattspreite in der Umgebung der reifen Gallen nur selten gekräuselt sondern gewöhnlich ganz eben ist. Ein éclatanter Beleg zu dieser Erfahrung bieten diejenigen seltenen Baccarumgallen dar, welche an zwei Lappen eines Eichenblattes zu gleicher Zeit befestigt sind, — zwischen diesen eine Art Ueberbrückung bilden, ohne dabei aber den Raum der Kerbe vollständig in Anspruch zu nehmen (*α* Fig. 34 *b*). Wie mir scheint muss die Erklärung dieses Ausnahmefalles darin zu suchen sein, dass das Lenticularisei dergestalt über der Mitte einer Kerbe des Knospenblättchens abgelegt worden ist (*a* Fig. 34 Taf. II), dass der Eikörper die benachbarten Ränder zweier Blattlappen zu gleicher Zeit berührte, so dass dadurch zwei gesonderte Plastemmassen entstanden sind, die aber bald nachher mit einander verwachsen sind und als einheitliches Ganze die Larve überwallt und eingeschlossen und eine einfache Galle mit nach oben gekehrtem Kammerloch gebildet haben. Dabei haben nun die Ausdehnung der Galle und die Vergrösserung der Blattspreite, gleichen Schritt gehalten, so dass der offene Raum (*α* Fig. 34 *b* Taf. II), welcher aus dem Kerbenwinkei (*α* Fig. 34 *a*) hervorgegangen ist, die nämliche Form erhalten hat als wäre gar keine Galle gebildet worden.

KAPITEL V.

DIE TASCHENBERGI- * UND DIE FOLIIGALLE †.

Taf. III Fig. 35—53 und Taf. IV Fig. 54—58.

§ 1. *Heterogonetischer Zusammenhang der Dryophanta folii und Spathegaster*

---

* Bewohnt von Spathegaster taschenbergi SCHLECHTENDAL. Synonym: Dryophanta taschenbergi.

† Bewohnt von Cynips folii LINNÉ. Synonym: Dryophanta scutellaris und Dryophanta folii. Mit Bezug auf die Synonymie, welche sehr verworren ist, verweise ich nach GUSTAV MAYR, *Genera der Gallen-bewohnenden Cynipiden*, pag. 36. Die Form welche von SCHENCK und MAYR zeitweise Dryophanta folii genannt wurde, für welche MAYR aber in seiner „*Genera*" den Namen Dryophanta pubescentis vorschlägt, findet sich hier in Gelderland sellten an Quercus pedunculata; ein Zweig von Q. pubescens mit mehreren dieser Gallen verdanke ich der Güte Professor MAYR's; diese Galle ist in ihrem anatomischen Bau von der Foliigalle beträchtlich verschieden, LACAZE DUTHIERS hat dieselbe beschrieben und abgebildet (*Recherches pour servir à l'histoire des Galles*, Ann. d. sc. nat. Bot., 1853, pag. 273, Pl. 16 Fig. 8).

taschenbergi. Dass unsere gewöhnliche Gallwespe der Eichenblätter, Dryophanta folii, welche nur im weiblichen Geschlecht besteht, mit der zweigeschlechtlichen Generation Spathegaster taschenbergi genetisch zusammenhängt, — ist zuerst von ADLER gezeigt, später von mir bestätigt gefunden. Seit September 1880 habe ich mich mit der Cultur beider Gallen eingehend beschäftigt und deren Entwicklungsgang ziemlich vollständig beobachtet. Wie früher beschrieben verlässt die Foliiwespe ihre Galle im Spätherbst, und setzt sich sofort zum Eierlegen auf schlafende Augen an der Basis junger Eichenbäumchen (Fig. 35 Taf. III) oder alter Eichenmasern; dadurch wird im nächsten Frühling die kleine sammetartige Taschenbergigalle erzeugt, aus welcher im Juni Männchen und Weibchen der Form Spathegaster taschenbergi herausfliegen. Nach der Befruchtung legen die Taschenbergiweibchen (Fig. 42 Taf. III) ihre Eier in die Nerven der Eichenblätter und erzeugen dadurch die Blattgallen, welche von der Dryophanta folii bewohnt werden.

§ 2. *Beschreibung der Foliigalle.* Die gewöhnliche Blattgalle ist eine grüne oder, an der besonnten Seite, rothfarbige Kugel von 1 à 2, ja selbst 3 cM. Mittellinie. Dieselbe besteht hauptsächlich aus einem Gerbstoff-reichen saftigen Schwammgewebe mit sehr weiten Interzellularräumen, welches an der Oberfläche mit einer dichten Hautschicht bekleidet ist. Die Epidermis führt keine Spaltöffnungen, sondern gerade wie die hypodermalen Zellen, Chlorophyllkörner. Die letztgenannten Zellen haben eine isodiametrische oder kuglige Gestalt, gehen aber durch eine Reihe aller möglichen Zwischenformen in die stark vsrzweigten und sehr grossen Zellen des Schwammgewebes über; je mehr nach innen dessto ärmer werden diese Uebergangszellen an Chlorophyll, dabei aber allmählich reicher an Gerbstoff, welcher sich in der Form isolirter Tropfen im Protoplasma ansammelt. Besonders in der Jugend erhebt sich das Hautgewebe in kleinen hügelartigen Erhabenheiten aus der Oberfläche der Galle, welche durch das spätere Wachstum wieder verschwinden. An den, unter dem Einfluss des Lichtes gerötheten Stellen, wird ein im Zellsaft gelöstes rothes Pigment gefunden, welches sich im ganzen Hautgewebe bis in die äusseren Schichten des Schwammparenchyms nachweisen lässt. — Die Bewohnerin findet sich in den reifen Gallen in einer geräumigen Höhlung, welche von einem ziemlich resistenten Gewebe mit mässig dickwandigen Zellen eingeschlossen ist. Da die Innenfläche dieser Höhlung in den nicht erwachsenen Gallen mit Nahrungsgewebe bekleidet ist, kann man auch hier von einer Innengalle reden.

Mittelst eines feinen und kurzen, erst bei schwacher Vergrösserung sichtbaren Stielchens (Fig. 51 Taf. III), hängt die Galle mit dem Innern eines dicke-

ren Blattnerven zusammen, und in Bezug auf den anatomischen Zusammenhang der Gewebe, stimmt ihre Befestigungsweise genau überein mit derjenigen von Wurzeln an anderen Wurzeln oder an Stengeln.

Schon Mitte September findet man nach warmen Sommern die vollständig ausgebildete Wespe in der Innengalle. Das Thier ist dann aber noch schwach und wartet lange bevor es die dicke Mauer seiner lebenden Wohnung vollständig durchbohrt; dieses geschieht erst Ende November, nachdem die mit den Blättern abgefallenen Gallen einige Zeit zu Boden gelegen haben. Das Bohrloch wird stets im Aequator der Galle angebracht. Bemerkenswerth ist, dass die Wespe schon einige Wochen vor dem Ausschlüpfen einen Kanal durch die ganze Dicke der Rinde ihrer Galle genagt, die Oberhaut zu durchboren aber unterlassen hat, und in diesem Kanale mit dem Kopfe nahe zur Oberfläche den geeigneten Augenblick zum Ausschlüpfen erwartet. Dieser Instinct mag sich wohl in der Weise erklären lassen, dass die Wespe sich an der eben genannten Stelle besser von den Witterungsverhälltnissen unterrichten kann, wie im Innern der Galle, ohne den Schutz der letzteren vollständig zu verlieren. Besonders scheint die Temperatur hierbei in Betracht zu kommen, denn durch das Aufbewahren der Galle in einem geheizten Zimmer kann man die Flugzeit der Wespe bis in die Mitte Januar verschieben, während im Freien, selbst schon im Dezember, nur ausschliesslich von ihren Bewohnern verlassene Gallen aufgefunden werden können. Das Eintreten einer gewissen niederen Temperatur möchte also für die Thiere das Signal sein zur Herstellung des Flugloches und zum Entweichen *. — Die Gallen werden durch den eigenthümlichen Bau des spaltöffnungsfreien Hautgewebes längere Zeit für Austrocknen bewahrt, und können wie ein Apfel oder eine Birne Monate lang frisch bleiben. Fallen sie ins Wasser, so werden sie durch das Schwammgewebe ihrer Rinde treibend gehalten, und die Thiere lassen sich durch das fremde Element nicht in den Gallen zurückhalten, sondern kriechen heraus und erreichen das Land.

Pflückt man die Gallen im August ab und bewahrt dieselben trocken auf, so leisten die Hautgewebe zwar zu wenig Widerstand um das Einschrumpfen zu verhindern, nichtsdesstoweniger entwickeln die Bewohner sich jedoch anscheinend normal und kommen zur gehörigen Zeit nach aussen, sind dann aber etwas kleiner wie gewöhnlich; zum Eierlegen habe ich solche Thiere nicht bringen können.

---

* Die nahe verwandte Divisawespe kommt im Monat Oktober, sowohl im erwärmten Zimmer, wie in der Kälte, aus ihren Gallen hervor, kriecht aber, wenn die Umstände für das Eierlegen nicht günstig sind, bisweilen wieder in dieselben hinein.

§ 3. *Lebensgeschichte und Eiablage der Foliiwespe.* Die erste Sorge der Dryophanta folii in der Aussenwelt, ist das Aufsuchen einer geeigneten Brutstelle. Als solche fungiren die kleinen Knospen, welche man in grosser Anzahl an den in schattigen Wäldern gemeinen maserartigen Anschwellungen alter Eichenstämme antrifft. Für Gartenculturen der Taschenbergigallen eignen sich aber ganz vorzüglich die einjährigen Eichenkeimlinge, welche oberhalb der Samenlappen einige, unter gewöhnlichen Umständen nicht austreibenden Präventivknospen tragen (*cp* Fig. 35 Taf. III). Solche Pflanzen habe ich im Dezember 1880 und 81 in Töpfe gesetzt und unter darüber gestellte Bechergläser einige Wespen gebracht, welche sofort mit Eierlegen begonnen sind.

Die Foliiwespe besitzt in Uebereinstimmung mit der Kleinheit der von ihr benutzten Knospen, ein sehr kurzes Legeapparat, welches aus einer 1 mM. langen Legeröhre (*Lr* Fig. 36 *A* Taf. III) besteht, die mit der oblongen Platte (*Op*) und der, an die quadratische Platte (*Qp*) verbundenen Winkelplatte (*Wp*), zusammenhängt. Die Legeröhre (*Lr* Fig. 35) wird beim Eierlegen quer durch mehrere Knospenschuppen, vertical abwärts, in die Richtung des Vegationspunktes (*vp*) der für das Eierlegen gewählten Knospe, hingebohrt, ohne dabei aber diesen Vegetationspunkt selbst zu verwunden. Das Thier hat sich dabei derweise auf die Nährpflanze niedergesetzt, dass es mit dem Hinterkörper die Knospe berührt und, bei Hebung der Füsse, mit dem vollen Gewicht des Körpers auf die Legeröhre drücken kann. Ein einziges Ei (*Ek* Fig. 36 *B*) wird auf die äusserste Spitze des Vegetationspunktes niedergelegt (*Ek* Fig. 35), und, vermittelst eines Tropfens zufliessenden Schleimes aus der Schleimblase des Thieres, verklebt sich der Eistiel mit den nächsten Knospenschuppen.

Vergleicht man die Längenverhältnisse der Legeapparate von Dryophanta folii und Neuroterus lenticularis (*Lr* Fig. 26 Taf. II) mit einander, so springt die Proportionalität der Dimensionen mit denjenigen der von den beiden Thierformen zum Eierlegen benutzten Knospen deutlich ins Auge; für die grosse Foliiwespe mit ihrer kurzen Legeröhre, würde es unmöglich sein ihr Ei in das Innere einer Grosstriebknospe zu bringen, während die kleine Lenticulariswespe, welche der letzteren durch die ausserordentliche Länge des genannten Körpertheiles adaptirt ist, ihrerseits, in den Präventivknospen keinen geeigneten Ablagerungsort für ihre Eier findet.

Bei meinen zu Hause ausgeführten Versuchen mit der Foliiwespe waren die für das Legen eines Eies erforderten Arbeiten in 10 Minuten vollendet, während welcher Zeit das Thier vollkommen still auf der Knospe sass, nur im Legeapparat fanden schwache Bewegungen statt. Das Thier kroch dann nach einer anderen Knospe, um dort, wenn eine genaue Untersuchung mittelst der Fühler

ein befriedigendes Ergebniss darbot, das Spiel zu wiederholen. Verfolgt man das Betragen der Gallwespen bei diesen Arbeiten sorgfältig, so ist es schwierig daran zu zweifeln, dass die Thiere sich durch den Geruch unterrichten lassen.

Während der Zeit des Eierlegens gönnt die Foliiwespe sich dann und wann eine Mussestunde um Nahrung zu sich zu nehmen; diese besteht aber aus den nämlichen Knospen, welche sie als Brutstelle benutzt, ja, sie verzehrt dabei bisweilen Knospen in welchen sich schon Eier vorfinden. Ob sie bei diesem wunderlichen Betragen, die von ihr selbst mit Eiern belegten Knospen von denjenigen Knospen zu unterscheiden vermag, welche Eier ihrer Schwestern enthalten, konnte ich nicht ermitteln.

Indem ich diese Versuche im Zimmer im Kleinen ausführte, mit der Absicht die Lebensweise der Wespe näher kennen zu lernen, überspannte ich zu gleicher Zeit in meinem Garten eine Reihe jähriger, 2 à 4 d M. hohe Eichenkeimlinge mit einem grossen Stück Nesseltuch, und warf darunter viele Foliigallen deren Bewohnerinen im Begriff standen auszuschlüpfen; die Ränder des Tuches wurden dann mit Erde überdeckt um den Thieren das Entweichen unmöglich zu machen. Zweck dieser Versuchsanstellung war, eine genügende Anzahl jüngerer Zustände der Taschenbergigalle für eine entwicklungsgeschichtliche Untersuchung zu erhalten. Im Jahre 1880 war das Eierlegen Mitte Dezember beendigt; unter den Gazenetzen im Garten fanden sich nunmehr nur todte Thiere, deren einige in derselben Weise an den Eichenstämmchen geklammert sassen, wie als sie noch lebten.

§ 4. *Die Taschenbergigalle und ihre Entwicklungsgeschichte.* Ehe ich zur Besprechung der Entstehung der Taschenbergigalle übergehe, scheint es mir nöthig eine kurze Beschreibung der äusseren Merkmale dieser wenig bekannten, Bildung vorauszuschicken. — Bei einer Dicke von 2 m M., besitzt die kleine, im erwachsenen Zustand cylindrische Galle 4 bis 5 mM. Länge (Fig. 40 und 41 Taf. III). Die Oberfläche derselben ist schön violetfärbig zufolge des purpurnen Zellsaftes, welcher in den, in Haare umgewandelten Epidermiszellen enthalten ist; diese Haare sind hakig nach unten gekrümmt und verleihen der Galle ein rauhes Aeusseres. Diese beiden Merkmale machen es schwierig die Galle von ihrer Unterlage zu unterscheiden, und dieses gilt besonders für diejenigen Exemplare, welche auf schlafenden Knospen in Rindenrissen alter Eichenstämme sitzen. Die Farbenähnlichkeit zwischen der Galle und ihrem Fundorte erklärt die geringe Bekanntschaft der Entomologen mit derselben, während sie doch, bei einiger Uebung, leicht in grösserer Anzahl eingesammelt werden kann.

Unterhalb der Galle findet man stets den mit Schuppen (Fig. 40) bedeckten Ringtheil der kleinen tragenden Knospe aus deren Vegetationspunkt die Galle hervorging; bisweilen auch ein verlängerter Spross mit einzelnen grünen Blättern. Auf

der Spitze der reifen Galle werden dann und wann einige kleinen dreieckigen Anhänge gefunden (*br* Fig. 40), welche wir bei der Besprechung der Kammerbildung, als Blattrudimente werden kennen lernen, und die aus den Blattanlagen des Vegetationspunktes hervorgegangen sind.

Im Mai und Juni ist die Galle reif und zu dieser Zeit findet man in der geräumigen Höhlung, welche nur durch wenige dünnwandige Zellenlagen von der Epidermis getrennt ist, das, im Verhältniss zür Grösse der Galle, sehr grosse Thier (Fig. 42 Taf. III); dieses nagt sich gewöhnlich Mitte Juni, ein rundes Flugloch in die Gallwand und schwärmt dann im Eichengebüsch herum. Die von ihren Insassen verlassenen Gallen sammt den Knospenringen von welchen dieselben getragen werden sterben und vertrocken bald nachher und werden von dem Baume abgestossen.

Gehen wir nun zur Betrachtung der Entwicklungsgeschichte dieser Galle über.

An schattigen Hügelabhängen gen Süden, treten die ersten jüngeren Entwicklungsstadiën schon im März auf; kühlere Orte bringen während des ganzen Monates April neue Gallen, und bei Gartenculturen hatte ich vom Anfang bis zur Mitte des letztgenannten Monates, ein geeignetes Material zur Disposition zur Untersuchung der Ueberwallungsvorgänge der Larve durch das Gallplastem.

Die Bildung des Gallplastems wird in diesem Falle, in gleicher Weise wie bei der Baccarumgalle, von der, innerhalb der Eischale des Foliicies eingeschlossenen Taschenbergilarve verursacht; ohne dass dabei dieser Eischale eine besondere Bedeutung zukömmt. Es konnte darum in den Figuren, welche den Vorgang der Ueberwallung zu erläutern bestimmt sind (Fig. 37 Taf. III), von dieser Eischale abstrahirt werden. Betreffs dieser Figuren sei noch Folgendes zu bemerken erlaubt. Zwar sind sie ursprünglich mit Hülfe des Zeichenprisma's skizzirt, doch war es nöthig jede derselben aus mehreren Theilbildern zusammenzustellen, welche letztere aber, nach, aus verschiedenen Knospen herkünftigen Präparaten entworfen waren, da sich der ganze Zusammenhang erst dadurch vollständig überblicken liess; hierbei war es unvermeidlich mehr weniger zu schematisiren. Eischale und Eistiele lassen sich beim Präpariren sehr leicht, und ohne die geringste Verletzung der Umgebung entfernen.

Wie aus der ursprünglichen Lage des Foliicies innerhalb der Knospe (*Ek* Fig. 35 Taf. III) erhellt, ist die junge Taschenbergilarve (*Lk* Fig. 37*a* Taf. III) im Anfang mit der Spitze des Vegetationspunktes (*vp*) in Berührung und kann ihre Wirkung unmittelbar auf das Meristem desselben ausüben. Die erste Anzeige dieser Wirkung ist eine mässige Zellenvergrösserung, und das Auftreten von Vacuolen innerhalb der Zellen; demzufolge entsteht ein Gewebe, welches sich in jeder Hinsicht mit dem Plastem der Terminalisgalle (Fig. 22 Taf. II) vergleichen lässt, und mit demselben Namen bezeichnet werden kann. Das weitere Wachsthum

desselben findet in der Weise statt, dass ein Hohlkörper gebildet wird, welcher sich mit dem Receptaculum epigynischer Blüthen vergleichen lässt. Wie bei den früher beschriebenen Gallen wird auch hier die Ausdehnung des Plastemgewebes im Berührungspunkte mit der Larve eingeschränkt (*gp* Fig. 37*b* Taf. III), wodurch ein Ringwall entsteht, der sich ringsum den Larvenkörper erhebt und sich oberhalb des Letzteren zusammenkrümmt (*gp* Fig. 37*c*). Das Thier wird dadurch mehr und mehr dem Blick entzogen; doch bleibt es noch während einiger Zeit möglich, in den jungen Plastemen, welche man durch einen Horizontalschnitt von der Knospenachse getrennt, und mit der Schnittfläche nach unten auf einen Objectträger gebracht hat, mit Hülfe des Mikroskops durch das Kammerloch (*kl*) hindurch auf das Thier hinab zu schauen, und in der Haut desselben Contractionsbewegungen zu beobachten. Zuletzt wird das Thier vollständig vom Plastem vergraben (Fig. 37*d* Taf. III) und das Kammerloch schliesst (*kl*) sich dann gänzlich. Auffallend ist die beinahe vollständige Uebereinstimmung dieses ganzen Vorganges mit dem, was wir in den jüngeren Entwicklungsstadien der Terminalis- und Baccarumgalle gesehen haben. Die äusserlich sichtbaren Veränderungen im Larvenkörper bestehen, während der Ueberwallung, besonders in dem Schwinden des Nahrungsdotters (*Nd*) und dem Auftreten der Chitinkiefer und einiger Rückenringe (Fig. 37*d* Taf. III).

Ein Blick auf die äussere Gestalt des Gallplastems, wie in den Figuren 37 *b*, *c*, *d* in Längsschnitt dargestellt, zeigt dass nicht allein das Meristem des Vegetationspunktes an sich, sondern auch die jüngeren, zum Vegetationspunkte gehörigen Blattanlagen sich an der Plastembildung betheiligt haben; auf diese Weise muss man das Vorkommen der Anhänge, welche sich auf den Flanken sowie auf der Spitze des Plastemwalles finden, und die Gegenwart der daraus hervorgehenden dreieckigen Gebilde (*br* Fig. 40 Taf. III) der reifen Galle, erklären. Hieraus ergibt sich, dass die Gallwirkung sich über einen Bezirk nicht unerheblicher Grösse auszudehnen vermag; die Dimensionen dieses Bezirkes lassen sich einigermaassen beurtheilen aus der Anzahl der Blattanlagen, welche in der Plastembildung begriffen sind.

§ 5. *Anatomischer Bau der Taschenbergigalle.* Die gesammten Gewebeformen, welche in der Taschenbergigalle entstehen, kann man nur in den jungen, nicht ausgewachsenen Exemplaren kennen lernen, da in den reifen Gallen gewisse Theile von der Larve verzehrt sind Im Ganzen lassen sich in der ziemlich einfach gebauten Galle vier Gewebesysteme unterscheiden, nämlich das Nahrungsgewebe (*ng* Fig. 38 Taf. III), das Stärkegewebe (*sg*), die Gefässbündel (*gb*) und die Epidermis (*ep*). Das Nahrungsgewebe bildet eine, im Ver-

hältniss zur Grösse der Galle, sehr mächtige Schicht, welche die Larvenkammer allseitig einschliesst und besonders auf der dem Nabelende der Galle zugekehrten Seite, kräftig entwickelt ist; unter günstigen Wachsthumsbedingungen ist dasselbe in der Taschenbergigalle so reichlich vorhanden, dass es, wenn das Thier schon in den Nymfenzustand eingetreten, noch theilweise unzerstört in der unteren Region der Larvenkammer zu finden ist. An derjenigen Stelle, wo sich das Plastem geschlossen hat, nämlich bei *lg* Fig. 38 Taf. III, ist es nicht zur normalen Ausbildung gelangt, sondern erfährt, wie in der Baccarumgalle, eine Unterbrechung. In jeder Zelle desselben (*ng* Fig. 39 Taf. III), liegt ein Vacuolenfreier Protoplast mit sehr grossem Kern, welcher trübkörnig und reich an Oel und Eiweiss ist; die Zellwände sind dicker wie im Nahrungsgewebe der meisten anderen Gallen. Das Amylumgewebe (*sg* Fig. 39) dessen Zellwände ebenfalls mässig verdickt sind, und welches sich zum Theil selbst in reifen und absterbenden Gallen noch unverändert vorfindet, ist von äusserst feinen Stärkekörnchen dicht angefüllt. Die ganze, ausserhalb des Nahrungsgewebes liegende Gallenrinde, besteht aus diesem Gewebe, sodass dasselbe auch die Epidermis (*ep* Fig. 39 Taf. III) unmittelbar berührt. Letztere selbst ist vollständig in papillenartige Haarzellen umgewandelt, deren Protoplasten einen Saftraum von schön violetter Farbe einschliessen. Während die Basen dieser Haare sich zufolge ihrer grossen Dicke berühren, hängen, wie schon bemerkt wurde, deren dünnere Spitzen hakig gekrümmt nach unten, und verleihen der Galle ihre dunkele und rauhe Oberfläche, welche bei schwacher Vergrösserung sammetartig erscheint.

Schon ziemlich früh, z. B. schon in dem in Fig. 37*c* dargestellten Entwicklungsstadium, haben sich in dem, übrigens gleichartigen, Plastemgewebe die feinen Gefässbündelchen differenzirt, welche mit dem sich vergrösserenden Plastem mitwachsen. In den reiferen Gallen (Fig. 38 Taf. III) werden sie in parallel zur Oberfläche angeordneter Ringlage angetroffen, und verbinden sich im Gallennabel mit dem Gefässbündelsystem der Knospenachse.

Das aus langen dünnen Zellen aufgebaute Kammerlochgewebe endet in die Gallennarbe (*nb* Fig. 38 und 40 Taf. III), die durch eine kleine Einsenkung in der Epidermis, wo ringsum die früher besprochenen Blattrudimente (*br* Fig. 40 Taf. III) stehen, gekennzeichnet ist.

§ 6. *Die Similisgalle.* An die Taschenbergigalle schliesst sich eine andere Bildung so ausserordentlich nahe an, dass es geeignet erscheint dieselbe hier kurz zu besprechen; ich meine die von ADLER * entdeckte Similis-

---

* *Ueber den Generationswechsel der Eichengallwespen*, Zeitsch. f. wiss. Zoölogie, 1881, pag. 189.

galle *, welche nur bei genauer Untersuchung von der Taschenbergigalle zu unterscheiden ist. Die Gallenmutter Dryophanta longiventris, kommt aus der schönen, mit Höckerchen und rothen Bändern gezierten, sehr harten Galle der Eichenblätter, welche von der Foliigalle ganz verschieden ist, so dass die grosse Uebereinstimmung der beiden genannten Gallen der zweigeschlechtlichen Generation um so merkwürdiger wird. In der anatomischen Structur bieten jedoch die Taschenbergi und die Similisgalle mehr Verschiedenheiten dar, wie man bei der äusserlichen Uebereinstimmung erwarten würde. So verliert z. B. die Similisgalle ihre Stärke im Amylumgewebe vollständig und erhält dabei einen weiten Saftraum in welchem grosse Krystalle vorkommen. Auch treten in dem Protoplasten kleine Blattgrünkörperchen auf, welche der Galle einen mehr grünlichen Anflug verleihen. Die Haarzellen der Epidermis haben die Gestalt gewöhnlicher Papillenzellen; die Papillen sind nicht hakig nach unten gekrümmt und berühren sich an ihrer Basis auch nicht; ihr Zellsaft ist farblos oder grünlich.

Im Winter 1880—81 habe ich die Similisgalle in ganz analoger Weise, wie bei der Taschenbergigalle beschrieben, in meinem Garten cultivirt. Ich erhielt dabei eine genügende Anzahl Gallen um die Hauptphasen ihrer Entwicklungsgeschichte feststellen zu können, und fand, dass diese vollkommen mit dem entsprechenden Vorgang bei der Taschenbergi übereinstimmt. Da übrigens auch die Gewohnheiten der Longiventris- und Foliiwespe nahezu identisch sind, und besonders ihr Eierlegen in gleicher Weise stattfindet, mögen, zur Vermeidung von Wiederholungen, diese kurzen Bemerkungen über die Similisgalle genügen.

§ 7. *Besondere Stellungsverhältnisse der Taschenbergi sowie der Similisgalle.* Gewisse Abnormitäten, welche bezüglich der Stellung dieser Gallen auftreten sind nicht ohne Interesse und mögen desshalb kurz erörtert werden.

Es ist möglich unterhalb eines mit einer Larve besetzten Vegetationspunktes, im Gedanken durch eine Linie annährend die Grenze anzugeben, bis zu welcher die von dem Thiere ausgehende Gallwirkung sich ausdehnt. Alles oberhalb dieser Linie gelegene Gewebe wird in Gallplastem umgewandelt, während der darunter gelegene Gewebetheil diese Veränderung nicht erfährt. Die genannte Linie schneidet entweder — und dieses ist der am meisten vorkommende Fall — die Region der Anlagen der grünen Blätter der Knospenachse des Cryptoblasten, lässt dann also einige unveränderten Anlagen von grünen Blättern unter sich während

* Bewohnt von Spathegaster similis ADLER, und durch die Gallenmutter Dryophanta longiventris erzeugt.

die höher gelegenen der Gallbildung anheimfallen; — oder die Grenze zwischen dem zu Gallplastem werdenden und dem nicht affizirten Stück der Knospenachse liegt unmittellbar unterhalb des streckungsfähigen, die Anlagen der grünen Blätter tragenden Theiles. Wie zu erwarten, zeigt letzterer Fall sich besonders bei den schwachen und kleinen Cryptoblasten, welche die niedrigsten Stellen an den Eichenkeimlingen einnehmen, mithin nahe am Boden vorkommen. Findet sich unterhalb der Galle noch ein streckungsfähiger Theil der Knospenachse und ist die Vegetationskraft der Knospe so klein, dass daraus unter normalen Bedingungen kein Spross würde entstanden sein, wie es für die Cryptoblasten die Regel ist, so wird die Galle von einer, zwar nicht verlängerten, aber doch für Verlängerung fähigen Achse getragen werden. Wird die Vegetationskraft solcher gallenhervorbringender Knospen gesteigert, so kann der genannte Achsentheil sich verlängeren, und demzufolge eine kürzer oder länger gestielte Galle (Fig. 41 Taf. III) entstehen. Hier sei beiläufig bemerkt, dass die Blätter und die Sprossachse, welche eine „gestielte" Galle tragen, zur vollkommen normalen Ausbildung gelangen, — mithin erscheint der Schluss berechtigt, dass in einem gewöhnlichen wachsenden Spross der Eiche, die Entwicklungsrichtung der Blatt- und Zweiganlagen, in keinerlei Weise durch die Gegenwart oder das Fehlen des Vegetationspunktes beeinflusst wird. DARWIN's neueste Entdeckungen in Bezug auf die Wirkung des Vegetationspunktes der Wurzel auf den streckungsfähigen Theil derselben, machten eine solche Beeinflussung am Sprosse zwar nicht wahrscheinlich, allein annehmbar.

Bekanntlich kann man durch Abschneiden des Stengeltheiles, welcher oberhalb einer Knospe vorkommt, die Vegetationskraft dieser Knospe stark steigern. An meinen jungen Eichenbäumchen gelang es mir dadurch in gewissen Fällen aus den mit Folii- oder Longiventriseiern belegten Knospen „gestielte" Taschenbergi- oder Similisgallen künstlich zu erziehen, bei anderen Versuchen gelang dieses aber nicht. Die Erklärung dieses ungleichen Verhaltens glaube ich im Obigen gegeben zu haben: soll Sprossbildung unterhalb der Galle möglich sein, so muss eine für Vergrösserung fähige Partie der Knospenachse übrig geblieben sein; ist Letzteres nicht der Fall, — hat die Plastembildung sich über die ganze wachsthumsfähige Region ausgedehnt, — so ist auch bei stärkster Steigerung der Vegetationskraft der Knospe, Stielbildung unterhalb der Galle unmöglich.

Eine andere Abnormität, welche ich bei den im Garten cultivirten Taschenbergigallen, beobachtet habe, ist die Doppellgallbildung. Diese Doppelgallen sind darum besonders interessant, weil dieselben, anstatt, wie im gewöhnlichen Fall, an der Sprossspitze zu stehen, *ein Blatt vertreten.* Eine dieser Gallen war zu

gleicher Zeit „gestielt," sass demnach an einem wohl ausgebildeten Sprosse, und hatte zwei Nebenblätter auf ihren Seiten, und eine secundäre Seitenknospe in ihrer Achsel. Zur Erklärung ihrer Entstehung muss angenommeu werden, dass eine oder zwei Foliiwespen, zwei Eier in *eine* Knospe gelegt haben, welche zusammen auf dem Gipfel des Vegetationspunktes keinen Platz finden konnten, demzufolge sich seitlich verschoben, und auf die Spitze einer weiter entwickelten Blattanlage angelangt, Letztere zur Gallbildung in Anspruch genommen haben. Die beiden dabei entstandenen Plasteme sind zu einer einheitlichen Masse verschmolzen, welche zwei Larvenkammern innerhalb gemeinsamer Rinde erzeugt hat.

Auch bei der Kollarigalle werden wir Doppelgallen kennen lernen, welche freilich in ganz anderer Weise entstehen.

§ 8. *Die Taschenbergiwespe und das Eierlegen derselben in die Eichenblätter.* Diese Wespe verlässt Anfang Juni ihre Wohnung. Männchen wie Weibchen (Fig. 42 Taf. III) sind ziemlich bewegliche glänzend schwarze Thierchen. Die Weibchen gleichen beim ersten Anblick ihrer Mutter, der Foliiwespe, genau nur sind sie weit kleiner. Es ist leicht mit diesen Thieren Versuche zur Cultur der Foliigalle auszuführen, da sie unter Gazenetzen viele Eier legen, und diese mehrentheils Gallen erzeugen. Im Freien scheinen sie sich aus freier Bewegung nicht sehr weit von ihrem Geburtsort zu entfernen. So waren im Sommer 1881, zahlreiche, nicht eingezwingerte und nicht künstlich mit Wespen besetzte Eichenbäumchen eines Gartenbeetes, welche im vorhergenden Winter zur Cultur der Taschenbergigallen gedient hatten, sehr reich mit Foliigallen besetzt; hier müssen also viele Wespen beim Schwärmen, sich nicht über die Grenzen des Beetes entfernt haben. Im Freien kann man zufolge dieses geringen Wanderungsvermögens der Taschenbergiwespen, am sichersten eine reiche Ernte von Foliigallen sammeln, wenn man das Eichengehölz absucht, das sich am Rande tiefschattiger Thäler findet. In solchen dunkelen Beständen kommen nämlich an den Eichenstämmen besonders viele, an Taschenbergigallen reichen Masern vor, — zur Zeit des Schwärmens fliegen die Thiere nicht weit davon, sondern suchen die nächst benachbarten, stark besonnten, niedrigen Bäume, welche am Thalrand stehen zum Eierlegen auf.

Nur solche Eichenblätter werden von der Taschenbergiwespe zum Eierlegen erwählt, welche sich noch vergrösseren, deren Sklerenchymfaserbündel mithin noch nicht ausgebildet sind sondern noch aus dünnwandigen zuckerführenden Elementen bestehen. Das Thier setzt sich dabei auf die Unterseite eines Blattes neben einem dicken Nerven (Fig. 42 Taf. III), kehrt den Kopf nach der Spitze oder dem Rande des Blattes, und sticht dann in schiefer Richtung, parallel

mit der Blattspreite und dieser so nahe möglich, ihre Legeröhre tief, bis in die Mitte des Nerven hinein. Das Thier legt stets in jede Stichwunde nur ein Ei, und bis zu zehn oder selbst mehrere Eier in dasselbe Blatt; dieses geschieht in der Weise, dass in jedem Nerven ersten Ranges, nur ein einziges Ei zu liegen kommt. Denkt man sich die verschiedenen Stichwunden für die Eier durch eine Linie verbunden, so verläuft diese ungefähr in der Mitte zwischen Blattrand und Mittelnerven, und dadurch erklärt sich die sehr regelmässige Stellung, welche die Foliigallen (sowie die nächstverwandten Pubescentis- und Longiventrisgallen) aufweisen, wenn sie in grösserer Anzahl auf einer Blattspreite vorkommen. Da das Ei (*Ek* Fig 43 *B* Taf. III) und die Legeröhre (*Lr* Fig. 43 *A*) der kleinen Taschenbergiwespe nahezu dieselbe Grösse haben, wie bei der weit grösseren Muttergeneration Dryophanta folii (Fig. 36 Taf. III), so muss man im Körper des erstgenannten Thieres eine viel geringere Anzahl Eier antreffen, wie im mächtigen Abdomen letzgenannter Wespe. Wir haben hier also dasselbe Verhältniss, welches wir zwischen der Terminaliswespe und der Biorhiza aptera kennen lernten.

Sowohl bei der Folii- wie bei der Taschenbergiwespe ist die nur schwach gekrümmte Spitze der Schienenrinne mit einigen stumpfen Sägezähnen besetzt, dagegen sind die Stechborsten ganz glatt und eben; die Legeröhrespitze beider Thiere gleicht mithin derjenigen von der Terminalis- und Apterawespe.

§ 9. *Nervenbau des Eichenblattes. Ursprung des Gallplastems der Foliigalle. Die Kanalbildung.* Um die Lage der Taschenbergieier innerhalb der Eichenblätter wohl zu verstehen, ist es nöthig den Nervenbau der Letzteren vorher gesondert zu betrachten. In Bezug auf diesen Bau können die halbschematischen Figuren 44—47 Taf. III zur Erläuterung dienen. In Uebereinstimmung mit diesen Figuren, welche den Querschnitt einer Blattspreite vertical zur Mittelrippe darstellen, gehe ich nur auf die Besprechung der stärkeren Nerven näher ein, — gewöhnlich werden nur diese von der Wespe bei der Eiablage in Anspruch genommen. Wie man sieht sind die meisten Gefässbündel darin in Ringlage angeordnet. Dieselben besitzen einen einfach collateralen Bau mit dem Xylemtheile auf ihrer Innenseite; sie verlaufen gemeinschaftlich mit Sklerenchymfaserbündeln (*sf*), welche ihre Phloëmseite (*ph*) bekleiden und die in den stärkeren Nerven das Bestreben haben seitlich mit einander zu verschmelzen. Innerhalb des Gefässbündelringes, und zwar allseitig von Parenchym umgeben, finden sich in den dickeren Nerven noch einige kleineren Gefässbündel (*cg*), welche ihr Xylem nach der Oberseite des Blattes kehren, und in den reifen Blättern, zufolge seitlicher Vereinigung ein einziges Ganzes darstellen. Ein chlorophyllfreies Parenchym-

gewebe füllt die innere Höhlung des gesammten Bündelringes an und begrenzt die Aussenseite desselben. Dieses Gewebe ist auf der Ober- und Unterseite des Nerven durch Collenchym (*cb*) ersetzt, übrigens überall dünnwandig. Die Linie, längs welcher dieses farblose Parenchym und das Blattgrünngewebe einander berühren, ist in den Figuren durch *gg* angewiesen. — Zur Zeit wenn das Insekt seine Eier legt, ist das Sklerenchym noch dünnwandige und zuckerführend und selbst die Xylembündel sind dann noch nicht ganz verholzt.

Bevor ich zur Darstellung des Vorganges der Plastembildung der Foliigalle übergehe, muss ich noch einmal betonen, dass die Taschenbergiwespe (Fig. 42 Taf. III) ihr Ei in schiefe Richtung in den Nerven hinein bringt, und dass dabei der Eikörper innerhalb des Gefässbündelringes zu liegen kommt. Die Ebene der Figuren 44—47 Taf. III, welche, wie erwähnt, senkrecht auf der Längsachse des Nerven steht, könnte also das Ei eigentlich nicht in seiner ganzen Länge in sich aufnehmen, sondern müsste dasselbe irgendwo schneiden. Da nun trotzdem die Eier in ihrer ganzen Länge gezeichnet worden, so sind diese Figuren etwas schematisirt. Ausserdem ist auch die Dicke des Eikörpers verhältnissmässig ein wenig geringer angegeben geworden, wie sie, in Uebereinstimmung mit der Wirklichkeit, sein sollte.

Die Plastembildung geht, mit Ausschluss aller anderer Gewebe, vom Phloëm-, oder — möglicher Weise genauer gesagt — vom Cambiformtheile derjenigen Gefässbündel aus, deren Xylemtheil durch den Eikörper berührt wird. Mit Bezug auf diese allgemeine, auch für viele anderen Blattgallen geltende Regel scheint jedoch eine partielle Ausnahme zu bestehen, da ein kleiner Theil der Gallenrinde in Folge der Umwandlung der ganz jungen, zur Zeit des Eierlegens noch dünnwandigen Sklerenchymfaserinitialen entstehen möchte; wie dieses auch sein möge, jedenfalls muss die junge Galle eine mächtige Gewebeschicht des Blattnerven zerreissen um nach aussen zukommen. Die Kenntniss dieses Factums ist der Schlüssel zur Erklärung einiger Erscheinungen, welche die Stellung der Foliigalle (sowie der Longiventris und einiger anderer Gallen, wie z. B. der früher besprochenen Lenticularisgalle) am Eichenblatte kennzeichnen. Sehen wir uns nämlich die Lage einer ganz jungen, z. B. hanfkorngrossen Foliigalle (Fig. 49 Taf. III) etwas genauer an, so finden wir, dass dieselbe mittelst eines feinen und kurzen Stielchens in einem Risse eines Nerven auf der Blattunterseite aufgehängt ist. Das Stielchen selbst steht in unmittelbarem Zusammenhange mit dem Gefässbündelringe und zwar mit den Xylemtheilen zweier neben einander liegender Bündel desselben. Auf die Uebereinstimmung in anatomischer Beziehung dieser Befestigungsweise der Galle mit derjenigen einer Wurzel an ihrer Mutterwurzel oder an einem Stamme, habe ich schon früher hingewieseu. In geringer Entfernung der Galle fin-

det sich eine kleine braune Narbe (*bl* Fig. 49), welche selbst neben reifen Gallen noch leicht wahrgenommen werden kann. Dieselbe entsteht in Folge der Korkbildung über der feinen Wunde (Bohrloch), welche durch die Taschenbergiwespe beim Eierlegen gerade dort erzeugt wurde, wo der Nervenrücken sich aus der Blattfläche erhebt (zu vergleichen Fig. 42). Da wie früher angegeben, der Kopf der Wespe entweder der Blattspitze oder dem Blattrande zugekehrt ist, die Legeröhre demnach in einem spitzen Winkel in die Mittelrippe oder den Seitennerven hineindringt, so ist die Wundnarbe bei den an dem Mittelnerven befestigten Gallen der Blattspitze, bei den an den Seitennerven aufgehängten dagegen mehr dem Blattrande zugewendet. Die Grösse der Entfernung zwischen dieser Wundnarbe und der Stelle wo die Galle aus dem Nerven bricht, ist ± 0,5 mM., also gleich der Länge des Eistiels (oder der Legeröhre) der Taschenbergiwespe.

Das Gallplastem der Foliigalle (*gp* Fig. 45 Taf. III), zu deren Betrachtung wir nach dieser kurzen Abschweifung übergehen, ist ein kleinzelliges, äusserlich einem Meristeme sehr ähnliches Gewebe isodiametrischer, grünliches Protoplasma enthaltender Zellen. Hier sind also die langen Cambiformelemente durch Quertheilung in kürzere übergegangen. Kurz nach seiner Entstehung erfährt das Plastem (*gp* Fig. 45 Taf. III) an der Stelle, wo es dem Eikörper (*Lk*) am nächsten liegt, eine Ausbuchtung deren convexe Seite nach aussen gekehrt ist, und wodurch ein offener Raum (*kn* Fig. 46) zwischen Eikörper (genauer Larvenkörper) und innerer Plastemgrenze entsteht. Dieser Raum verlängert sich beim Weiterwachsen des Plastems ein weinig, und bildet so einen kurzen Kanal in dessen Ende die junge noch von der Eihaut eingeschlossene Larve (*Lk* Fig. 46) liegt. Bei einigen anderen Gallen, wie z. B. den Linsengallen, ist diese Kanalbildung besonders deutlich. Vor Allem die Ostreusgalle *, welche sich in der Hauptsache ähnlich wie die Foliigalle entwickelt, ist dazu geeignet den Vorgang der Bildung des Kanales zu demonstriren, da die Länge des letzteren in diesem Falle eine viel beträchtlichere ist, wie bei Folii. Die Fig. 48 Taf. III, welche eine junge noch vollständig von ihren Klappen (*kp*) † eingeschlossene Ostreusgalle darstellt, zeigt bei *Lk* die Larve, bei *kn* den mit einer durchsichtigen, wahrscheinlich flüssigen Substanz, angefüllten Kanal und bei *gp* schliesslich das meristematische Gallplastem, welches unmittelbar aus dem Gefässbündelcambiform entstanden ist §.

---

* Gallenmutter Neuroterus furunculus n. f.

† Wie aus dieser Figur hervorgeht sind die Klappen, ebenfalls wie das Plastem der Ostreusgalle Cambiformbildungen.

§ In Frank's *Handbuch der Pflanzenkrankheiten*, 2te Hälfte, p. 767, Fig. 144 *C*, wo sich der Längsschnitt einer sehr jungen Numismatisgalle abgebildet findet, sieht man ebenfalls den Kanal besonders deutlich.

Auch die Ostreusgalle muss, da sie aus dem Cambiform des Blattnerven entsteht, die parenchymatische Rinde des Letzteren zerreisen um nach aussen zu kommen, und ist demnach, wie die Foliigalle, in einer klaffenden Wunde befestigt.

Die Function des Gallkanales möchte darin bestehen, der jungen Larve zu ermöglichen, zwischen die Xylemtheile der beiden Gefässbündel, aus deren Phloëm oder Cambiform das Gallplasten entstanden ist, zu passiren; jedenfalls ist sicher, dass diese Kanalbildung in denjenigen Fällen, wenn die Eier unmittelbar in Cambium oder Phloëm niedergelegt werden, wie z. B. bei der Entstehung der Sieboldi und Apteragalle, gänzlich ausbleibt. Mehr als eine Hypothese ist dieses jedoch nicht, und Sicherheit in dieser Beziehung wird voraussichtlich erst durch die Untersuchung anderer Blattgallen erlangt werden. — Eine andere Frage, nämlich ob bei der Kanalbildung Gewebeverflüssigung zwischen den beiden Xylembündeln stattfindet, konnte ebenfalls noch nicht sicher ermittelt werden.

Da die eigentliche Nervenrinde nicht direct an der Gallbildung betheiligt ist, unterhalb derselben die Plastemwucherung aber allmählich eine beträchtliche Ausdehnung erlangt, so muss die Erstere in Folge des zunehmenden Druckes zuletzt nachgeben und aufreissen, um dadurch der jungen Galle Ausgang zu verleihen. Die Rissstelle entsteht dabei an dem Orte des geringsten Widerstandes, das heisst neben der Collenchymbekleidung der Nervenunterseite; demzufolge sitzen die reiferen Foliigallen (sowie die nahe verwandten Longiventris- und Divisagallen) gewöhnlich *seitlich* auf dem Nervenrücken (Fig. 49 und 54). An dieser Stelle muss noch ein anderer Umstand erörtet werden, welcher — freilich in untergeordnetem Maasse — mit dem wachsenden Gallplastem zusammenwirkt um die Nervenrinde zu öffnen, nämlich ein geringfügiges Dickenwachstum der beiden oft erwähnten Gefässbündel, welche den Gallkanal beiderseits begrenzen. Durch diese Veränderung entsteht sowohl secundäres Holz wie secundäre Rinde, und die nächste sichtbare Folge davon ist eine Verschiebung der Initialen der Sklerenchymfaserbündel nach aussen. Auch hier ist es wieder die interessante Ostreusgalle, welche diese Erscheinung des secundären Dickenwachsthums besonders deutlich aufzuweisen hat (Fig. 48), doch lässt sich dieselbe auch leicht in den Nerven unterhalb reiferer Foliigallen (*xl* Fig. 51) constatiren.

Noch bevor das Plastem äusserlich an den Nerven sichtbar wird, verlässt die junge Larve ihre Eischale vollständig und tauscht ihre Stellung am Boden des Plastemkanales, wo sie sich bisher befand (Fig. 46 Taf. III) für das andere Ende des Letzteren um (Fig. 47 Taf. III); es entsteht dadurch eine leere Eihöhlung (*eh* Fig. 47 Taf. III), welche aber bald nachher mit einem callusarti-

gen Gewebe vollwächst; das Wachsthum dieses Gewebes möchte dabei eine Hauptursache von der Fortbewegung der Larve durch den Plastemkanal sein. Fassen wir diesen Vorgang etwas genauer ins Auge.

Zur Zeit wenn die Taschenbergiwespe ihr relativ grosses Ei in die Mitte des Blattnerven brachte, sind dabei zahlreiche Parenchymzellen platt zusammengedrückt, zur Seite geschoben und abgestorben; dadurch entstand die von einer todten und später sich bräunenden Schicht, allseitig eingeschlossene Eihöhlung, welche von dem Eikörper vollständig angefüllt ist. Die *Lage* dieser todten Grenzfläche innerhalb des Gewebes der Blattnerven erfährt in Folge der späteren Wachsthumsvorgänge in und neben den benachbarten Gefässbundeln, durchaus keine erheblichen Veränderungen, und dadurch erklärt sich die interessante Erscheinung, dass man unterhalb der Befestigungsstelle selbst *ganz reifer* Foliigallen, im Nerven die vollständige Pseudomorphose des Eikörpers in der Gestalt eines Hohlraumes (*eh* Fig. 50 Taf. III) dessen Wandung aus dem genannten todten Gewebe besteht, auffinden kann; dieser Hohlraum hängt mit dem feinen Bohrkanal zusammen, welcher zur Aufnahme des Eistieles gedient hat. Zur Beobachtung dieser Verhältnisse sind besonders solche Schnitte geeignet, welche ganz nahe und ungefähr parallel zur Blattunterseite in der Weise durch die Nerven geführt werden, dass dabei die Narbe des Bohrloches (*bl* Fig. 49 Taf. III) getroffen wird; man erlangt dadurch Präparate, gleich demjenigen, welches in Fig. 50 abgebildet wurde. Was uns in dieser Figur zunächst interessirt ist die vollständige Anfüllung der Eihöhlung (*eh*) mit einem grobzelligen Gewebe, welches oben als callusartiges Gewebe bezeichnet wurde. Dasselbe (Fig. 53 Taf. III) besteht aus grossen wasserklaren Zellen, welche besonders im erwachsenen Zustande eine zierliche Structur besitzen; ihre Wände sind unregelmässig verdickt und mit Tüpfelzeichnung vorsehen, ihr Inhalt geht ganz verloren, und dadurch gleichen sie in gewissen Hinsichten den collenchymatischen Elementen, welche in dem Kammerlochgewebe der Baccarumgalle angetroffen werden. Nicht selten genügen einige wenigen dieser Zellen, um die ganze Eihöhlung anzufüllen (*eh* Fig 51 Taf. III), und demzufolge können dieselben im Allgemeinen sehr leicht beobachtet werden.

Das nun diese Calluswucherung bei ihrer Entstehung die Fortschiebung der Larve von dem Boden des Plastemkanales nach dem entgegengesetzten Ende desselben bewerkstelligen, oder doch dabei behülflich sein kann ist leicht einzusehen. Denken wir uns nämlich, dass bei der Larvenbildung der Turgor des Eikörpers beim Entstehen des Plastemkanales etwas vermindert und zuletzt beim Aufplatzen der Eischale gänzlich erlischt, so leuchtet ein, dass wenigstens einzelne Parenchymzellen sich quer durch die, aus abgestorbenen Zel-

len bestehende Bekleidung der Eihöhlung einen Weg bahnen, und letztere, wie Thyllen es bei Gefässen thun, anfüllen können (*eh* Fig. 47 Taf. III). Dabei müssen dieselben einen Druck ausüben auf den, noch von der Eischale eingeschlossenen, in der Eihöhlung liegenden Larvenkörper und diesen in den Plastemkanal hineindrängen. In jungen Anlagen der Ostreusgalle gelang es mir solche Calluszellen zu beobachten, welche sich eben auf dem Boden des Kanales gebildet hatten und sich Raum schufen innerhalb der Eihöhlung, wodurch das Thier aus Letzterer etwas nach aussen geschoben war. Jedenfalls ergibt sich aus dieser Wahrnehmung, dass die Callusbildung erst dann anfängt, wenn der Plastemkanal schon längst besteht, und ich glaube desshalb, dass dadurch die Fortschaffung der Larve aus dem Nerveninnern herbeigeführt werden muss.

Es ist ein unerwarteter Umstand, dass die Cambiformtheile der centralen Gefässbündel (*cg* Fig. 44—47 Taf. III), welche mit dem Körper des Taschenbergiieies in beinahe unmittelbarer Berührung sind, sich an dem Process der Plastembildung gar nicht betheiligen, und dass auch, wie ich auf Grund der Untersuchung vieler Präparate schliessen zu müssen glaube, die callusartigen Zellen daraus nicht zu entstehen vermögen. Die Betrachtung der Fig. 51 Taf. III, welche einen Schnitt durch die Befestigungsstelle einer jungen Foliigalle vertical zur Längsachse des Nerven veranschaulicht, lässt in dieser Hinsicht keinen Zweifel übrig. Hier sieht man nämlich die unveränderten centralen Gefässbündel (*cg*), welche ihren Xylem nach oben kehren, in der Nähe der Eihöhlung. Letztere ist mit dem callusartigen Gewebe vollgewachsen, welches offenbar dem benachbarten Parenchym entstammt und nicht dem Gefässbündelphloëm. — Hier scheint es mir die geeignete Stelle eine gewisse Eigenthümlichkeit der Gallentragenden Nerven zu erwähnen, welche darin besteht, dass ihre, in Ringlage angeordneten Gefässbündel, an denjenigen Stellen, wo die Gallen befestigt sind, in Folge eines Wachsthums der inneren Gewebe, eine Ausbuchtung erfahren (Fig. 50 Taf. III), wodurch der ganze Nerv etwas in die Dicke anschwillt. Bei mikroskopischer Untersuchung findet man, dass diese Erscheinung sich dadurch erklärt, dass ringsum die Eihöhling ein Hof (*ho*) geräumiger Zellen aus dem centralen Parenchym entstanden ist, welche sich nur durch ihre Grösse auszeichnen, übrigens mit dem unveränderten Gewebe übereinstimmen. Die nämliche Ursache, welche der Bildung des callusartigen Gewebes der Eihöhlung zu Grunde liegt, möchte auch bei dieser Zelldehnung im Spiele sein.

Wir kehren nun wieder zur Betrachtung der weiteren Vorgänge, welche bei der Kammerbildung der Foliigalle stattfinden, zurück. — Wir sahen, dass die junge Larve, nachden sie ihre Eischale verlassen hat, ihre Stellung am Boden

des Plastemkanales verlässt und, geholfen von dem Callusgewebe, sich bis an das entgegengesetzte Ende des Kanales fortbewegt (*Lk* Fig. 47 Taf. III). Nachdem dieses geschehen entsteht in dem hinteren Kanaltheil, und zwar von den Ränderen desselben aus, eine Gewebewucherung dünnwandiger Zellen, welche mit dem Callusgewebe der Eihöhlung zusammenwirkt, um die von dem Thiere verlassenen Hohlraume vollständig anzufüllen. Es dauert denn auch nicht lange mehr, ob der Plastemkanal hinter der Larve schliesst sich vollständig zusammen (*kn* Fig. 51 Taf. III), und sobald dieser innere Verschluss zu Stande gekommen ist kann man sagen, dass die Larvenkammer fertiggestellt ist; von da an liegt das Thier allseitig dem Plastemgewebe angeschmiegt. Wie man sieht hat dieser Vorgang grosse Aehnlichkeit mit der bei der Hieraciigalle stattfindenden Verschlussweise, welche ebenfalls vollständig im Innern der Organe der Nährpflanze abläuft. Auch bei der Foliigalle kann man von einem „Kammerloch" reden, allein man muss darunter dann den durch Gewebewucherung sich schliessenden Theil des Plastemkanales verstehen. Im Gegensatz zu der Baccarum- und Terminalisgalle, welche die Narbe des Kammerloches auf ihrer freien Oberfläche aufzeigen, ist also bei der Foliigalle- — und die Lenticularisgalle und zahlreiche andere Formen gehören ebenfalls hierher, — die Narbe des Kammerloches (*lg* Fig. 51 Taf. III) im Gewebe des Blattnerven versteckt und der Eihöhlung zugewendet. Man kann in Bezug auf dieses Merkmal die Cynipidengallen in zwei Gruppen vertheilen, nämlich in solche mit „äusserem Verschlusse", wozu die Baccarum-, Terminalis-, Taschenbergi- und zahlreiche andere Gallen gehören, und in Gallen mit „innerem Verschluss", wie Folii und ihre Verwandten. — Da die im Plastemkanal entstandenen Zellen der Foliigalle anfangs sehr dünnwandig und wasserreich sind, findet man stets bei der Untersuchung eingetrockneter junger Exemplare an dieser Stelle einen weiten Hohlraum. Später verdicken sich die Zellwände hier aber beträchtlich, und verleihen dann dem Stielchen, an welchem die Galle aufgehängt ist, eine ausserordentliche Festigkeit.

Einige weiteren Détails mögen im Anschluss an die Erklärung der Figuren 50, 51, 52 Taf. III und 54 Taf. IV, hier noch kurz erläutert werden. — In Fig. 54 Taf. IV ist ein Längsschnitt einer 2,5 mM. dicken Galle und ihrer Befestigungsstelle am Nerven, naturgetreu zurückgegeben; von den anatomischen Détails des Nervenquerschnittes sind aber nur die Sklerenchymfaserbündel (*sf*) gezeichnet, und im inneren Nervengewebe ist durch eine schematische Umrisslinie die ursprüngliche Lage des Taschenbergieies — also Eihöhlung und Bohrloch — angegeben. Diese Figur dient zur allgemeinen Orientirung, auf die Struckturverhältnisse der Galle selbst wird unten zurückgekommen werden. In Figur 51 sieht man einen Schnitt durch die Befestigungsstelle und das Stielchen einer noch jüngeren Galle

wie die eben genannte, Bohrloch und Eistiel sind in Folge der zur Nervenlängsachse senkrechten Richtung des Schnittes, von letzterem nicht getroffen, dagegen fällt die mit dem Callusgewebe vollgewachsene Eihöhlung (*eh*) sofort ins Auge. Der Plastem-, oder besser gesagt der Gallkanal (*kn*), welcher zwischen den beiden Xylembündeln (*xl*) gelegen ist, ist gänzlich mit dünnwandigem Gewebe angefüllt; verfolgt man die punktirte Linie, welche die Fortsetzung des Gallkanales, oder das Kammerloch, darstellt, weiter nach aussen, so stösst man zuletzt auf die Larvenkammer (*lk*), welche nun schon längere Zeit vollständig und ringsum abgeschlossen ist, und sich, infolge der beträchtlichen Verlängerung des Stielchens, weit ausserhalb des Nerven befindet; sie ist von dem Nahrungsgewebe (*ng*) und dieses von der Steinzellenschicht (*ss*) allseitig bekleidet. In dem Stielchen sind zwei starke Gefässbündel (*gb*) gezeichnet, deren nach innen schauende Xylemtheile in einer directen Verbindung stehen mit den Xylemtheilen (*xl*) der beiden nächst benachbarten Gefässbündel im Nerven, welcher die Galle trägt.

Die Figuren 50 und 52 Taf. IV stimmen dadurch überein, dass sie Schnitte darstellen, welche mit der Längsachse des Nerven gleich laufen; in Fig. 50 ist die Ebene des Schnittes dabei ausserhalb des Körpers der Galle selbst geblieben und geht, mit der Blattspreite parallel, durch das Bohrloch und die Eihöhlung, zufolge dessen man, wie oben schon angeführt wurde, selbst noch unterhalb vollständig reifer Gallen, die ursprüngliche Grenzlinie des Taschenbergieies, zur Ansicht bekommen kann. Dagegen macht die in Fig. 52 Taf. III wiedergegebene Schnittfläche einen Winkel mit der Blattspreite und geht durch den Mittelpunkt der Galle, demzufolge schneidet dieselbe zwar die auf der äusseren Oberfläche des Nerven gelegene Narbe des Bohrkanales, nimmt diesen selbst aber nicht in sich auf; dabei ist zu gleicher Zeit die Eihöhlung (*eh*) getroffen, sowie der Hof geräumiger Zellen (*ho*) von welchen die Letztere eingeschlossen ist; auch hier ist wieder *lk* die Larvenkammer, *ng* das Nahrungs- und *ss* das Steinzellengewebe. Das Object welches zur Anfertigung dieses Präparates diente, war noch so jung, dass die Larvenkammer noch nicht ganz über die Grenze des Nerven herausgetreten war, die Galle mithin als Kugelsegment aus der Rissstelle des Nerven hervorstach.

§ 10. *Die primäre Gewebedifferenzirung im Gallplastem.* Zur Zeit wenn der Plastemkanal sich hinter dem Larvenkörper zusammenschliesst (Fig. 47 Taf. III) besteht das Plastemgewebe nur noch aus meristematischen sehr kleinen Zellen. Die wichtigsten Differenzirungen, welche darin stattfinden sind die folgenden. Zunächst sieht man die zwei bis drei der Larvenkammer angrenzenden Zell-

schichten (*ng* Fig. 52 Taf. III, Fig. 54 Taf. IV), von denen die Innere also den Larvenkörper berührt, eine trüb gelbliche Farbe und eine körnige Structur annehmen, welche daher rühren, dass sich im Protoplasma Eiweiss und Oel ansammeln (*ng* Fig. 55 Taf. IV); übrigens entstehen in dem Protoplasma dieser Zellen auch noch einige Vacuolen sehr veränderlicher Grösse und Gestalt. Es ist dieses das primäre Nahrungsgewebe, welches später von dem Thiere zernagt wird, jedoch selbst noch in den Gallen von mehr als 2 mM. Dicke unverändert vorkommt, und welches mit dem bei der Taschenbergigalle beschriebenen Nahrungsgewebe gänzlich übereinstimmt. Zu gleicher Zeit mit der Entstehung dieses Gewebes, entwickelt sich auf dessen Aussenseite aus dem Gallplastem eine Schicht dickwandiger Zellen von erheblicher Mächtigkeit (*ss* Fig. 52 Taf. III und Fig. 54 Taf. IV). Die Wand dieser Zellen (*ss* Fig. 55 Taf. IV) besitzt nur undeutliche und wenige Tüpfelkanäle, dagegen an der von der Larvenkammer abgekehrten Seite eine ziemlich ausgedehnte nicht verdickte Stelle, infolge dessen sie eine unregelmässige Gestalt haben. In vielen dieser Zellen kann man einen lebenden, körniges Protoplasma führenden Inhalt auffinden, und es ist wahrscheinlich, dass alle Zellen ohne Aussnahme einen solchen Inhalt haben, auch dann, wenn die directe Beobachtung desselben nicht gelingt. Aus dieser Beschreibung geht hervor, dass das dickwandige Gewebe der jungen Foliigalle mit der, bei der Lenticularisgalle betrachteten sklerotischen Zellenschicht im Bau übereinstimmt. Merkwürdiger Weise ist dieses auch hinsichtlich der Funtion der Fall, denn wenigstens einzelne der dickwandigen Zellen können sich stark vergrösseren und, indem sie sich dabei mit Eiweiss und Oel anfüllen in Nahrungsgewebe übergehen; offenbar wird die Möglichkeit ihrer Vergrösserung, durch das Vorkommen der dünnen Wandungsstelle bedingt. Jedoch beruht die beträchtliche Vergrösserung, welche das dickwandige Gewebe später erfährt, wahrscheinlich grösstentheils auf der Dehnung zahlreicher, *allseitig* dünnwandiger Zellen, welche zwischen den dickwandigen Elementen eingestreuet vorkommen, und sich nur schwierig auffinden lassen. Dieses verschiedene Verhalten wird unten näher erörtet werden; an dieser Stelle sei schon darauf hingewiesen, dass wir hier also einen Fall vor uns haben in welchem dem nämlichen Gewebe bei seinen verschiedenen Entwicklungsphasen, eine doppelte biologische Function obliegt, nämlich, im Anfange, das in der Larvenkammer verschlossene Thier in seiner Jugend gegen den Angiff von Parasiten zu schützen, und später, wenn dieser Schutz durch andere Mittel, wie z. B. durch das Schwammparenchym verleiht wird, — dem Thiere zur Nahrung zu dienen.

Die Continuität des Nahrungsgewebes (*ng*) und der dickwandigen Zellenschicht (*ss*) ist an derjenigen Stelle unterbrochen, wo der Verschluss der Larven-

kammer zu Stande gekommen ist, das heisst also dort wo sich das Kammerloch befindet (Fig. 51 Taf. III).

Im Uebrigen findet man in den jungen Gallen von circa 2 mM. Mittellinie eine dicke Aussenrinde, welche nur aus dünnwandigem, von Gefässbündeln durchsetztem Parenchym besteht, und längere Zeit überall rege Zelltheilung aufweist; die isodiametrischen Zellen derselben sind schon in frühester Jugend, längst bevor ihr Theilungs- und Vergrösserungsvermögen erlöscht, sehr gerbstoffreich. Diese Aussenrinde ist in erster Linie das Muttergewebe der voluminösen schwammigen Schicht der reifen Galle, welche durch ihre sehr weite Interzellularräume, ihre grosse verzweigte Zellen und ihren hohen Gerbstoffgehalt ausgezeichnet ist. In den unmittelbar ausserhalb des dickwandigen Gewebes gelegenen, so wie auch in denjenigen an der äusseren Oberfläche vorkommenden Zellschichten der Aussenrinde, dauern die Zelltheilungen während längerer Zeit fort, wie in den in mittlerer Entfernung zwischen Oberfläche und Larvenkammer liegenden Zellen, demzufolge ist das centrale Parenchym und besonders auch das Hautgewebe der reifen Gallen kleinzellig, und enthält keine oder doch nur sehr kleine Interzellularräume. In der Epidermis werden keine Spaltöffnungen gebildet, dagegen, ähnlich wie im hypodermalen Gewebe, zahlreiche Blattgrünkörperchen. Das centrale Parenchym, welches direct an die dickwandigen Zellen grenzt, hat, wegen der lange andauernden Zelltheilung, gewissermaassen eine cambiale Natur.

Die zahlreichen Gefässbündelchen (*gb* Fig. 52 Taf. III, Fig. 54 Taf. IV), welche in der Aussenrinde vorkommen, verlaufen in nahezu gleicher Entfernung zwischen Kammerwand und freier Oberfläche der Galle, verzweigen sich ziemlich unregelmässig, und bilden dadurch ein Bündelnetz demjenigen, welches im Fruchtfleisch von Kirschen und Pflaumen gefunden wird ähnlich; jedoch enden viele dieser Zweige einfach im Rindenparenchym ohne mit einander zu verschmelzen. Andere Seitenäste kehren sich dem Centrum der Galle zu, ihre Spitzen enden in der Nachbarschaft der Larvenkammer in das obengenannte Gewebe cambialer Natur, als Procambiumstränge, welche längere Zeit fortwachsen.

Wie wir früher sahen ist die Foliigalle mittelst eines Stielchens in dem Nervenrisse aufgehängt (Fig. 51); Querschnitte dieses Stielchens haben eine elliptische Gestalt und zeigen circa zwanzig Gefässbündel, in einer mit dem Umrisse parallelen Linie angeordnet, also wie in einem Dicotyledonenstengel. Verfolgt man dieselben so weit möglich bis in die Nährpflanze, so findet man, dass sie sich an die beiden Gefässbündel des Blattnerven ansetzen, zwischen welchen die junge Larve dereinst durchgeglitten ist, welche, mit anderen Worten, einmal den Plastemkanal begrenzten.

Da die Gefässbündelchen des Gallenkörpers früher in der Richtung ihrer Dicke

ausgewachsen sind, wie das Gewebe von welchem sie umschlossen werden, so haben diese Bündel, selbst bei sehr jungen Gallen, gleiche Dicke wie in den ausgereiften Exemplaren, und sind in den letzteren die Parenchymzellen, welche die Gefässbündel unmittelbar berühren, in Folge von Zerrungen, die bei der Dehnung der Galle durch das ungleich schnelle Wachsthum verursacht wurden, radienartig angeordnet. Die Gefässbündelchen sind deutlich einfach collateral mit gut entwickeltem, nach aussen gewendetem Cambiformtheil. Von Sklerenchymfasersträngen sind sie nicht begleitet, und bis jetzt ist mir auch keine einzige andere Cynipidengalle bekannt geworden, worin sich solche Stränge irgendwo vorfänden. Nur das reife Stielchen der Foliigalle, sowie anderer verwandter Formen, nimmt, sowohl innerhalb wie ausserhalb des Gefässbündelringes, zuletzt mehr oder weniger deutlich eine sklerenchymatische Natur an.

§ 11. *Das secundäre Nahrungsgewebe.* In den jungen Gallen, welche 2 bis 4 mM. dick sind, haben das primäre Nahrungsgewebe und das dickwandige steinzellenartige schützende Gewebe nahezu die gleiche Ausdehnung (Fig. 54 Taf. III). Zerschneidet man dagegen eine Galle von circa 6.5 mM. Mittellinie Fig. 56 Taf. IV), eine Grösse welche die Foliigalle um die Mitte Juli erreicht, so findet man das dickwandige Gewebe (*ss*) beträchtlich vergrössert. Der *Larvenkörper* ist aber bis zu dieser Periode *kaum gewachsen*, wie schon daraus hervorgeht, dass das primäre, nicht regenerationsfähige Nahrungsgewebe (*ng* Fig. 54 Taf. IV), noch vollständig in Takt ist. Beiläufig bemerkt ergiebt sich aus letzterer Beobachtung, dass die Nahrungsvorgänge der Larve bis zu diesem Entwicklungsstadium durch Diffusion stattfinden müssen. Von nun an werden sich aber diese Verhältnisse schnell verändern, denn es tritt eine Periode rascherer Vergrösserung des Thieres ein, wobei es sich mit der Gewebesubstanz seiner Umgebung, welche dabei zernagt wird zu ernähren anfängt. In der Galle selbst entstehen von da an, wie es scheint kaum mehr eigentliche Neubildungen, dagegen beginnt dann erst recht die Zellenstreckung; nur die Hautgewebe machen von dieser Regel eine Ausnahme, da auch die Zelltheilungen darin noch lange fortdauern.

Die in dem dickwandigen sklerotischen Gewebe auftretende Veränderung ist sehr merkwürdig. Oben wurde schon erwähnt, dass darin viele dünnwandigen Zellen vorkommen, welche, eben wie die dickwandigen Elemente, einen lebenden protoplasmatischen Inhalt führen. Besonders auf die Vergrösserung dieser Zellen beruht die ausserordentliche Dehnung der sklerotischen Region, doch sind auch ohne Zweifel die sklerotischen Zellen an sich dabei sei es auch in untergeordnetem Maasse betheiligt, und auf letzteres Verhältniss werden wir unten noch zurückkommen. In Gallen von circa 7 mM. Mittellinie ist es leicht

am Ende des Monates Juli die Entstehung des sekundären Nahrungsgewebes zu verfolgen (Fig. 57 und 58 Taf. IV). In den sich vergrösserenden Zellen sieht man zuerst Stärkekörnchen auftreten, dieselben sind in Fig. 57 durch eine Punktirung angewiesen und kommen niemals zu einer solchen reichlichen Ablagerung, wie z. B. in der Rinde der Taschenbergigalle. Die Jodiumreaction lehrt, dass die Stärke in dem Gewebe welches sich weiter zu vergrösseren aufhört, allmählich verschwindet, — das ausgewachsene sekundäre Nahrungsgewebe ist gänzlich stärkefrei. Zu gleicher Zeit mit der Stärke entstehen im dickwandigen Gewebe zahlreiche Vacuolen (Fig. 58 Taf. IV), deren Auftreten offenbar mit der beträchtlichen Zellenvergrösserung in Beziehung steht; ihre Function möchte darin zu suchen sein, dass sie das Wachsthum der Zellen veranlassen, ohne dass dabei eine entsprechende Vermehrung des Protoplasma's stattfindet. Ein solches Wachsthum liesse sich als Turgorwachsthum bezeichnen im Gegensatz zu demjenigen, welches in der Hauptsache auf Bildung neuen Protoplasma's beruht, und wofür der Name Imbibitionswachsthum bezeichnender wäre; wie es scheint beruht die Vergrösserung des thierischen Körpers und der niedersten Pflanzen ausschliesslich auf letzterer Wachsthumsform, während das Turgorwachsthum im Allgemeinen charakteristisch ist für die späteren Wachsthumsphasen der höheren Pflanzen. Im secundären Nahrungsgewebe der Foliigalle verschwinden die Vacuolen, ebenso wie die Stärke, zuletzt wieder vollständig, der Raum innerhalb der Zelle, welcher dadurch entsteht, füllt sich mit dem, durch Imbibition mit Eiweiss und Oel anschwellenden Protoplasten. Wie es scheint ist die vorübergehende Existenz von Vacuolen in den Zellen von Reservestoffbehältern, eine weit verbreitete Erscheinung. — Uebergiesst man Präparate, wie in Fig. 57 und 58 Taf. IV dargestellt, mit Schwefelsäure, so sieht man über das ganze Gesichtsfeld kleine Oeltröpfchen auftreten, und zwar in die Richtung nach der Larvenkammer in steigender Quantität. Bei der Behandlung mit Kupfervitriol und Kali tritt die für das Eiweiss charakteristische violetfärbung überall gleichmässig auf; das Oel und Eiweiss häufen sich beträchtlich an und verleihen dem sekundären Nahrungsgewebe das nämliche körnige und trübgelbliche Aussehen, welches für das primäre Nahrungsgewebe eigenthümlich ist. Mit Hülfe der Jodiumreaction ergiebt sich beim Weiterwachsen der Galle ein Zurückweichen der Stärke vom Mittelpunkt nach der Peripherie, wie aus dem Vergleich der auf dem Radius *mr* Fig. 57 Taf. IV gelegenen Zellen mit den auf dem Radius *mq* angeordneten, hervorgeht; dieses erklärt sich daraus, dass die Zellenvergrösserung ebenfalls in der genannten Richtung vorschreitet, allein, wenn die letztere ein bestimmtes Maass erreicht hat, verschwindet die Stärke vollständig. Für die Vacuolen gilt dasselbe.

Da das Oel und das Eiweiss sich schon gleichzeitig mit der Stärke anhäufen, so ist das Oel in diesem Falle wahrscheinlich kein Product der directen Umwandlung des Amylums, sondern scheint vielmehr, eben wie letzterer Körper aus Nährstoffen, welche von aussen zuströmen, zu entstehen; später, beim vollständigen Schwinden der Stärke, möchte eine solche Umwandlung jedoch neben der normalen Ablagerung stattfinden. Ich muss bemerken, dass es mir nicht gelang mikrochemisch mit der fehlingschen Lösung Traubenzucker in dem Nahrungsgewebe aufzufinden; allein dadurch wird natürlich die Möglichkeit der Gegenwart kleiner, sich fortwährend umsetzender Quantitäten dieses Körpers nicht ausgeschlossen.

Ueberblicken wir nun noch einmal die gesammte Figur 57 Taf. IV, welche an einem Augenblick aufgenommen wurde, wo das primäre Nahrungsgewebe noch nicht vollständig verzehrt, sondern noch theilweise (auf dem Radius *mr*) erhalten war, so finden wir Folgendes. — Die starke Einbuchtung auf dem Radius *mq* in der inneren Begrenzung der Larvenkammer, ist die Stelle an welcher das Thier zuletzt genagt hat. Die riesenhaft angeschwollenen Zellen, welche im Begriff stehen dem Frasse anheimzufallen, besitzen einen dichten gleichmässig körnigen Inhalt ohne weitere Differenzirung; mehr nach aussen finden sich Stärkekörnchen und einzelne Vacuolen in den, Eiweiss und Oel führenden Zellen. Das Vorkommen von dickwandigen Zellen an der inneren Oberfläche der Einbuchtung beweist, dass hier das primäre Nahrungsgewebe vollständig zernagt ist. Zwar sind die Elemente des secundären Nahrungsgewebes auf Radius *mr* beträchtlich kleiner als auf *mq*, jedoch haben dieselben ihr ursprüngliches Volumen schon mehrfach verdoppelt, Stärke und Vacuolen lassen sich darin reichlich nachweisen. Dass sich bei nahezu gleicher Dicke des gesammten Kammergewebes an dieser Stelle viel mehr Zellen zählen lassen, wie auf *mq*, braucht kaum einer weiteren Erklärung, da es einleuchtet, dass der Verlust in der Zellenzahl auf *mq* zufolge des Frasses, durch die entsprechende Vergrösserung jeder Zelle an sich, in Bezug auf die Gesammtausdehnung compensirt wird.

Fragen wir nach der eigentlichen Ursache der Vergrösserung der Elemente des dickwandigen Gewebes, so treten uns zwei Möglichkeiten entgegen, zwischen welchen eine sichere Entscheidung bisher nicht gelang: es kann nämlich entweder die Larve die unmittelbare Ursache des Processes sein, oder das Thier gibt dazu nur indirecte Veranlassung und ein unbekannter innerer Reiz gibt den nächsten Impuls. Das Factum, dass sich stets in der unmittelbaren Nähe des Kopfendes des Thieres die allergrössten Zellen vorfinden, macht es schwer das Vermuthen fernzuhalten, es gehe von dem Munde des Thieres eine die Zellenververgrösserung anregende Wirkung aus.

Beim Grösserwerden der Larve wird natürlich das Gleichgewicht zwischen der Dehnung der Zellen und der in Folge des Frasses eintretende Volumverringerung des Nahrungsgewebes, zuletzt aufgehoben, und von da an wird dann die Umrissform der Larvenkammer ganz unregelmässig. Da das Thier die dickwandigen Zellen vollständig aufnimmt, die verdickten Theile der Zellwand aber nicht verdaut, ist es leicht diese noch im Mageninhalte erwachsener Larven zurückzufinden. Besser noch gelingt dieses bei den Auswurfstoffen, welche erst nach der *einzigen* Häutung welche die Larve erfährt, nämlich beim Eintreten des Nymfenzustandes, entleert, und an die Kammerwand in der Form eines flachen Kuchens abgelagert werden.

Im Ganzen ist die Ausbildung des secundären Nahrungsgewebes ein ziemlich langsam stattfinderder Process; schon im Juli wenn die Larvenkammer noch kaum 0.5 mM. in Mittellinie misst ist er im Gange, und tief im August kann man noch Zellvergrösserung beobachten. Zur Zeit wenn diese vollständig aufhört, fangen diejenigen Zellen, welche das secundäre Nahrungsgewebe auf der Aussenseite unmittelbar angrenzen, und welche, wie wir früher gesehen haben ihre Wachsthumsfähigkeit länger behalten, wie die übrigen Zellen der Aussenrinde — mit Ausnahme nur des Hautgewebes, — sich zu verdicken an (Fig. 58 Taf. IV). Transitorische Stärke und grosse runde Gerbstofftropfen kommen im Inhalt dieser Zellen vor. Die Wandverdickung ist von Tüpfelbildung begleitet und wird zuerst an der, der Larvenkammer zugekehrten Seite sichtbar (*zs* Fig. 58). In kräftig wachsenden Gallen dauert die Wandverdickung bis tief im September fort und erstreckt sich in centrifugale Richtung über mehrere Zellenschichten; es entsteht dadurch eine Gewebeschicht welche aus förmlichen Steinzellen mit mässig verdickten Wänden besteht, und demzufolge wird in den reifen Gallen eine, freilich wenig resistente Innengalle gefunden. Diese hängt nicht selten so loose mit dem mehr nach aussen gelegenen Schwammgewebe zusammen, dass es dann ein Leichtes ist dieselbe als selbständiges Gebilde aus den Gallen herauszuschälen.

Bei genauer Durchmusterung der Elemente, welche auf der Innenseite des secundären Steinzellengewebes gefunden werden, lassen sich darunter einzelne Zellen einer eigenthümlichen Structur erkennen (*zs* Fig. 58 Taf. IV), welche aus Zellen des primären dickwandigen Gewebes und zwar aus eigentlichen sklerotischen Elementen selbst (nicht aus zwischen diesen eingestreuten dünnwandigen Zellen) entstanden sind. Es hat sich hierbei die früher besprochene dünne Stelle ihrer Wandung zuerst beträchtlich gedehnt, daher zu einem an der Thyllenbildung erinnernden Process Veranlassung gegeben; später ist die Verdickung eingetreten. Es ist kaum zweifelhaft, dass auch im secundären Nahrungsgewebe — und ich habe darauf schon früher hingewiesen — Nahrungszellen eines ähnlichen Ur-

sprunges werden gegenwartig sein können; allein die Isolirung derselben gelang mir nicht volständig, sodass die Structur des Nahrungsgewebes in diesem, freilich untergeordnetem Punkte, noch nicht ganz klargestellt ist.

§ 12. *Einfluss der Gallen auf ihre Unterlage.* Ein einziges Eichenblatt vermag 6 bis 8, ja selbst 10 Foliigallen, welche zusammen weit mehr als das Blatt wiegen können, zur vollständigen Ausbildung zu bringen. Woher beziehen diese Gallen ihre brennbare Substanz? — In dieser Beziehung muss erstens bemerkt werden, dass die Blattgalle in Folge der Gegenwart von Chlorophyllkörnern in ihrem Hautgewebe offenbar selbst im Stande ist Kohlensäure zu zersetzen, jedoch kann die Quantität der dadurch gebildeten Kohlenhydrate sicher keine beträchtliche, für die Nahrung der Galle ausreichende sein, sondern, wie bei einer fleischigen Frucht, z. B. einem Apfel oder einer Birne, muss die Hauptmasse der Nährsubstanz den Organen der Nährpflanze entlehnt werden. Zufolge des letzteren Umstandes üben die Gallen denn auch einen sehr merkbaren Einfluss auf ihre Umgebung aus, welche natürlich besonders deutlich ist wenn mehrere Gallen dicht beisammen auf einem Blatte sitzen, und die mit der Wirkung vollständig farbloser Gallen, welche sich also in Bezug auf ihre Nährpflanze als echte Parasiten Verhalten, vollständig übereinstimmt. Diese Wirkung besteht hauptsächlich darin, dass die Zellen des Blattes in der Nähe der Galle gebleicht werden, ein vergilbtes Ansehen erlangen. Bei der Beobachtung zahlreicher Einzelfälle, erhält man den Eindruck, dass dieses Gelbwerden, welches bis zu einer Entfernung von mehreren Centimetern von der Befestigungsstelle der Galle im Blatte bemerkbar ist, im Allgemeinen nur zwischen der Galle und der Blattspitze, oder zwischen der Galle und dem nächstliegenden Blattrande, jedoch nicht auf der entgegengesetzten Seite der Galle auftritt. Dabei wird nicht selten der über oder seitlich von der Galle gelegene Theil des Blattes, welcher also der Blattspitze oder dem Blattrande zugewendet ist, vollständig getödtet, und die Linie welche in diesem Falle todtes und unverändertes Blattgrüngewebe von einander trennt, geht durch den Befestigungspunkt der ganz normal weiterwachsenden Galle. Aus diesen Thatsachen geht hervor, dass die Nährstoffe der Galle zwar aus allen Richtungen zuströmen können, dass dabei jedoch gewisse Blatttheile leichter erschöpft werden wie andere: aus der Blattspitze oder von dem nächstbenachnarten Seitenrande findet der Stofftransport weitaus am leichtesten statt. Diese Verhältnisse erklären sich, wenn man von den beiden folgenden Annahmen, die in anderweitigen Thatsachen ihre Begründung finden *

* De Vries, *Wachsthumsgeschichte der Zuckerrübe*, Landwirthschaftliche Jahrbücher, 1879, pag. 437.

ausgeht, nämlich *erstens*, dass die normale Strömung der in den Blättern bereiteten Substanzen im erwachsenen Blatt nur von der Spitze zur Basis und von dem Rande zum Mittelnerven gerichtet ist; und *zweitens*, dass gewisse Inhalskörper (z. B. Blattgrünfarbstoff) ausgewachsener Zellen, wenn einmal vernichtet, sich niemals wieder regeneriren können. Wenn dieses als richtig anerkannt wird ist es deutlich warum die Blattspitze oberhalb, und die Blattlappen seitlich von der Galle die grösste Gefahr laufen erschöpft zu werden; denn dieselben suchen sich schon auf Grund der normalen Strömung immerfort von oben nach unten, respective von aussen nach innen zu entleeren und die Saugkraft der Galle fügt dieser Strömung eine gleichsinnig gerichtete zu. Dagegen sind die, in Beziehung zur Galle nach unten oder nach innen gelegenen Theile des Blattes, in viel günstiger Bedingung, da die Saugkraft der Galle der normalen Strömung, welche das Blatt zu entleeren sucht gerade entgegenarbeitet, sodass der Substanzverlust den die Zellen erleiden nur gering sein kann. — Es wirft diese Betrachtung ebenfalls Licht auf die Erklärung des Instinktes der Taschenbergiwespe (und ähnlicher Formen) ihre Eier niemals nahe am Blattrand, sondern stets in geringe Entfernung vom Mittelnerven, oder in diesen selbst, niederzulegen; auf die entsprechende Stellung, welche die dadurch erzeugten Gallen später an den Blättern einnehmen, wurde schon oben (§ 8) eingegangen. Für diejenigen Gallwespen welche sehr kleine Gallen erzeugen, wäre ein solcher Instinkt nutzlos, und fehlt denn auch gänzlich.

Betrachten wir nun noch einige anderen Fälle in welchen eine Galle einen äusserlich sichtbaren Einfluss auf die tragenden Organe ausübt.

Die Linsengallen, wozu die Numismatis-, Lenticularis- (Fig. 25 Taf. II), Laeviusculus- und Fumipennisgalle gehören, zerstören ebenso wie die Foliigalle in den Zellen ihrer Nachbarschaft den Chlorophyllfarbstoff; da sie aber nur mit den feinsten Adern der Blattspreite, aus deren Cambiform sie entstehen, in directer Verbinding sind, auf die Hauptstrombahnen der Nährstoffe also nicht influenziren können, so sind sie gewöhnlich in der *Mitte* eines *gelben Fleckes* gestellt. — Bei der Verwundung, welche der Entstehung der Linsengallen vorangeht ist etwas mehr als die halbe Dicke der Blattspreite vernichtet. Diejenigen Zellenschichten der unversehrten Hälfte der Blattdicke, welche an der eigentlichen Gallbildung keinen directen Antheil nehmen, wie die Epidermis der Blattoberseite und das angrenzende Pallisadenparenchym, färben sich schön roth in Folge der Entstehung eines rothen Pigmentes in ihrem Zellsaft. Dieses ist aber Vorbote ihres Todes, welcher schon längst bevor die Galle vom Blatte fällt eintritt.

Wie bei den Linsengallen, trifft auch bei zahlreichen anderen Formen die Regel zu, dass die Tragorgane in der Nähe der Galle zu Grunde gehen. Die

Baccarumgalle, welche man im Mai lebend auf den jungen Eichenblättern antreffen kann, stirbt im Juni und mit ihr gewöhnlich auch ein ziemlich ausgedehntes Areal der Blattspreite. Auch die grösseren Knospengallen, wie die Gemmae-, Solitaria- und Megapteragalle vernichten den Ringtheil der Knospe auf welchem sie ruhen, wie dieses auch bei der Terminalisgalle schon angegeben wurde; solche Knospenüberreste werden dann später von den Aesten gelöst und abgeworfen. Sehr kleine Knospengallen wie Autumnalis und gewisse andere weniger genau bekannte Formen, verursachen dagegen den Tod der Knospen nicht. — Eigenthümlich ist der Einfluss, welchen die an den männlichen Blüthenkätzchen der Eiche vorkommenden Baccarumgallen auf die Spindeln dieser Kätzchen ausüben, und welcher darin besteht, dass diese Stiele mehr oder weniger verholzen und nicht so früh abfallen, wie unter normalen Verhältnissen. Wenn diese Gallen sich an Nebenblättern gebildet haben, findet Aehnliches statt, indem die unterhalb der Galle gelegene Partie der Stipel sich beträchtlich verdickt, sich grün färbt und im Allgemeinen die Natur eines gewöhnlichen Blattes annimmt; längst nachdem die gesunden Nebenblätter schon vertrocknet und ababgefallen sind sitzen die gallentragenden noch im frischen Zustand am Zweige. Diese Erscheinungen lassen sich anscheinend aus der grossen Nahrungsbedürfniss der Galle erklären, wodurch eine intensive Strömung der Nährstoffe in den Spindeln oder Stipelbasen rege bleibt, zu einer Zeit, wenn in den gallenfreien gleichnamigen Organen, für eine solche Strömung keine Ursache mehr besteht.

Andere als durch die Nahrungsverhältnisse bedingte Einflüsse scheinen die Gallen auf ihre Unterlage nicht auszuüben; zwar lässt sich der Beweis für diese Behauptung bis jetzt im Allgemeinen nicht beibringen, doch wird dieselbe durch verschiedene Beobachtungen wahrscheinlich gemacht, so z. B. durch die Beziehung der Kollarigalle zu ihrer Umgebung. Diese Galle geht aus der Knospenbasis einer Sommerknospe hervor, und ist schon im Juni, wenn der Johannisspross noch entstehen muss, als ein 2 bis 3 mM. dickes Körperchen aufzufinden. Bei ihrer Entwicklung bleibt die Knospe selbst ganz normal und unversehrt, und wenn man den Zweigtheil, welcher oberhalb der Galle vorkommt abschneidet, so entwickelt sich die Knospe zu einem ganz normalen Sommersprosse (*a* Fig. 67 Taf. IV), und es stehen dann eine Kollarigalle und ein Zweig in der Achsel desselben Blattes. Da die Cynips kollari ihre Eier gewöhnlich ablegt in Knospen, welche zu schwach sind um Sommersprosse zu bringen, findet man ohne absichtliche Verletzung, solche Vorkomnisse im Freien nur selten, doch kann man, besonders nach Maikäferfrass, bisweilen mehrere dergleichen Objecte sammeln.

Ein anderer schöner Beleg für die unveränderte Natur der Knospe, welche an ihrer Basis eine Kollarigalle trägt, entsteht folgendermaassen. Die kleine An-

dricus pilosus ist die in beiden Geschlechtern vorkommende Form, welche die Gemmaegalle erzeugt. Dieses Thier legt jedes Ei genau auf den Vegetationspunkt einer Sommerknospe, und thut dieses Anfang Juli, wenn die Kollarigallen noch sehr klein sind. Zweige, welche letztere Gallen schon tragen, werden von den Pilosusweibchen nicht selten zum Eierlegen gewählt, und es wird dann dazu bisweilen eine Knospe verwendet, deren Basis schon einer Kollarigalle Dasein gegeben hat. Dessenungeachtet entwickelt sich die Knospe unter dem Einfluss des Pilosuseies zu einer vollkommen normal ausgebildeten Gemmaegalle, und später im August findet man dann die beiden, so ausserordentlich verschiedenen Gallen, in der Achsel des nämlichen Blattes. Die Kollarigalle scheint also die Natur der Knospe von welcher sie getragen wird, auf keinerlei Weise zu affiziren, und so möchte es auch in anderen Fällen sein.

KAPITEL VI.

Die Megapteragalle *.

Taf. IV Fig. 59—66.

§ 1. *Beschreibung der Galle.* Die Megapteragalle (Fig. 59 Taf. IV) findet sich im Mai und Juni an der Basis alter Eichenstämme, ein- oder zweijähriger Eichenkeimlinge und vorjähriger Stocklohden, an schattigen feuchten Oertern. Die grössten Exemplare findet man versteckt zwischen Gras und Moos an Hügelabhängen gegen Süden, wo sie schon Anfang April auftreten; an kälteren Orten kommen im Laufe des Monates Mai fortwährend neue Gallen zum Vorschein. Die Galle erreicht die Grösse einer Erbse, ja selbst einer Kirsche, und besitzt eine Farbe wie weisser Wachs, oft aber mit intensiv rothem Anflug. Sie entwickelt sich aus dem Vegetationspunkt einer schlafenden Knospe auf deren Ringtheil sie im reifen Zustand ruht. — Die Aussenrinde erwachsener Gallen besteht aus einer dicken Schicht saftreicher, dünnwandiger, gerbstoffführender Zellen, deren Wände nur in der Nähe der sehr geräumigen Larvenkammer etwas verdickt und getüpfelt sind; die ringförmig angeordneten Gefässbündel,

---

* Bewohnt von Trigonaspis megaptera Panzer. Synonym: Trigonaspis crustalis.

welche in den jungen Gallen sehr leicht aufzufinden sind, kommen in den älteren Individuen kaum mehr zur Beobachtung, da sie mehrentheils durch secundäre Veränderungen unkenntlich werden. Die Galle lässt sich in Bezug auf ihre anatomische Structur am nächsten mit der Baccarumgalle vergleichen, nur mit dem Unterschied, dass letztere Zucker anstatt Gerbstoff enthält. — Die Megapterawespen kommen im Juni nach aussen und sind leicht kenntlich an ihrem lackrothen Abdomen; wenn man die Thiere im Grossen züchtet, so übertrifft die Zahl der Männchen derjenigen der Weibchen um ein Geringes. Unter vielen hunderten Stücken fand ich einzelne Thiere deren Abdomen ganz schwarz war, nur mit der Ausnahme eines rothen Fleckes auf der Unterseite.

§ 2. *Das Eierlegen der Megapterawespe und die Renumgalle.* Dass die Megapterawespe die in beiden Geschlechtern vorkommende Generationsform einer Art ist zu welcher Biorhiza renum HARTIG als weibliche Generation gehört, lehrte zuerst ADLER *. Nach vielen vergeblichen Versuchen gelang es mir ADLER's Angabe zu bestätigen, und nachdem ich bemerkt hatte, dass die Renumgalle sich nur reichlich vorfindet an solchen Eichenzweigen, welche in fortwährendem Schatten wachsen oder nach Norden gekehrt sind, waren die Schwierigkeiten der Cultur dieser Galle für mich überwunden, und habe ich zahlreiche Exemplare derselben aus denjenigen Blättern zum Vorschein kommen sehen, in welche ich die Megapteraweibchen Eier hatte legen lassen.

Wie ihr Name bezeichnet ist die Renumgalle ein nierenförmiges Gebilde; dieselbe erreicht die Grösse eines Hanfkornes und besitzt eine grünliche Farbe nur selten mit rothem Anflug an der Sonnenseite; die grössten Exemplare sind mehr weisslich und gleichen in ihrem äusserlichen Vorkommen der Megapteragalle, nur sind sie weit kleiner. Man findet die Galle im Oktober in dichten Reihen beiderseits auf den Seitenkanten der dicksten Nerven, auf der Unterseite der Eichenblätter. Gewöhnlich sitzen neben einzelnen gesunden und wohl ausgewachsenen Individuen auf demselben Blatte mehrere kleinere vertrocknete, schon im August abgestorbene Stücke, uud beim Aufbewahren auf feuchtem Sande, gehen von den scheinbar unversehrten Gallen noch sehr viele zu Grunde, mithin ist die Vegetationskraft der Galle nur schwach. Im reifen Zustand wird sie von einem äusserst feinen und zerbrechlichen Stielchen getragen, welches unmittelbar mit dem Gefässbündelring des Nerven in Verbindung steht, in gleicher Weise, wie bei der Foliigalle beschrieben wurde. Auch darin stimmen diese beiden Gallen mit einander überein, dass dieselben ausschliesslich Phloëm- oder

* *Generationswechsel der Eichengallwespen*, Zeitschrift für wissenschaftliche Zoölogie, 1881, pag. 197.

*

Cambiformbildungen * sind. Dagegen unterscheiden sie sich dadurch von einander, dass die Foliigalle im November mit dem Blatte zu Boden fällt, während Renum sich gewöhnlich in Folge des Zerbrechens des Stielchens vom Blatte löst. — Zur Zeit wenn Letzteres geschieht, nämlich Ende Oktober, ist die Rinde der Renumgalle dicht mit Stärke angefüllt; einige Schichten eiweiss- und oelführender Zellen, welche das primäre Nahrungsgewebe darstellen, berühren die nur unvollständig ausgebildete Larve. Das Nahrungsgewebe wird von einer ellipsoïdischen Schale dickwandiger Tüpfelzellen eingeschlossen, welche in ihrem Baue den analogen Zellen der Megapteragalle sehr nahe kommen, jedoch zu einer vollkommeneren Ausbildung gelangen, sodass bei der Renumgalle im Winter nach dem Absterben der weichen Rinde, eine feste Innengalle zurückbleibt innerhalb welcher die Larve weiter fortlebt. In der Aussenrinde kommen viele feine Gefässbündelchen vor, welche in Ringlage um die Larvenkammer angeordnet sind. — Erst im Oktober des nächstfolgenden, oder selbst des zweitfolgenden Jahres, nachdem die Galle längst abgestorben ist, findet in derselben die Nymfbildung statt und im Dezember oder Januar schlüpft das kleine flügellose Wespenweibchen Biorhiza renum daraus hervor. Ehe wir zur Besprechung des Eierlegens dieses Thieres übergehen, mögen noch zuerst einige kurze Bemerkungen über die Entwicklungsgeschichte der Renumgalle hier Platz finden.

Im Mai und Juni 1880 und 81 habe ich viele hunderte Megapterawespen in geräumige mit Gaze überspannte Eisendrahtcuben eingesperrt, welche über Eichenzweige gebunden wurden. Die Thiere legen sehr leicht Eier und betragen sich dabei ungefähr wie die Taschenbergiwespe, doch fällt es auf, dass sie mit ihrer Legeröhre sehr grosse und unregelmässige Wunden in die Seitenkanten der Nerven machen. Da dieses im Juni stattfindet, also zu einer Zeit wenn die Sklerenchymfaserbündel noch aus dünnwandigen Elementen bestehen, erklärt es sich, dass dieses jugendliche Gewebe an den verwundeten Stellen zu Grunde geht. Da die tiefen Wunden sich später im Sommer mit einer braunen Korkschicht schliessen, entstehen an ihrer Stelle braunfärbige Gruben in den Nerven, welche geeignete Merkmale abgeben um, lange bevor die Renumgallen aus den Blättern brechen, die jungen Renumlarven aufzufinden.

Die Eier der Megapterawespe stimmen in ihrer Grösse und Lage ziemlich

* Es wäre möglich, dass diese und alle ähnlichen Gallen aus procambialem Phloëm entstehen. Jedenfalls ist es sicher, dass die Gallenmütter ihre Eier innerhalb der *unreifen* Gefässbündel legen, und dass auch die Larvenentwicklung schon anfängt, ehe die Gefässbündel erwachsen sind; allein da zur Zeit sind Eier oder Larven von dem Phloëmprocambium, durch Xylem, und Parenchym getrennt, und die Gallbildung beginnt erst viel später.

vollständig mit dem was wir bei Taschenbergi gefunden haben überein, nur mit dem Unterschiede, dass die Nervenrinde in ihrer nächsten Umgebung vernichtet, dagegen neben dem Eie der Taschenbergiwespe nur von dem feinen Bohrkanal durchsetzt ist. Wenige Tage nachdem ich eine Wespe in ein Blatt Eier hatte legen sehen, untersuchte ich die Blattnerven mikroskopisch und fand, dass schon im Juni die kuglige Larve innerhalb der Eischale ausgebildet war. Da die Renumgallen jedoch erst Ende September, oder selbst im Oktober aus den Blättern hervorbrechen, besteht in diesem Falle eine, während Juli und August andauernde Larvenruhe, welche den Beweis dafür liefert, dass die Entwicklung der Larve aus dem Eiinhalt, nicht nothwendig mit der Gallbildung verknüpft ist, sondern dass diese die Verwirklichung eines ganz anderen Momentes fordert, welches erst im September und Oktober in Erfüllung tritt. Aehnliches fanden wir schon früher bei der Hieraciigalle.

Da die Megapterawespe ihre Eier innerhalb des Gefässbündelringes in die Mitte des Nerven niederlegt, muss bei der Gallbildung in gleicher Weise wie es bei der Folii- und Ostreusgalle angegeben wurde, der Larvenkörper zwischen zwei Xylembündel durchgleiten um, vermittelst des heranwachsenden Plastemes, ausserhalb der Grenze des Blattes gebracht zu werden. Dadurch erklärt sich, dass auch unterhalb der Renumgalle ein callusartiges Gewebe gefunden wird, welches gleichsam eine Pseudomorphose des Eies der Megapterawespe ist. Im Unterschied von der Foliigalle *, welche in einer kleinen Entfernung von dem Bohrloche aus dem Nerven bricht, sticht die Renumgalle aus der unregelmässigen Verwundung des Nerven selbst hervor. Im Uebrigen stimmen die Vorgänge bei der Plastem- und Kammerbildung, für soweit ich diese beobachtet habe, genau mit den analogen, bei der Foliigalle beschriebenen Verhältnissen überein.

§ 3. *Entwicklungsgeschichte der Megapteragalle.* Nachdem die Renumwespe im Winter ihre Galle verlassen hat, sucht sie sich sofort schlafende Knospen am Fusse der Eichenstämme auf, in welche sie, genau in derselben Weise wie die Foliiwespe (Fig. 35 Taf. III) auf den Vegetationspunkt, ohne diesen dabei zu verwunden, ein Ei legt. Da stets mehrere dieser Knospen beisammen sitzen, und das Thier bevor es sich entfernt, diese alle besucht, gelingt es ziemlich leicht selbst im Freien, mehrere Knospen zu sammeln in welchen noch von der Eischale eingeschlossene Larven liegen; zu diesem Zwecke hat man nur, zur Zeit wenn die Gallentwicklung beginnt, diejenigen Knospen zu untersuchen, welche in

* Sowie von der Longiventris, Ostreus, Divisa und anderen Gallen, welche alle neben dem von der Mutterwespe angefertigten Bohrloche sitzen.

der Nähe einer eben sichtbar gewordenen jungen Galle vorkommen. Auch die jüngeren Entwickelungsstadien der Galle, deren Gegenwart in den Knospen äusserlich nicht sichtbar ist, lassen sich auf diese Weise in genügender Anzahl für eine Untersuchung einsammeln. Es gilt dieses natürlich nur für günstige Gallenjahre, wie in der Gegend von Wageningen, die Jahre 1880 und 81 gewesen sind.

Im Allgemeinen stimmt die Entwicklungsgeschichte der Megapteragalle sehr vollständig mit derjenigen von Taschenbergi überein, und im Anfang geht dieser Parallelismus so weit, dass die für die letztere Gallen angefertigten Figuren 37*a*, *b*, *c* und *d* Taf. III auch für Megaptera gelten können *. Bei der nun folgenden kurzen Beschreibung möge daher auf diese Figuren Rücksicht genommen werden. Anfang oder Mitte März, an kühlen Orten selbst noch im April, fängt die Ueberwallung der jungen Larve dadurch an, dass sich ein dicker Plastemwall aus dem Meristem des Vegetationspunkte ringsum den Eikörper erhebt. Die Wachsthumshemmung dieses Plastems an der Stelle des directen Contakts zwischen demselben und dem Thiere, und die Beschleunigung dieses Wachsthums in einer gewissen Entfernung vom Berührungspunkte, veranlassen die allmählige Einschliessung des Larvenkörpers. Sind die Plasteme noch nicht vollständig geschlossen, und entfernt man unter dem Präparirmikroskop aus dem Kammerloche junger Gallenanlagen, welche man durch feine Querschnitte von der Knospenachse getrennt hat, die Eischale, so kann man leicht durch das Kammerloch auf das Thier herabblicken. Wenn dieses zur genannten Zeit aus dem Plastem frei präparirt wird, so findet man dasselbe von einer sehr resistenten Embryonalhaut bekleidet, und kann man die feinen Chitinkieferchen bei 400-facher Vergrösserung leicht auffinden. In der Farbe sind das Plastem und die Larve einander ähnlich, da beide das bekannte Aeussere jugendlicher Gewebe aufzeigen, welches sich am Besten einer farblosen Emulsion von Oel und Wasser vergleichen lässt. Eine kleine Partie des Plastems, welche dem Rande der Kammerloches entlehnt wurde sieht man in Figur 60 Taf. IV dargestellt. Wir finden hier die nämliche Struktur zurück, welche für das Plastem der früher betrachteten Gallen kennzeichnend ist; nur in untergeordneten Besonderheiten zeigen sich Unterschiede, z. B. darin, dass man in diesem Falle leicht die Kernkörperchen in den Kernen sehen kann, welches z. B. bei der Terminalgalle nicht gelang. Es werden in den Plastemzellen Safträume mit Protoplasmabändern gefunden. — In Bezug auf Fig. 60 sei noch darauf hingewiesen, dass

---

* Es sei daran erinnert, dass der Uebersichtlichkeit halber die Eischalen in den genannten Figuren nicht mitgezeichnet wurden. Auch in den Präparaten der jüngsten Megapteraanlagen gelingt es leicht die Eischale aus dem Kammerloch zu entfernen.

mit *la* die Zellen welche den Larvenkörper berühren, mit *fo* diejenigen der freien Oberfläche angedeutet sind.

Aus der Entstehung der Megapteragalle, in Folge der Umwallung der Larve durch das Meristem einer Knospe, erklärt sich warum man auf der Spitze vollständig ausgewachsener Gallen dieser Form, kleine Blattrudimente (*br* Fig. 59 *β* Taf. IV) ringsum die Gallennarbe (*nb*), das ist die Stelle wo sich das Kammerloch zuletzt susammengeschlossen hat, auffinden kann.

§ 4. *Ueber den anatomischen Bau der jungen Megapteragalle.* Die Differenzirungen im Plastem der Megapteragalle bieten vielfaches Interesse. Da diese Verhältnisse hier klarer vorliegen wie in den nächst verwandten Taschenbergi- und Similisgallen, sollen dieselben hier eine etwas ausführlichere Besprechung finden. Zuvor muss ich bemerken, dass nur sehr junge Gallen, nämlich diejenigen, welche wie in der Fig. 61 Taf. IV abgebildet, noch gänzlich unter den Knospenschuppen versteckt sind, sich eignen eine klare Einsicht in die Structur der Galle zu eröffneu; in älteren Exemplaren richtet die sehr gefrässige Larve grosse Zerstörungen an, wodurch z. B. die Beobachtung des Gefässbündelverlaufs erschwert, oder selbst unmöglich gemacht wird. Ueberdies sind in den älteren Gallen in der Nachbarschaft der Larvenkammer dickwandige Tüpfelzellen abgelagert, welche das Präpariren mühsam machen. Es sei weiter darauf hingewiesen, dass man die feineren Structurdetails, wie z. B. die Entstehung der Procambiumstränge, viel leichter in frischen, lebenden Gallen sehen kann, wie in Alcoholmaterial.

Diejenigen Knospen, welche 0.5 mM. hohe, vollständig von den Knospenschuppen eingeschlossene Gallen tragen, sind mehrweniger gedunsen und dadurch von den gallenfreien Knospen zu unterscheiden. Längsschnitte davon (Fig. 61 Taf. IV) lehren, dass der Ringtheil (*rt*) welcher die Galle trägt, in Uebereinstimmung mit der geringen Grösse des ganzen Cryptoblasten, sehr dünn ist; übrigens besitzt dieser Ringtheil die nämliche Structur wie in den Grosstriebknospen. Auf dem Querschnitt desselben * zeigt sich nämlich (Fig. 62 Taf. IV) der Holzring in der Form eines Fünfeckes, welcher das Mark einschliesst. Cambium und Phloëm schliessen sich dem Holzringe enge an und feine Gefässbündelchen biegen sich in nahezu horizontale oder schief aufsteigende Richtung (Fig. 61) zu den Knospenschuppen. Wenn man den Bündelring weiter nach oben verfolgt, findet man. dass die Xylembündel beträchtlich dünner wer-

* In Fig. 61 sind die Niveaus, welche den Figuren 62—66 entsprechen, durch übereinstimmende Zahlen zwischen Klammern angegeben.

den (Fig. 63). Noch höher, nämlich an der Basis der jungen Galle, ordnen sie sich mit grosser Schärfe in fünf Gruppen, welche jede aus einer veränderlichen Zahl elementärer Bündelchen bestehen (Fig. 64). Längsschnitte lehren, dass die Bündel hier nur aus Netztracheïden zusammengesetzt sind, während das übrige Gewebe der jungen Galle, welches sie durchsetzen, aus sehr kleinen oelführenden, parallelopipedischen Zellen mit mässig dicken Wänden ohne Interzellenlarräume, besteht. Noch höher vereinigen sich die Bündel zu fünf oder sechs gesonderten Strängen, welche in die Galle selbst hineintreten; giebt es deren fünf so entsprechen dieselben den fünf vorhergenannten Bündelgruppen (Fig. 64), und ihre complizirte Natur lässt sich besonders im Xylemtheile, welcher aus einigen gesonderten Partieën besteht, erkennen. Verfolgt man die Bündel bei Gallen, welche 1 mM. Länge erreicht haben bis zur Höhe des Centrums der Galle, so bemerkt màn, dass dieselben sich in tangentiale Richtung zu verzweigen anfangen, in Folge dessen ihre Zahl sich in der oberen Hälfte der Galle (Fig. 66) zu 13 bis 20 vermehrt. Geht man jeden dieser Zweige noch weiter nach, so findet man, dass sie in Procambiumbündel enden, die sich nahe der Gallenspitze im Parenchym verlieren; eine Beziehung derselben zu den Blattrudimenten (*br* Fig. 61 Taf. IV) konnte ich nicht entdecken.

Der Querschnitt der Gefässbündel junger Megapteragallen zeigt eine unerwartete Eigenthümlichkeit auf, nämlich die, dass der Cambiform- oder Phloëmtheil jeden Stranges eine ringsum geschlossene Scheide des Xylems darstellt (Fig. 65 und 66 Taf. IV); die Dicke dieses Ringes ist auf der nach innen, der Larvenkammer zugekehrten Seite des Xylems am grössten. In anatomischer Beziehung besitzen mithin die kleinen Gefässbündel der Megapteragalle eine gewisse Aehnlichkeit mit den concentrischen Gefässbündeln der Farne, welche ebenfalls centrales Xylem und peripherisches Phloëm besitzen. In den älteren Gallen lässt dieses Verhältniss sich kaum mehr beobachten, da die Gefässbündel, welche stets nur sehr schwach bleiben, darin ihre Bedeutung gänzlich verloren haben, und von den sich stark verdickenden Parenchymzellen der nächsten Umgebung ganz verzerrt und beinahe unkenntlich gemacht werden.

Der concentrische Bau der Gefässbündel der Megapteragalle, findet sich auch in anderen Bildungen, welche eine ähnliche Entwicklungsgeschichte wie diese Galle besitzen, zurück; so traf ich z. B. in den schönen Albopunctatagallen im reifen Zustand einen Ring concentrischer Gefässbündel ausserhalb der Innengalle an. Bei der von Aphilothrix malpighii ADLER * bewohnten Galle, welche sich, ähnlich wie

* Zeitschrift für wissensch. Zoölogie, 1881, pag. 183.

die Megapteragalle aus dem Vegetationspunkt eines Cryptoblasten entwickelt *, ist die dünne Phloëmbekleidung auf der Aussenseite des Gefässbündels ganz verschwunden, wodurch ein einfach collaterales Bündel entsteht, welches jedoch das Xylem auf der Aussenseite — der Oberfläche der Galle zugekehrt — trägt.

Die Structurverhältnisse der übrigen Gewebe der jungen Galle, in welchen die Gefässbündel eingebettet liegen, bieten mehr Verschiedenheiten in stofflicher, wie in anatomischer Hinsicht dar. Nur nahe bei der Spitze der Galle, nämlich in dem Gewebe des Kammerloches (*lg* Fig. 61 Taf. IV) liegen einzelne collenchymatische Elemente, übrigens findet man ausschliesslich kleinzelliges Parenchym, welches nur dem Zellinhalt nach verschiedenartig ist. So lassen sich z. B. in dem in Figur 61 abgebildeten Zustand, in welchem die ganze Dicke der Gallenwand von der Oberfläche bis zur Larvenkammer 20—25 Zellschichten umfasst, drei verschiedene Regionen unterscheiden. Die fünf bis sieben, der Oberfläche angrenzenden Zellschichten, sind sehr gerbstoffreich und grenzen ohne Vermittlung von Zellen gemischten Inhaltes, an das dem Centrum zugekehrten Gewebe, welches reich an Eiweiss aber gerbstofffrei ist, — die Grenze zwischen diesen beiden Geweben liegt ein wenig ausserhalb der Gefässbündel (*gb*). Die der Larvenkammer berührende Zellschicht (*ng* Fig. 61), enthält ausser Eiweiss zahlreiche Oeltröpfchen und bildet die erste Zellenlage des Nahrungsgewebes. Beim weiteren Wachsthum der Galle vermehrt sich die Zahl der Zellschichten des Nahrungsgewebes in centrifugale Richtung, dadurch, dass die weiter nach aussen liegenden Zellen des obengenannten Eiweissgewebes sich mit Oel anfüllen. Ein Gegensatz zwischen primäres und secundäres Nahrungsgewebe, wie wir einen solchen bei der Foliigalle kennen lernten, habe ich hier ebensowenig aufgefunden wie in der Baccarumgalle. Dagegen lässt sich in den wachsenden Gallen, besonders leicht nahe an der Basis und in der Nähe der Gefässbündel, Stärke nachweisen, welche aber niemals so reichlich auftritt, wie z. B. in der Baccarumgalle, und bald verschwindet.

Die weitere Gewebeänderung in der Megapteragalle ist einfacher Natur und besteht hauptsächlich in einer, während längerer Zeit mit Zelltheilung verknüpften Ausdehnung des Gerbstoffgewebes. Zu gleicher Zeit verringert sich, in Folge des Frasses der Larve, alles innerhalb der Gefässbündel vorkommende Gewebe. Dass die Gefässbündel selbst nicht zernagt werden verdanken sie dem Schutze, welchen die nunmehr sich bildenden dickwandigen Tüpfelzellen ihnen

---

* Gallenmutter Andricus nudus ADLER.

verleihen. Inzwischen erreicht die Larve ihre Reife und verändert in eine Nymfpuppe.

§ 5. *Besondere Stellungsverhältnisse.* Wenn man die gewöhnliche Form der Megapteragalle (*α* und *β* Fig. 59 Taf. IV) von dem Stamme oder dem Zweige an welchem sie sitzt abbricht, so findet man darunter die zurückgekrümmten Knospenschuppen des Ringtheils der schlafenden Knospe von welcher die Galle erzeugt wurde, eben wie bei der Taschenbergi- und Similisgalle. Doch ist dieses nicht immer der Fall, denn die Galle wird bisweilen von einem beblätterten Spross getragen, welcher eine sehr verschiedene Länge, höchstens 1 dM. erreichen kann, gewöhnlich aber viel kürzer bleibt. Im Allgemeinen sind diese Vorkommnisse selten zu nennen und nur gute Gallenjahre geben Aussicht, diese zierliche und lehrreiche Bildungen in mehreren Exemplaren zu sammeln. Es sind besonders die dicht bewaldeten, gen Süden gekehrten Hügelabhänge, welche zu derer Entstehung geeignete Verhältnisse darbieten. Die schönsten gestielten Gallen fand ich an zwei- und dreijährigen Stocklohden, welche sich aus den Stöcken abgehauener Eichenstämme entwickelt hatten, und solche dienten beim Zeichnen der Figur 59.

Eine nähere Untersuchung der gestielten Gallen lehrt dass dabei dreierlei verschiedene Befestigungsweisen vorkommen. *Erstens*, und dieser ist ist der am wenigsten seltene Zustand, kann die Galle einfach den Vegetationspunkt eines gewöhnlichen beblätterten Sprosses ersetzen (*ε* Fig. 59 Taf. IV); die Spitze der Galle ist in diesem Falle mit besonders deutlichen Blattrudimenten bewachsen, der Zweighteil unterhalb der Galle erreicht eine gänzlich normale Ausbildung. Die Erklärung ergibt sich ohne Schwierigkeit aus der Kenntniss der Entwicklungsgeschichte der normalen Fälle; hier ist nämlich, in Folge eines besonders intensiven Wachsthums des Cryptoblasten, seit die Renumwespe auf den Vegetationspunkt desselben ein Ei legte, eine wachsthumsfähige Region ausser dem Bereich der Gallwirkung geblieben, demzufolge nicht in Plastembildung begriffen, und diese Region hat sich im Frühling verlängert (man wolle übrigens das bei der Taschenbergigalle Gesagte vergleichen).

Zweitens kann die Galle sich an der Stelle eines grünen Blattes am Sprosse entwickelt haben (*γ* Fig. 59 Taf. IV), die beiden Nebenblätter werden dann neben der Galle, ein secundäres Achselknöspchen in ihren Achsel, und bisweilen ein kurzer Blattstiel unterhalb derselben angetroffen. Solche blattvertretende Gallen sind kugelrund und zeigen gewöhnlich auf ihrer Oberfläche eine feine braune Linie welche von ihrer Narbe bis zum Nabel verläuft; seltener, an Stelle dieser Linie, eine seichte Grube, welche der Furche in einem Pfirsich ähnlich

sieht. Die Linie so wie die Furche entsprechen einem Seitenrande des umgewandelten Blattes, wo dass Wachsthum der Galle etwas zurückgeblieben ist. — In diesem Falle ist das Renumei, anstatt auf die Spitze des Vegetationspunktes selbst zu liegen zu kommen, mit einer Blattanlage in Berührung getreten, und die Gallwirkung hat sich dabei nicht über die Grenze dieser Anlage ausgedehnt, sodass diese allein in Plastem umgewandelt ist; selbst die Nebenblattanlagen, sowie die kaum entstandene secundäre Achselknospe erfahren nicht den geringsten Einfluss vom Gallenthiere, welches in ihrer unmittelbaren Nähe liegt. Ob sich auch unter den gewöhnlichen ungestielten Megapteragallen dann und wann blattvertretende Individuen ausbilden, weiss ich nicht mit Sicherheit anzugeben, meine jedoch dass dieses bisweilen der Fall ist. — An der Spitze derjenigen Gallen welche aus Blattanlagen entstanden sind kommen natürlich die Blattrudimente, welche für die aus den Vegetationspunkten entstandenen Gallen kennzeichnend sind, nicht vor.

Ein *drittes* sehr exceptionelles Stellungsverhältniss, welches ich nur ein ein einziges Mal beobachtete, bestand darin, dass sich eine Megapteragalle an einem grünen Sprosse an Stelle eines secundären Achselknöspchens gebildet hatte (δ Fig. 59 Taf. IV). Die Galle stand in der Achsel eines normalen grünen Blattes mit Nebenblättern und ruhte unmittelbar auf der Sprossachse.

Bei der Erklärung diesen Falles muss ich bemerken, dass an dem nämlichen Sprosse, welcher diese Galle produzirt hatte, noch eine zweite — blattvertretende — Galle sass. Hier waren mithin, sei es von einer einzigen oder von zwei verschiedenen Renumwespen, zwei Eier in einen einzigen Cryptoblasten niedergelegt worden. Die beiden Eier hatten auf der Spitze des Vegetationspunktes keinen Platz finden können und demzufolge war das eine Ei auf die Spitze einer Blattanlage, das andere, jenem gegenüber, in die Achsel einer anderen Blattanlage zu liegen gekommen. — Vergebens suchte ich bisher nach einer vierten besonderen Stellung der Megapteragalle, welche bisweilen vorkommen möchte — ich meine den Fall, wo eine Nebenblattanlage zu einer Galle geworden wäre.

Aus dieser Darstellung geht mit besonderer Klarheit hervor, wie äusserst klein die Zellgruppe der Nährpflanze ist, welche für die Bildung der Megapteragalle in Anspruch genommen wird; weiter ergibt sich daraus, dass morphologisch verschiedene Meristemgruppen eines wachsenden Sprosses unter dem Einfluss specifisch gleicher Gallenthiere, identische Gallen erzeugen können.

---

*

KAPITEL VII.

DIE KOLLARIGALLE *.

Taf. IV Fig. 67—74. — Taf. V Fig. 75—88.

§ 1. *Beschreibung und Vorkommen der Kollarigalle.* Im September und Oktober findet man diese Galle im reifen und schon abgestorbenen Zustand an den Eichenzweigen, als eine Kugel von 2 bis 3 cM. Mittellinie von schönster Okerfarbe, welche eine grosse braune Gallwespe einschliesst. Auf dem, dem Nabel gegenüber liegenden Pol der Galle findet sich ein kleiner, einseitig abgeplatteter bisweilen zweispitziger conischer Höcker, neben welchem, wie sich später ergeben wird, die Gallenarbe vorkommt; schon frühzeitig in der Entwicklungsgeschichte der Galle besteht dieser Höcker aus einem todten Gewebe. Andere kleine Auswüchse welche die Oberfläche der Galle oft sehr regelmässig zieren, werden unten in § 3 besprochen werden.

So lange die Galle noch lebt besitzt sie eine grasgrüne, oder, wenn im tiefen Schatten gewachsen, eine goldgelbe Farbe. Vor der vollständigen Reife ist dieselbe ziemlich weich, man kann ohne Mühe mit einer Nadel bis tief in das Gewebe hineinstechen; in der Nähe des Mittelpunktes erfährt man dabei aber einen beträchtlichen Widerstand, in Folge der dort befindlichen Steinzellenbekleidung der Larvenkammer. Sobald das Braunwerden der Oberfläche der Galle anfängt, welches zugleich ein Zeichen ihres Absterbens ist, vertrocknen die Hautgewebe schnell und bilden eine dichte holzigharte Bekleidung des Ganzen, wodurch die Galle Jahre lang im Freien verbleiben kann ohne aus einander zu fallen. Es ist denn auch keine Seltenheit drei bis vierjährige Kollarigallen am Gehölze anzutreffen, jedoch sitzen solche alte Exemplare gewöhnlich an todten Eichenästen, da die lebendigen Zweige in Folge ihres Dickenwachsthums schon früher die Gallen abzuwerfen pflegen.

Es scheint mir geeignet an dieser Stelle einen kurzen Ueberblick der anatomischen Structur der reifen Kollarigalle zu geben. Dabei habe ich der ausführlichen Beschreibung LACAZE DUTHIERS †, welche ich resumiren werde, nichts hinzuzufugen, muss nur bemerken, dass eine reife Kollarigalle keine Epidermis besitzt, da diese von der jungen Galle abgeworfen wird. — Das Hautgewebe besteht übrigens aus verschiedenen Schichten sehr kleiner, polyëdrischer Zellen mit mässig verdickten Wänden; in den lebenden Gallen enthalten diese Zellen Zellsaft und viele Chlorophyllkörner; weiter nach innen runden sie sich mehr und

* Bewohnt von Cynips kollari HARTIG.

† *Recherches pour servir à l'histoire des Galles*, Annal. d. sc. nat. Bot., 1853, p. 291.

mehr ab wobei Interzellularräume entstehen, und gehen dadurch allmählich in das Rindenparenchym über.

Das letztere bildet eine mächtige Schicht, welche mit Ausschluss der Gefässbündel, die in den reifen Gallen schwierig aufzufinden sind, aus gerbstoffreichen, in radiale Richtung stark verlängerten Zellen besteht. Diese selbst sind in der Nähe des Hautgewebes ein wenig verzweigt, wodurch sehr weite, luftführende Interzellularräume entstehen, welche daran eine lockere Textur mittheilen und den dafür gebrauchten Namen „Schwammgewebe" rechtfertigen. Die weiter nach innen, der Larvenkammer näher liegenden Schichten des Gerbstoffparenchyms, bestehen aus unverzweigten, cylindrischen und polyëdrischen punktirten oder getüpfelten Zellen; das der Innengalle angrenzende Gewebe besteht aus prismatischen, stark verdickten Tüpfelzellen, welche in die Richtung des Radius der Galle stark verlängert und beiderseits zugespitzt sind. Die ellipsoidische Innengalle schliesst eine geräumige Larvenkammer ein; die Wandung derselben besteht aus einer äusseren, dicken schützenden Schicht, isodiametrischer Steinzellen mit schönen Tüpfelkanälen, und dem mehr nach innen gelegenen, die Larvenkammer allseitig begrenzenden Nahrungsgewebe, welches aus Stärke, Oel, und Eiweiss-führenden Zellen besteht, und später ausführlicher betrachtet werden wird; natürlich ist dieses Nahrungsgewebe aus Gallen, welche Nymfen oder Wespen enthalten verschwunden. Die Eigenthümlichkeiten des Gefässbündelsystems lassen sich in den reifen Gallen kaum mehr feststellen, dessto leichter jedoch in den jüngeren Individuen, worüber unten (§ 6) Näheres.

Ueber die Verbreitung der Galle ist mir folgendes bekannt. — MALPIGHI erwähnt das Vorkommen derselben in Italien, LACAZE DUTHIERS in Frankreich, MAYR in Oesterreich; nach vielen Angaben* ist dieselbe in England sehr verbreitet, und dort, nämlich in Devonshire, im Jahre 1847 eingewandert. Dr. ADLER in Schleswig hatte die Güte mir mitzutheilen, dass sie in Deutschland nördlich von der Elbe nicht vorkommt. Im Jahre 1840 fehlte sie aber auch noch bei Braunschweig, denn als TH. HARTIG, welcher damals in dieser Stadt und in Berlin die Familie der Gallwespen bearbeitete, die Kollariwespe beschrieb, geschah dieses nach Material, welches KOLLAR ihm aus Wien zugeschickt hatte. Für Niederland ist mir das Vorkommen der Galle in Overijsel, Gelderland, Utrecht, Nord- und Süd-Holland, Groningen und Drenthe sicher bekannt, doch

* Gardeners Chronicle, 1854 pag. 742; 1855 pag. 789; 1860 pag. 72; 1862 pag. 813. — Die Allgemeinheit der Galle bei ihrem ersten Auftreten in England geht aus den folgenden Worten d'URBAN's hervor: „Since that time (1854) the mischief thus caused has increased so alarmingly, that unless some effectual stop can be put to the evil, the landowners of Devon, Cornwall, Dorset, Somerset and even Gloucestershire, will have to abandon all hope of raising oak timber".

fehlt die Galle (dieses war wenigstens noch der Fall im Jahre 1870) auf Voorne. Bei uns scheint die Galle um das Jahr 1863 eingewandert zu sein, sicher ist dass dieselbe dann erst in Niederland allgemeiner geworden ist, denn wäre dieses schon früher der Fall gewesen, so würde es von dem scharfsichtigen SNELLEN VAN VOLLENHOVEN * nicht unbemerkt geblieben sein.

Bei Wageningen ist die Kollarigalle ziemlich selten, und nur an einer einzigen beschränkten Oertlichkeit jährlich in grösserer Anzahl zu finden; einzelne zerstreute Individuen kommen hier jedoch beinahe überall wo es Eichen gibt vor. Bei Arnheim ist sie allgemeiner, in einzelnen Waldungen selbst massenhaft anzutreffen.

Als Nährpflanze habe ich bisher nur Quercus pedunculata und verschiedene aus den Baumschulen herkünftige Varietäten dieses Baumes erkannt. Dass ich die Galle bisher noch nicht an Quercus sessiliflora beobachtete ist möglicher Weise Zufall, weil dieser Baum nur sehr zerstreut vorkommt; jedoch erwähnt MAYR † auch nur Quercus pedunculata als Nährpflanze der Kollarigalle. LACAZE DUTHIERS sagt aber (l. c.) er habe die Galle an Quercus robur, pedunculata, cerris, rubra und fastigiata aufgefunden; mit Q. robur soll hier wohl Q. sessiliflora gemeint sein. Amerikanische Eichen — wie ich glaube Quercus rubra L. — werden hier in Gelderland vielfach angepflanzt und bei Renkum, Rozendaal und Oosterbeek gerade an denjenigen Stellen, wo Cynips kollari gemein ist, doch bemerkte ich die Galle an diesen Bäumen niemals. Durch Nachfrage in einigen Baumschulen erfuhr ich, dass man an den Culturen der amerikanischen Eichen die Kollarigalle ebenfalls niemals bemerkt hatte.

Die reichen Fundstätten der Galle kommen nur an denjenigen Stellen vor, wo das Gehölze schwache Vegetationskraft besitzt, und hier, wie überall anders, werden beim Eierlegen offenbar durch die Kollariwespen die kleinen, sich erst spät im Frühling öffnenden Knospen bevorzugt. Die schönsten Gallen finden sich demzufolge denn auch besonders an dünnen kränklichen Sprossen, ganz nahe beim Boden, oder beim Stamme und im tiefen Schatten. Schon oben wurde aber bemerkt, dass die Gallen, in vereinzelten Individuen überall vorkommen können selbst bei, für die Pflanze sehr günstigen Wachsthumsbedingungen.

§ 2. *Die gewöhnliche Stellung der Kollarigalle am Zweige.* Bei oberflächlicher Betrachtung hat es den Anschein, dass die Kollarigalle an Stelle einer Knospe in der Achsel eines Blattes sitzt; eine nähere Untersuchung lehrt jedoch, dass dieses nicht der Fall ist, sondern dass die Knospe sich gänzlich unverändert

---

* Tijdschrift voor Entomologie, 1865, p. 160.

† *Die mitteleuropäischen Eichengallen in Wort und Bild*, 1e Hälfte, Wien 1870, pag. 16.

neben der Galle vorfindet. Früher bemerkte ich schon, dass es gelingt die Knospe dadurch zum Treiben zu bringen, dass man die Spitze des Sprosses oberhalb der Galle abschneidet (*a* Fig. 67 Taf. IV); der Seitenzweig, welcher dann entsteht, ist zwar vollkommen normal, aber meistens nur schwach, da derselbe seine Nahrung mit der Galle theilen muss. Wenn im Frühjahr Eichengebüsche abgehauen werden, entwickeln sich im Sommer die neuen Sprosse ausserordentlich kräftig; fanden sich nun zufälligerweise in den Knospen aus welchen die Sprosse entstehen Kollarieier, so bilden sich Kollarigallen neben denjenigen Seitenknöspchen, welche voraussichtlich austreiben und dabei in sehr dicke Sprosse veränderen können. Findet dieses Austreiben wirklich Statt, so wird die Galle zwischen Mutterachse und Seitenzweig nicht selten so stark zusammengepresst, dass dieselbe dadurch die Gestalt einer Scheibe annimmt. Merkwürdig ist es, dass die Larvenkammer in solchen gänzlich missgebildeten Gallen, ihre gewöhnliche ellipsoidische Form unverändert beibehalten kann.

Wenn man eine grössere Anzahl Kollarigallen durchmustert, so findet man, dass die meisten Individuen, in Beziehung zum Tragblatte, auf der rechten oder linken Seite der Seitenknospe festsitzen (Fig. 68 Taf. IV), und dabei nicht selten in der Achsel eines Vorblattes (*vb* Fig. 68) befestigt sind. Besonders leicht lässt dieses sich bei jungen, im Juni eingesammelten Gallen constatiren, während die älteren Gallen in Folge der beträchtlichen Grösse des Nabels, ihren Ursprung weniger deutlich aufzeigen, doch ergibt eine genaue Untersuchung, dass auch im letzteren Falle, ein ursprünglicher Zusammenhang mit der Seitenknospe unverkennbar ist. In Beziehung zum Hauptsprosse ist jede Kollarigalle daher ein Seitengebilde zweiter Ordnung.

Sehr oft finden sich zahlreiche Gallen am Gipfel eines Zweiges dicht beisammen. Die einzelnen Glieder einer solchen Sammlung können in Folge ihrer Anschwellung mit einander in Berührung treten, dabei zusammengepresst werden und platte Seitenflächen bekommen; jede einzelne solcher Gallen sitzt, in Uebereinstimmung mit der gewöhnlichen Regel, auf der Basis einer Knospe; offenbar kann die terminale Galle dabei ein Seitenproduct ersten Ranges sein. Die compacte Stellung der gipfelständigen Gallen erklärt sich daraus, dass die Internodien an den Spitzen der Eichenzweige immer sehr kurz sind.

Ein wichtiger Umstand, welcher über das Betragen der Mutterwespe der Galle, beim Acte des Eierlegens, Licht verbreitet, ist das Vorkommen einer sehr feinen Bohrwunde (*bl* Fig. 68 Taf. IV) im Blattstiel unmittelbar unter der Galle. Die Narbe dieser Bohrwunde, welche sich nicht nur bei jungen, noch wachsenden, sondern selbst unterhalb vollständig reifer Gallen leicht auffinden lässt, zeigt sich in der Gestalt einer seichten theilweise mit einer Korkwucherung ange-

füllten Furche, auf der Rückenseite des Blattstiels. Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass wir in dieser Narbe diejenige Stelle erblicken müssen, an welcher die Legeröhre der Mutterwespe den Blattstiel von unten nach oben durchbohrt hat, und zwar mit dem Zweck ein Ei in die Achsel des Blattes zu legen. Die Schwierigkeit, dass diese Narbe nicht selten mehrere Millimeter vom Zweige und von der Gallenbasis entfernt ist, erledigt sich dadurch, dass das Blatt seit dem Augenblick wo es angebohrt wurde, nach allen Richtungen beträchtlich gewachsen ist. Im Inneren reifer Blattstiele kann man bei mikroskopischer Untersuchung kaum etwas vom Bohrkanal zurückfinden, und es gelang mir nur unter sehr jungen Gallen, den Eistiel noch darin anzutreffen.

Hatte das Eierlegen stattgefunden nachdem der Spross sich schon aus dem Knospenzustand entfalten hatte, so würde das Thier sich gewiss die vergebliche Arbeit der Durchbohrung des Blattstiels erspart haben; dieses führt also zum Schlusse dass das Ei wodurch die Kollarigalle erzeugt wird, in eine Winterknospe gelegt wird. Eine weitere Ueberlegung lehrt uns, dass die Wespe sich dabei ungefähr wie Neuroterus lenticularis (Fig. 26 Taf. II) betragen, also ein Thier mit einer langen Legeröhre sein muss.

§ 3. *Die Kollariwespe und ihre Eiablage. Die mit der Kollarigalle nächst verwandten Formen.* In Uebereinstimmung mit der ellipsoidischen Gestalt der Larvenkammer, deren Längsachse senkrecht steht zur Linie, welche Narbe und Nabel der Galle vereinigt, kehrt die Wespe, welche ebenfalls eine länglich Körperform besitzt, wenn noch in der Larvenkammer eingeschlossen den Kopf nach dem Aequator der Galle; hierdurch wird erreicht, dass das Thier zum Zwecke der Anfertigung des Flugloches, sich nur voraus zu bewegen hat um den Nabel der Galle zu vermeiden. Das Flugloch leerer Gallen, liegt daher, wie bei der Foliigalle ein Viertel des Umrisses vom Nabel entfernt. Oft finden sich aber viele Gallen dicht beisammen an der Spitze eines Zweiges, ereignet es sich dabei, dass eine andere Galle genau vor dem Flugloche, welches die Wespe sich schuf, vorkommt, so erheischt die Raumschaffung viel Arbeit.

Ob die Kollariwespen im Freien Nahrung aufnehmen, weiss ich nicht anzugeben; bewahrt man die Thiere lange in Schachteln auf, so ermorden und verzehren sie einander. In der Gefangenschaft werden dagegen Fleisch, Brod, Mehl, Blüthenstaub, Zuckerlösung und Eichenknospen nicht verspeist. — Wie oben angeben verlassen die Wespen im September und Oktober ihre Gallen; sowohl im Freien wie im Zimmer aufbewart sterben dieselben jedenfalls im November, und dieses trifft wahrscheinlich auch für die nicht eingefangenen, im Walde herumschwärmenden Thiere, zu.

Da die Kollariwespe nur im weiblichen Geschlecht vorkommt, ist zu erwarten dass das Thier zur Schwärmzeit, welche von der Mitte September bis zur Mitte Oktober fortdauern kann, sofort mit Eierlegen beginnt. Dass dieses auch wirklich geschieht schliesse ich daraus, dass ich in Eichenknospen welche sich innerhalb Gazenetzen mit eingezwingerten Kollariwespen befanden, schon am ersten Tage nach der Verschliessung Eier dieser Thiere auffand. Die Wespen beim Akte des Eierlegens direct zu Gesicht zu bekommen, gelang mir jedoch trotz der grössten Beharrung und einer auf allerlei Weisen variirten Versuchsanstellung nicht, was sich daraus erklärt, dass das Eierlegen überhaupt in der Gefangenschaft nur in sehr beschränktem Maasse stattfindet. Obschon ich hunderte von Knospen, welche die Aussicht gaben Eier einschliessen zu können sorgfältig untersuchte, haben doch nur vier verschiedene Funde meiner Erwartung in dieser Beziehung entsprochen, und davon war noch die Hälfte im Freien aufgefundenes Material. Die Möglichkeit, dass die Kollariwespe ihre Eier in andere Organe als die Knospen lege, wurde vielfach geprüft und dazu ganze Eichenbäumchen mit zahlreichen Thieren unter Nesseltuch eingezwingert; Gallbildung — weder der Kollarigalle noch von einer anderen Form — ist dabei jedoch überhaupt nicht eingetreten.

Ich will nun kurz die wenigen Funde von Kollarieiern in den Eichenknospen verzeichnen, doch möge ein Wort über die Structur der Legeröhre und des Eies vorangehen. Die Kollariwespe, welche zu den grössten Gallwespen gehört und in dieser Hinsicht der Cynips tinctoria aus den Gallnüssen der Apotheken entspricht, welcher sie auch in allen übrigen Merkmalen sehr nahe steht, besitzt eine ausserordentlich lange Legeröhre, welche offenbar eine Anpassung an die Grosstriebknospe der Eiche darstellt. Der Querschnitt derselben ist in Fig. 15 Taf. I bildlich vorgeführt, die Beschreibung der Cynipidenlegeröhre im Allgemeinen, wurde in Kapitel I § 5 gegeben. Die Länge der Eier, welche in einem proportionalen Verhältniss zur Legeröhrenlänge steht, ist ebenfalls sehr beträchtlich und beläuft 2,5 mM. Eine Verwechselung solcher ausserordentlich langen Eier, mit anderen Cynipideneiern, welche in Eichenknospen gelegt sein können, ist leicht zu vermeiden; dessto leichter weil den meisten Aphilothrixarten, welche ebenfalls langgestielte Eier legen, nicht wie der Kollariwespe im Oktober sondern im Frühling die Sorge für ihre Brut obliegt. Nur mit Aphilothrix gemmae * wäre Verwechselung möglich, da dieses Thier seine Galle nicht selten im Oktober verlässt, jedoch sucht diese Wespe blüthenführende Eichenknospen auf. Dryophanta

---

* Erzeugt Andricus pilosus.

divisa * und Neuroterus ostreus † schwärmen regelmässig im Oktober, doch legen sie sehr kurz gestielte Eier, die erstgenannte an die Oberfläche der höchsten, ganz jungen Blättchen geschlossener Eichenknospen, die zweite ins Cambium des Knospenringes. Die Eier aller dieser Thiere sind daher leicht kenntlich, und dieses gilt ebenfalls für einzelne kleinere Aphilothrixarten, wie A. solitaria § und A. albopunctata ** welche ihre Gallen im Herbst verlassen. Diejenigen Knospen welche meine Erwartung, es sollten sich darin Eier vorfinden, nicht getäuscht haben, waren von der nachfolgenden Herkunft. Zweien deren wurden bei der Nachsuchung mehrerer hunderten Eichenknospen angetroffen, welche ich von Zeit zu Zeit in einem Walde wo die Kollarigalle seit Jahren gemein war, während des Winters 1880—81 eingesammelt hatte. Angesichts der relativen Seltenheit der Kollarigalle, welche das Auffinden der Kollarieier beinahe unmöglich erscheinen lässt, muss bemerkt werden dass die Wespe, wie sich aus der Zählung der im Körper enthaltenen Eier ergibt, circa 800 Mal mehr Eier leggen kann als die Zahl der später zur Entwicklung kommenden Gallen beträgt.

Zweitens habe ich im Februar 1881 eine Knospe gefunden in welche ein Kollariei gelegt war. Die Knospe fand sich an einem Zweige, welcher im Oktober 1880 mit Kollariwespen in ein Gazenetz eingezwingert worden war, das Netz war niemals entfernt geworden, und die todten Thiere lagen im Februar noch darin. Da die Lage des Eies neben einer secundären Seitenknospe übereinstimmte mit der für die Entstehung der Kollarigalle geforderten Position, und der Eistiel gleiche Länge besass wie die Stiele der aus dem Körper der Kollariwespen genommenen Eier, so war die Möglichkeit einer Täuschung mit anderen Gallwespeneiern in diesem Falle ausgeschlossen, und ich zögere darum nicht das mit Hülfe des Prisma's angefertigte Bild des Präparates in Fig. 69 Taf. IV vorzuführen. Wie man sieht liegt zur genannten Zeit innerhalb der Eischale, der wenig entwickelte Larvenkörper (*Lk*); das Ei war in die Achsel des ersten Blättchens (*vb*) der secundären Knospe niedergelegt, nicht weit von dem Vegetationspunkt der letzteren entfernt, und der Eistiel (*Es*) durchsetzte theilweise die Basis dieser Knospe und verschwand im Blattstiel des Deckblättchens.

Weiter wurden bei sonnigem Wetter am 30 September 1881 durch eine Kollariwespe Eier gelegt in eine Knospe, welche an einem welkenden, im Zimmer aufbewahrten Eichenzweige sass; auch dabei lehrte die Untersuchung dass die

* Erzegt Spathegaster verrucosa.

† Erzeugt Neuroterus furunculus n. f., eine bisher unbeschriebene zweigeschlechtliche Generation.

§ Erzeugt, wie ich kürzlich gefunden habe, Spathegaster aprilinus.

** Pflanzt sich nur vermittelst Parthenogenesis fort.

Lage der Eier mit der für die Erklärung der Stellung der Galle am Zweige geforderten, genau übereinstimmte, denn auch hier lag jeder Eikörper neben einem Achselknöspchen und durchsetzte der Eistiel die Basis des Stiels des darunter befindlichen Knospenblättchens.

Endlich habe ich Kollarieier aufgefunden in Knospen, welche unter Wespen-einschliessenden Gazenetzten vorkamen, die ich im Oktober 1881 in einem benachbarten Walde über kränkliche, seit mehreren Jahren gallentragende Zweige gebunden hatte.

Auf Grund dieser verschiedenen Funde, und unter Bezugnahme auf die Stellungsverhältnisse der Kollarigalle am Zweige, bin ich zur sicheren Ueberzeugung gelangt dass Cynips kollari ausschliesslich nur parthenogenetische Fortpflanzung besitzt, dass sie mithin Gallen erzeugt, welche ihren eigenen Wohnungen ähnlich sind, und dass sie nicht, wie die meisten übrigen Eichengallwespen, mit einer zweigeschlechtlichen Generation abwechselt. Die Hauptgründe, welche zu diesem Schlusse führten waren in aller Kürze die Folgenden: Die Kollariwespe fängt gleich nach dem Ausschlüpfen aus den Gallen im September mit Eierlegen an, und die Galle zeigt sich im Mai sofort wenn die Knospen sich öffnen; die Lage der Eier innerhalb der Eichenknospen entspricht vollkommen derjenigen, welche für die Erklärung der Entwicklungsgeschichte sowie der Stellungsverhältnisse der Galle erheischt wird; und es findet sich unterhalb der Galle im Blattstiel ein Bohrloch in welchem bisweilen, ein Rest der Eischale zurückgeblieben ist.

Den directen Beweis beizubringen für die ausschliessliche Parthenogenesis der Cynips kollari durch Gartencultur ihrer Galle innerhalb geschlossener Gazenetze, gelang mir bisher nicht *, und es wäre eine vergebliche Arbeit die zahlreichen erfolglosen Versuchsreihen, welche ich seit dem Jahre 1877 jeden Herbst in dieser Beziehung angestellt habe, hier ausführlich zu beschreiben, nur sei noch betont, dass sich bei meinen Versuchen zwar niemals eine Kollarigalle, jedoch auch ebensowenig eine andere Gallenform gebildet hat. Die Ursache dieses Misslingens muss darin gesucht werden, dass die Wespen nur ausnahmsweise Eier legen wollten, wahrscheinlich weil die dargebotenen Eichenknospen den Thieren nicht zusprachen. Durch diese negativen Resultate wird zwar Nichts bewiesen, allein die Existenz einer Heterogenesis wird dadurch sehr unwahrscheinlich gemacht. Es gibt

* Nachträgliche Bemerkung, 28 Mai 1882. An zwei verschiedenen Eichenzweigen in meinem Garten, welche ich im Oktober 1881 mit Kollariwespen eingezwingert habe, finden sich gegenwärtig zwei junge stecknadelkopfgrosse Kollarigallen, die Zweige sitzen nahe am Stamme im tiefen Schatten. Durch dieses Versuchsresultat ist die Möglichkeit der Parthenogenesis der Cynips kollari erwiesen.

*

noch ein anderer Umstand, welcher das Vorkommen von ausschliesslicher Parthenogenesis bei Cynips kollari nahe legt, nämlich die Verwandtschaft dieser Gallwespe mit Aphilothrix albopunctata, A. quadrilineatus, A. seminationis und A. marginalis, von welchen sie sich nur durch unwichtige Merkmale wie Behaarung Farbe und Grösse unterscheidet und für welche, wie früher angeführt, von Adler gezeigt wurde, dass dieselben nur im weiblichen Geschlecht, ohne Generationswechsel fortexistiren.

Es gibt eine ganze Reihe von Gallen welche in Folge ihres Ursprunges aus der Basis einer secundären Seitenknospe, — sowie in ihrer anatomischen Structur und der ausserordentlich grossen Uebereinstimmung im Körperbau ihrer Bewohnerinen mit Cynips kollari, — der Kollarigalle so nahe stehen, dass ich mich gezwungen fühle für die Thiere selbst auch ein, mit demjenigen der Kollariwespe übereinstimmendes Geschlechtsverhältniss, also eine ununterbrochene Parthenogenesis ohne Alternation mit zweigeschlechtlichen Thieren anzunehmen. Dieses sind besonders die folgenden Arten: Cynips tinctoria, C. argentea, C. lignicola, C. glutinosa, C. coriaria, C. polycera und C. hungarica; wahrscheinlich, aber weniger sicher gehören auch Cynips galeata, C. amblycera, C. calycis und C. caput medusae hierher *.

Die grosse Verwandtschaft der Kollarigalle mit den genannten Formen, besonders mit Tinctoria, Argentea und Polycera geht noch daraus hervor, dass diese verschiedenen Bildungen mehr oder weniger die Neigung haben um ringsum ihre Narbe (*nb* Fig. 67 *β* Taf. IV) einen Kreis von Anhangsgebilden zu tragen, welche bei Polycera und Argentea gute Artmerkmale abgeben. Bei Kollari sind diese Auswüchse gewöhnlich nicht ausgebildet; wenn jedoch die Gallen frühzeitig von Inquilinen angegriffen werden, kommen dieselben bisweilen zu einer sehr ausgeprägten Entwicklung. Seltener sitzen sie auf gesunden Individuen; ein sehr regelmässiger Fall lag bei der Verfertigung der Figur 67 *β* vor, eine Krone von sieben Hügeln umgab, wie bei einer Argenteagalle die Gallennarbe; die Galle war im tiefen Schatten gewachsen, und besass eine goldgelbe Farbe, nur die Gallennarbe und die Auswüchse waren carminroth.

Die Wespen der verschiedenen hier in Besprechung gebrachten Gallen erscheinen gewöhnlich erst im nächsten Frühling. Wenn man dieses Factum in Verbindung bringt mit dem langsamen Entwicklungsgang der Gallen selbst, welcher den ganzen Sommer vom Mai bis September erheischt, so ist offenbar die Annahme einer ausschliesslich parthenogenetischen Fortpflanzung für diese Thiere unabweisbar, da die Zeit zur Einschiebung einer anderen Generation mangelt.

---

* Man vergleiche hierbei auch Mayr, *Die europäischen Arten der gallenbewohnenden Cynipiden*, Wien 1882, pag. 30.

§ 4. *Ueber besondere Stellungsverhältnisse der Kollarigalle.* Bisweilen sitzen in der Achsel eines einzigen Blattes zwei wohl ausgebildete Gallen gänzlich frei neben einander. Zwischen den beiden lässt sich ohne Schwierigkeit das Achselknöspchen auffinden, und eine genaue Betrachtung ihrer Befestigungsweise lehrt, dass sie sich aus zwei, einander diametral gegenüber liegendenden Partieen der Basis dieses Knöspchens entwickelt haben müssen. Auf der Rückenseite des Blattstiels, welcher sich unterhalb solcher Gallenpaare vorfindet, gelingt es in einzelnen Fallen zwei verschiedene, mit Wundkork verschlossene Narben aufzufinden, welche den beiden, zur Zeit des Eierlegens durch die Gallenmutter angefertigten Bohrlöchern, entsprechen.

Allgemeiner wie die Gallenpaare sind die Doppelgallen (δ Fig. 67 Taf. IV), welche in allen möglichen Gradationen, von der meist unvolkommenen Verwachsung, bis zu einem einzigen kuglichen Gebilde vorkommen. Hier müssen offenbar, wie bei den Gallenpaaren, zwei Eier in die Achsel des nämlichen Blattes gelegt worden sein, jedoch muss die Entfernung dazwischen so gering gewesen sein, dass die jungen Gallenanlagen sofort nach ihrer Entstehung gegenseitig in Contact getreten und mehr oder weniger vollkommen zusammengewachsen sind. Bei sehr vollkommener Verwachsung fliessen die beiden Gallen zu einer einzigen Kugel von der doppelten Grösse der einfachen Galle zusammen; darin sind die Larvenkammern zwar anfänglich, jedoch später nicht mehr vollständig von einander getrennt. Dabei scheinen die beiden Larven einander in ihrer Entwicklung zu beeinträchtigen, denn aus jeder der wenigen Doppelgallen dieser Natur welche mir vorlagen, habe ich nur eine einzelne kleine Wespe gezüchtet.

In einem einzigen Stücke habe ich den Fall aufgefunden, bei welchem drei Kollarigallen in der Achsel eines und desselben Blattes entstanden waren; zwei davon waren zu einer vollkommenen Doppelgalle kuglicher Gestalt verschmolzen, die dritte sass ganz frei, der Doppelgalle gegenüber auf der anderen Seite der Achselknospe.

Die von Inquilinen bewohnten Kollarigallen sind sehr häufig, insbesondere diejenigen welche die grosse Synergus reinhardi einschliessen. Die zahlreichen Larvenkammern dieses fremden Thieres sind radienartig um den Mittelpunkt angeordnet und die legitime Bewohnerin ist, sammt ihrer eigenen Kammer ganz verschwunden. Diese Gallen bleiben stets sehr klein, sie werden viel fester und härter wie die gesunden Exemplare und werden auch viel später reif; die Inquilinenlarven überwinteren in denselben und veränderen erst im nächsten Frühjahr in Wespen. Wenn die Doppelgallen Synergen einschliessen, kommt es gerade nicht selten vor, dass nur die eine Hälfte infizirt, die Widerhälfte dagegen gesund geblieben ist. In solchen Fallen kann man dann im September auf der Seitenfläche einer normalen und reifen Galle eine weit kleinere, ganz grüne, Synergen führ-

ende Bildung finden. Dieses scheint mir zu gleicher Zeit die Erklärung des Falles zu sein, welcher im Botanischen Jahresbericht von 1878 pag. 152 besprochen wird.

Wir haben früher gesehen, dass gewisse Gründe zum Schlusse berechtigen, die innere Natur der Knospe auf deren Basis eine Kollarigalle entstanden ist, sei durch die Gegenwart der letzteren nicht verändert. In einer Hinsicht hat es jedoch den Anschein dass diese Regel eine Ausnahme erlaubt. Es werden nämlich die kleinen Knospen neben den Gallen so oft von anderen Gallwespen zur Brutbesorgung gewählt, dass man versucht ist zu schliessen diese Thiere können daran mit ihren feinen Sinnen etwas Besonderes erkennen. Nicht nur die schon oben besprochenen Pilosuswespen sondern auch die Spätlinge der Aphilothrix radicis, werden durch die Nachbarschaft der Kollarigalle angeheimelt, legen in die kleinen Knospen zahlreiche Eier und veranlassen dadurch die Entstehung von Kurzsprossen, welche durch die, in Folge der Entwicklung der Radiciseier entstandenen Noduligallen, ganz missgestaltet werden.

§ 5. *Entstehung des Gallplastems und der Larvenkammer.* Die Kollarilarve ist im Februar, und wie ich auf Grund einer vereinzelten Beobachtung schliessen muss schon im Spätherbst innerhalb der Eischale ausgebildet (*Lk* Fig. 69 Taf. IV). Da zur Zeit liegt der Eikörper unmittelbar an die Basis des äusserst kleinen, noch vollstandig aus meristematischen Zellen bestehenden secundären Seitenknöpschens angepresst, nicht selten oberhalb eines der ersten Blättchen desselben und natürlich nahe beim Vegetationspunkt (*vp*). Am 8 Mai 1881 fand ich die Larve innerhalb einer ringsum verschlossenen Larvenkammer (*lk* Fig. 73 Taf. IV) vollständig im Plastem vergraben. Die verschiedenen zwischen diesen beiden Phasen eingeschaltenen Entwicklungsstadien stellen einen Umwallungsprocess dar gleich demjenigen, welchen wir schon mehrfach kennen lernten, und die schematischen Figuren 70—72 Taf. IV veranschaulichen diesen Vorgang. Das Ei ist dabei mit der Vorderseite des Seitenknöspchens in Contact gezeichnet und der Eistiel (*Es* Fig. 70) durchsetzt den Stiel (*bt*) des Knospenblättchens. Niemals habe ich eine Kollarigalle gefunden, welche genau auf der Hinterseite der Seitenknospe stünde, also der Knospenachse (*ka*) zugekehrt wäre, — da zur Stelle findet die Kollariwespe zum Eierlegen nicht Raum genug. Der Plastemwall, welcher sich aus der Knospenbasis erhebt (*gp* Fig. 71 und 72) presst die Larve aus ihrer Eischale, und diese wird wenn das Kamerloch sich über dem Thiere zusammenschliesst, in Folge des Zuwachses des Blattstiels aus dem Plastem losgerissen, sodass man selbst auf den jüngsten Gallenanlagen vergeblich darnach sucht. Dagegen lässt sich, wie zu erwarten war, der Eistiel bisweilen im Bohrloch des Blattstiels, selbst noch unterhalb Millimeter dicker Gallen nach-

weisen. — Während des ganzen Monates Mai ist das Wachsthum des Plastems ausserordentlich langsam; noch am 9 Juni fand ich Gallen von 0,5 mM. Höhe, welche vollständig aus meristematischen farblosen Zellen bestanden (Fig. 73 Taf. IV); die Gallennarbe (*nb*), das ist die Stelle wo sich das Kammerloch zusammengeschlossen hat, zeigte sich dabei als eine kleine Vertiefung in der äusseren Oberfläche; dieselbe ist stets mehr oder weniger deutlich unterhalb der Spitze der jungen Galle gelegen, da der Plastemwall sich nicht überall gleich schnell erhoben hat, sondern im unteren, aus dem Ringtheile des Knöspchens entstandenen Stücke im Wachsthum zurückgeblieben ist. Zu dieser Zeit beginnen jedoch die ersten Differenzirungen im Gallplastem sichtbar zu werden; die den Larvenkörper berührende, offenbar von der Epidermis der Nährpflanze herkünftige Zellenschicht erleidet die erste Veränderung, indem daraus durch Auftreten von viel Oel und Eiweiss Nahrungsgewebe (*ng* Fig. 73) entsteht. Aus den Epidermiszellen sprossen nunmehr (Fig. 74 Taf. IV) kurze, einzellige dickwandige, in ihrem Zellsaft ein rothes Pigment führende Haare hervor. Noch später färben sich die der Epidermis angrenzenden Zellen grünlich, und werden die zweite und dritte Zellschicht ausserhalb der Larvenkammer ebenfalls in Nahrungsgewebe umgewandelt. Da das Breitenwachsthum der jungen Galle während des ganzen Monates Juni in einem sehr vollständigen Gleichgewicht steht zu demjenigen der tragenden Knospe, ohne dass die Spitze der Galle sich dabei in entsprechendem Maasse aus der Knospenachse erhebt, erhält der Gallennabel eine beträchtliche Ausdehnung. Dadurch erklärt sich warum die sehr jungen Kollarigallen eine mehr weniger linsenartige Gestalt besitzen (Fig. 73 Taf. IV); wenn später das Wachsthum des Gallennabels bei demjenigen der eigentlichen Galle zurückbleibt, bildet sich erst die kurz gestielte kugeliche Form, welche in sehr vollkommenen Zusammenhang mit der Nährpflanze bleibt. Die Galle ist zwar eine abnorme Neubildung, allein, wäre die Larve nicht da um uns zu enttäuschen, so würden wir bei der Untersuchung ihrer Entwicklungsgeschichte stets wieder die Entstehung eines normalen Organes vor uns zu sehen glauben. Eine Kollarigalle ist ein besonderes Organ des Eichenbaumes, weder Wurzel, Stamm noch Blatt, sondern zu einer vierten selbständigen Categorie gehörig.

Bis Mitte Juni ist es leicht die Grenze zwischen Galle und Nährpflanze zu bestimmen, da diese Grenze durch eine Gewebeschicht kleiner kubischer Zellen angezeigt ist; später wird dieselbe in anderer Form sichtbar, indem sich an ihrer Stelle ein reich verzweigtes Gefässbündelnetz (*bn* Fig. 76 Taf. V) bildet; jedoch gelingt es nicht für jedes dieser Gefässbündel anzugeben ob es zur Galle oder zur Mutterpflanze gehörig sei. In der zweiten Hälfte des Monates Juni werden die Differenzirungen in den bis dahin nur zelligen Geweben der jungen Galle

sehr mannichfaltig und interessant. Wir wollen dieselben Schritt für Schritt weiter verfolgen.

§ 6. *Das primäre Gefässbündelsystem.* Im Monat Juni erreicht die Kollarigalle gewöhnlich keine grössere Höhe wie 3 mM. Untersucht man Querschnitte von Gallen, welche diese Dimension erreicht haben, so findet man dass sich im kleinzelligen Parenchym derselben 25 bis 30 Gefässbündel (*gb* Fig. 74*b* Taf. IV) differenzirt haben, welche in Ringlage um die Larvenkammer angeordnet sind. Längsschnitte (Fig. 74*a* Taf. IV) der Galle lehren, dass diese Bündel nicht alle eine gleiche Länge erreichen, sondern dass diejenigen derselben, welche dem Vegetationspunkt der Seitenknospe zugekehrt sind, in Uebereinstimmung mit der grösseren Ausdehnung, welche das Plastem hier erlangt hat ebenfalls am längsten sind. Dieser Längenunterschied der Gefässbündel ist derweise geregelt, dass ihre frei im Parenchym endenden Spitzen nahezu gleiche Entfernungen von der Narbe des Kamerloches (*nb* Fig. 74*a*), deren seitliche Lage in Beziehung zur Galle wir schon früher besprachen, innehalten. An dieser Stelle muss ich bemerken, dass die Längsschnitte der Kollarigalle, welche zu gleicher Zeit durch den Mittelpunkt des Nabels, die Narbe des Kammerloches und den Vegetationspunkt der Seitenknospe gehen, sehr verschiedene Winkel mit der Sprossache machen können. Diese Winkel werden offenbar durch die Stellung der Galle auf der Vorderseite oder der Seitenkante des Knöspchens bedingt. Vergleicht man in dieser Hinsicht die beiden Figuren 75 und 76 Taf. V mit einander, so sieht man, dass die erste die Längsache des Sprosses in sich aufnimmt, während die zweite zwar zur Galle an sich in übereinstimmender Weise orientirt ist, jedoch die Achse des Hauptsprosses unter einem schiefen Winkel schneidet. Sitzt die Galle in der Achsel eines der ersten Blätter der Seitenknospe, so wird auch dieses Blatt bei gewissen Schnitten zum Vorschein kommen können (*vb* Fig. 76 Taf. V). In Fig. 74*a* Taf. IV wurde die Galle und der Blattstiel (*bt*) durch den Schnitt der Länge nach getroffen, während die Sprossachse (*ka*) schief über die Quere geschnitten wurde; der Vegetationspunkt der Seitenknospe lag ausserhalb der Schnittfläche, doch wurde das Vorblatt (*vb*) unter der Galle halbirt. Nach dieser Abschweifung kehre ich wieder zu den Gefässbündeln zurück.

Im Monate Juli wird das primär aus dem Plastem entstandene Gefässbündelsystem durch wiederholte Verzweigung sehr komplizirt, und dazu kommt noch ein secundärer Zuwachs, welchen die Stränge erfahren vermittelst einer in der Nähe der Larvenkammer gebildeten meristematischen Zone, doch will ich diese secundäre Verlängerung vorläufig ausser Besprechung lassen. Am 30 Juni fand ich Entwicklungsstadien bei denen die Verzweigung der Bündel eben angefangen

war (*gb* Fig. 75 Taf. V); dieses findet zunächst in der Spitze der Galle, unweit der Gallennarbe statt. Sehr bemerkenswerth ist, dass die Larve zu dieser Zeit noch stets die kugeliche embryonale Gestalt besitzt, welche sie schon besass als ihre Einschliessung im Plastem zu Stande kam, und dass sie während der langen Zeit, welche seit dieser Umwallung vorbeigegangen ist, kaum grösser wurde. Aus den beigegebenen Figuren lässt sich die Grösse des Thieres leicht übersehen, da dasselbe die kugeliche Larvenkammer vollständig anfüllt, — mit jedem Punkte seiner Körperoberfläche das pflanzliche Gewebe berührt.

Die schnelle Vermehrung der Gefässbündelverzweigungen lehrt man am besten beurtheilen durch einen Vergleich der Fig. 75 mit der nur wenig älteren, in Figur 76 dargestellten Galle, welche eine Dicke von 6 mM. erreicht hat. Eine bestimmte Regelmässigkeit der Verzweigung lässt sich kaum darin nachweisen, nur hat es den Anschein, dass die meisten Zweige dem Gallencentrum zu oder abgekehrt sind; dieses findet weitere Bestätigung in Querschnitten (Fig. 77 Taf. V) der Galle, welche durch den Mittelpunkt der Larvenkammer gehen. Untersucht man die jungen Gallen dagegen an anderen Stellen, so findet man sowohl in der Richtung wie in der Stellung nur die grösstmögliche Unordnung. Dieses geht z. B. aus den Figuren 78 und 79 Taf. V hervor, welche nach Schnitten entworfen sind die der Nachbarschaft der Narbe entlehnt wurden und in welchen das Gewebe des Kammerloches (*lg* Fig. 79) ersichtlich war. Fragt man nach einem normalen Organe des Eichenbaums, dessen Organisation mit derjenigen der Kollarigallen zu vergleichen wäre, so scheint hier nur die Cupula der Eichel in Betracht gezogen werden zu können; jedoch ist die Lage der Gefässbündel in dieser, mit derjenigen der Cupularschuppen in Zusammenhang, wodurch eine Gesetzmässigkeit entsteht, welche in den Kollarigallen nicht erfindlich ist. Es muss bemerkt werden, dass die Gallen, welche die hier angegebenen Structurverhältnisse aufzeigen, vielfach Zweifel betreffs der primären oder secundären Natur der Gefässbündel übrig lassen; dieses ist leicht zu verstehen wenn man überlegt, dass die secundären Meristeme aus denen die weiteren secundären Bildungen hervorgehen, sich nur durch intensivere Zelltheilung vor ihrer Umgebung auszeichnen, dass die Zelltheilung jedoch noch nirgends vollständig erlöscht ist.

Betreffs der feineren Structur der Gefässbündel lehrt die mikroskopische Untersuchung, dass in den ringförmig angeordneten Bündeln der jüngeren Stadiën, ein einfach collateraler Bau vorliegt, wie in der Foliigalle, mit nach innen-, der Larvenkammer zugekehrtem, Spiral- und Netztracheïden führendem Xylem (*gb* Fig. 74*b* Taf. IV). Eine bestimmte Orientirung des Xylemtheiles, konnte ich in den später entstehenden Gefässbündelzweigen nicht mehr auffinden. Skle-

renchymfaserstränge werden hier ebensowenig, wie bei den übrigen Eichengallen angetroffen. Auffallend ist die grosse Dicke, welche die Gefässbündel schon in sehr jungen Gallen erreichen, und die besonders durch die beträchtliche Ausdehnung des Cambiforms verursacht wird; einigermaassen lässt dieses sich aus der Eiweissbedürfniss erklären, welche in jungen Gallen, worin soviel neues Protoplasma entsteht, ohne Zweifel sehr gross sein muss: so bald dagegen die Zelltheilung weniger intensiv, und das Wachsthum hauptsächlich durch Zelldehnung verursacht wird, verliert das Cambiform mehr und mehr seine Bedeutung, und wächst auch nicht gleichmässig mit der Galle weiter.

Hier scheint es mir der am meisten geeignete Ort zu sein *die Verbindung der Galle mit der Nährpflanze*, oder den anatomischen Bau des Gallennabels, zu beschreiben, da es besonders die Gefässbündel sind, welche dabei in Betracht kommen müssen. Eine klare Einsicht in die Natur dieser Verbindung, verleihen gut gelungene centrale Längsschnitte, von 3 bis 4 mM. hohen Gallen, welche median nach vorn in der Blattachsel sitzen (Fig. 75 Taf. V). Solche Gallen, welche noch eine carminrothe oder violette Farbe und eine kurzhaarige Oberfläche besitzen, lassen sich Ende Juni auffinden. Dieselben zeigen deutlich, dass das Gefässbündelsystem der Galle, so zu sagen eine Ausbiegung von demjenigen der Seitenknospe ist; jedoch ist dieser Vergleich nicht ganz richtig, denn die Gefässbündel der Galle enden unterhalb der Spitze frei im Parenchym. Wäre die Galle eine Seitenknospe, — und mit einer solchen lässt sie sich in vielen Hinsichten vergleichen, — so würde man sagen können, dass zwischen dem Zweige und der Galle, eine directe Markverbindung besteht, von einer ähnlichen Natur wie die Tragblattlücke, welche durch seitliches Ausbiegen des medianen Stranges unterhalb normaler Knospen auftritt. Auf Grund dieser eigenthümlichen Beziehung erscheint es begreiflich, dass wenn man eine reife, jedoch noch nicht vertrocknete Kollarigalle von dem Zweige bricht, zahlreiche Gefässbündel an ihrer Basis sichtbar werden, welche auf einer, mit der Spitze dem Zweige zugekehrten conischen Fläche radienartig angeordnet sind; jedoch begegnen die Bündel einander in der Spitze der Conus nicht, da dieselben schon unterhalb dieser Spitze seitlich ausbiegen und in die Nährpflanze eindringen.

Bekanntlich entstehen in den Tragblattlücken unterhalb der Eichenknospen sogenannte Ausfüllungsstränge *. Ein analoger Wachsthumsvorgang kommt im Monate Juli in dem Nabel der Kollarigalle zu Stande. An dieser Stelle bildet sich nämlich ein reich verzweigtes Gefässbündelnetz (*bn* Fig. 76 Taf. V), welches

* De Bary, *Vergleichende Anatomie*, 1877, pag. 320.

der Gallenbasis gewissermaassen den Bau eines Stengelknotens verleiht. In der Figur 80 Taf. V sieht man einen Horizontalschnitt des Gallennabels, welcher zu gleicher Zeit den Blattstiel (*bt*) und die Seitenknospe (*ks*) getroffen hat; die beiden letzteren liegen einander nahezu gegenüber, und zeigen dass die Galle in der Blattachsel median nach vorn stand, der Schnitt entspricht dem Niveau *80* Fig. 76 Taf. V. Diese Zeichnung wurde Anfang Juli 1881 aufgenommen und daraus ergibt sich, dass das Geflecht innerhalb des Gefässbündelringes zu jener Zeit noch ziemlich einfach ist. Von da an wird jedoch die Zahl und die Verwirrung der Bündelchen in der Gallenbasis ausserordentlich gross; irgend eine Regelmässigkeit darin zu erblicken gelang mir nicht.

§ 7. *Das primäre Nahrungsgewebe und die Krystallschicht.* So lange die Dicke der Galle noch nicht grösser ist als neun Millimeter, das heisst bis ungefähr Ende Juli, bleibt die Grösse der Kollarilarve nahezu stationär. Drei verschiedene Gewebeschichten, welche als das primäre Nahrungsgewebe (*ng* Fig. 75 Taf. V), die Krystallschicht (*kr* Fig. 75) und das primäre Stärkegewebe (*ps* Fig. 75) bezeichnet werden können, sind für die genannte Entwicklungsperiode characteristisch. Die beiden erstgenannten Gewebe mögen hier zunächst eine nähere Besprechung finden, und man wird gebeten dabei die Figur 81 Taf. V, welche der zwischen den beiden parallelen Linien eingeschlossenen Partie *81* der Figur 75 Taf. V entspricht zu vergleichen.

Das primäre Nahrungsgewebe haben wir schon früher (§ 5) kennen gelernt als eines der sich am frühesten aus dem Plastem differenzirenden Gewebe. Es bildet die innere Bekleidung der Larvenkammer und ist allseitig mit der Oberfläche des kuglichen Larvenkörpers in Berührung, welcher daraus wahrscheinlich durch Diffusionsvorgänge Nahrung schöpft. Im erwachsenen Zustand besteht dasselbe aus 7 bis 9 Zellschichten (*ng* Fig. 81 Taf. V rechts unten). Die Zellen sind leicht kenntlich an ihrem Inhalt, welcher aus trübkörnigem, grauem Protoplasma besteht, mit einem deutlichen, ein Kernkörperchen einschliessendem Kern. Bei der Behandlung mit Kupfervitriol und Kali zeigt das Gewebe die für Eiweissstoffe characteristische Violetfärbung; nach der Lösung feiner Querschnitte des Gewebes in Schwefelsäure bleiben unzählige Oeltröpfchen zurück. Wir haben mithin auch hier wieder das weitverbreitete Eiweiss-Oel-Gewebe vor uns, welches bei keiner Cynipidengalle vollständig fehlen möchte.

Die Krystallschicht (*kr* Fig. 81 Taf. V) bildet eine das Nahrungsgewebe einschliessende Kugelschale, welche ebenfalls eine Mächtigkeit von 7 bis 10 Zellschichten erreicht. Die Zellen dieser Schicht schliessen ohne Interzellularräume an einander; ihre Wände sind nicht verdickt, und ihr Lumen wird von einem

einzigen, unregelmässig polyedrischen Körper, welcher aus kleesaurem Kalk besteht, vollstandig in Anspruch genommen, wodurch das Ganze äusserlich mehr einer mineralischen Substanz, wie einem pflanzlichen Gewebe ähnlich sieht. In den weiter von der Larvenkammer entfernten Geweben der Galle finden sich stellenweise Zellen eingestreut, welche eine ähnliche Beschaffenheit wie die Krystallzellen besitzen, jedoch sind dieselben grösser und von den Krystallen nicht gänzlich angefüllt.

Zu Ende des Monates Juli wird das bis dahin so langsame Wachsthum der Larve ausserordentlich intensiv, und das gefrässige Thier verspeist dann in kurzer Zeit das primäre Nahrungsgewebe und die Krystallschicht vollständig. Am 25 Juli untersuchte ich den Mageninhalt des Thieres und fand darin die Krystallklumpen zurück; aus dem Vergleich mit dem Inhalt der nicht zerfressenen Krystallzellen, ergab sich, dass dieselben theilweise gelöst worden waren.

§ 8. *Das primäre Stärkegewebe und die Cambialzone.* Die äussere Oberfläche der Krystallschicht grenzt an ein sehr eigenthümliches, ebenfalls durch Differenzirung aus dem primitiven Plastem entstandenes Gewebe, welches ich oben als primäres Starkegewebe (*ps* Fig. 81 Taf. V) bezeichnet habe; zwar findet sich darin während längerer Zeit nur Protoplasma und Zellsaft, jedoch füllt dasselbe sich später dicht mit Stärkekörnchen an. Besonders die Zellwände dieses Gewebes sind characteristisch; dieselben sind stark verdickt, allein in so unregelmässiger Weise, dass überall Porenkanäle und dünne Stellen von beträchtlicher Grösse sichtbar bleiben. Die Zellen schliessen ohne Interzellularräume an einander, und da die Grenzen zwischen denselben auch nirgendwo anders wahrnehmbar sind, besitzt das Gewebe ein collenchymatisches Vorkommen. — Zur Untersuchung der Structur des primären Stärkegewebes eignen sich am besten junge lebendige Gallen von 2 bis 6 Millimeter Höhe, welche im Juni gesammelt werden können; sowohl Zellinhallt wie Zellwände sind bei älterem, in Spiritus aufbewahrtem Material, gelblich oder braun gefärbt, daher zur Untersuchung weniger geeignet.

Eine besondere Function der collenchymatischen Wandverdickung in diesen Zellschichten, weiss ich nicht anzugeben. Als Vertheidigungsmittel gegen den Angriff der Parasiten kann dieselbe schwerlich betrachtet werden, da die Gesammtdicke der 10 bis 12 Zellschichten woraus das Gewebe besteht, im Vergleich mit der Legeröhrenlänge der Feinde, verschwindend gering ist. Dazu kommt, dass die Zellwände auch nur eine geringe Festigkeit besitzen. Es will mir möglich erscheinen, dass in dem primären Stärkegewebe eine rudimentäre Gewebedifferenzirung vorliegt, welche in der Kollarigalle gegenwärtig im Verschwinden begriffen sein könnte, und als ein letzter Rest einer voreIterlichen pri-

mären Steinzellenschicht zu betrachten wäre, z. B. derjenigen analog, welche wir in der Foliigalle kennen lernten.

Die vierte besondere Gewebspartie, welche anscheinend ebenfalls durch primäre Plastemdifferenzirung entstanden ist, und sich unmittelbar ausserhalb des Stärkegewebes vorfindet, ist die Cambialzone (*cz* Fig. 81 Taf. V); die Grenze zwischen diesen beiden Geweben ist jedoch keine scharfe, sondern es finden sich alle möglichen Uebergänge zwischen ausgeprägten Stärkezellen und typischen Cambialzellen vor. Dieses ist darum besonders bemerkenswerth, weil das primäre Nahrungsgewebe und die Krystallschicht, so wie letztere und das Stärkegewebe ohne Vermittelung von Uebergangszellen an einander grenzen. — Die Cambialzone, deren totale Dicke in Gallen von 6 mM., nahezu der Gesammtdicke des Nahrungs-, Krystall- und Stärkegewebes gleichkommt, besteht aus zahlreichen Schichten dünnwandiger, saftreicher Zellen, zwischen welchen nur sehr kleine Interzellularräume offen bleiben. In den meisten dieser Zellen lassen sich Theilwände nachweisen, in jeder derselben einen Zellkern. Uebrigens besteht der Inhalt nur aus wenig Protoplasma und viel Zellsaft, in welchem kleine Körnchen verschiedener Natur vorkommen. In einzelnen, scharf von ihrer Umgebung verschiedenen Zellen, erblickt man einen Klumpen von kleesaurem Kalk; Protoplasma lässt sich in diesen krystallführenden Zellen ebensowenig wie Theilwände auffinden. Im Protoplasma zahlreicher normaler Cambialzellen liegen grosse runde Gerbstofftropfen, welche durch Eisenchlorid schwärzlich grün gefärbt werden.

Die Wirksamkeit des Cambialgewebes, welche besonders im Monat Juli bemerklich ist, ist eine sehr wichtige: sowohl in centripetale wie in centrifugale Richtung entstehen aus demselben neue Gewebe, nämlich das secundäre Stärkegewebe nach innen und ein Zuwachs der Gallenrinde nach aussen. Da die Zellen der Letzteren sich kaum von denjenigen der Cambialzone unterscheiden, und in den jüngeren Gallen ebenfalls Theilungen aufzeigen, welche jedoch viel weniger zahlreich sind wie in der genannten Zone, so lässt sich natürlich auch dieserseits keine scharfe Grenze für das meristematische Gewebe angeben; in der Fig. 77 Taf. V ist die ungefähre Ausdehnung desselben durch die Schattirung, welche sich ringsum das Stärkegewebe vorfindet, dargestelt; der primäre Gefässbündelring liegt in der äusseren Partie dieser Schattirung. Vergleicht man die relative Lage dieses Gefässbundelringes in Beziehung zu den übrigen Gewebe bei der sehr jungen Galle, mit der Stellung desselben in den älteren Individuen, so findet man, dass die Entfernung zwischen der Gallenoberfläche und den primären Gefässbündeln sich mehr vergrössert hat, wie diejenige zwischen der Larvenkammer und den Gefässbündeln; wahrscheinlich ist

dieses die Folge einer entsprechenden intensiveren Zelltheilung in der Aussenschicht der Cambialzone, wie in deren Innenschicht.

Ehe wir jedoch die in Folge dieser Zelltheilungen entstandenen secundären Gewebe näher betrachten, müssen wir feststellen auf welche Weise das primäre Rindengewebe und die Hautschicht, deren Ausdehnung offenbar mit dem inneren Zuwachs der Galle gleichen Schritt hält, sich vergrösseren.

§ 9. *Das Gerbstoffparenchym und die Hautgewebe.* Die jungen Kollarigallen besitzen, so lange ihre Höhe 3 bis 4 mM. noch nicht überschreitet, eine Epidermis (*ep* Fig. 81 Taf. V) deren Zellen einen rothen Zellsaft enthalten; zerstreut über der Oberfläche finden sich kurze einzellige Haare, welche man mit freiem Augen kaum bemerkt. Da das Wachsthum der Epidermis, sobald die Galle mehr als vier Millimeter Höhe erreicht hat erlöscht, werden schon im Juni zahlreiche kleine Krusten (*es* Fig. 77 Taf. V) äusserlich auf der Galle angetroffen; später werden diese vollständig abgestossen und die Galle erscheint dann vollkommen glatt; die violette Farbe geht dabei gänzlich verloren, und intensives Grün tritt an deren Stelle. Bei oberflächlicher Ueberlegung könnte man sich versucht fühlen das Fehlen von Spaltöffnungen bei der Kollarigalle mit dem Verlust der Epidermis in ursächlichem Zusammenhang zu bringen; eine solche Ansicht wäre jedoch übereilig, denn andere Thatsachen lehren, dass auch die Oberfläche von endogenen Organen z. B. Wurzeln, Spaltöffnungen aufzeigen kann. Auch gibt es vollständig endogene Gallen, wie z. B. die Sieboldigalle, bei welchen man leicht Spaltöffnungen findet; dagegen ist die Foliigalle welche eine ähnliche Entwickelungsgeschichte besitzt, wie wir früher gesehen haben, spaltöffnungsfrei.

Die zwei oder drei subepidermalen Zellschichten der Kollarigalle (*hd* Fig. 81 Taf. V) unterscheiden sich von dem tiefer gelegenen Gewebe durch ihre bleiche Farbe. Uebrigens sind die gesammten oberflächlichen Gewebe alle in reger Zelltheilung begriffen und bilden eine geschlossene meristematische Zone (*mr* Fig. 81), durch welche das tangentiale Oberflächenwachsthum der Galle verursacht wird, und auch in radiale Richtung neue Elemente, nämlich parenchymatische Rindenzellen und feine secundäre Gefässbündelzweige, erzeugt werden. Die Zellen dieses Hautmeristems sind sehr klein und zeigen in ihrem grünlichen Protoplasma einen deutlichen Kern. Dieselben bleiben sehr lange thätig, und ihr Wachsthum hört erst dann auf, wenn die Galle im Ganzen erwachsen ist. Dadurch erklärt sich das Nichtauftreten von Rissen in die Oberfläche der Kollarigalle, im Unterschied z. B. von der Aptera- und Radicisgalle der Eiche.

Das gesammte innerhalb des Hautmeristems angeordnete Rindenparenchym (*gr* Fig. 81 Taf. V) besteht in den 3 mM. grossen Gallen (Fig. 75 Taf. V),

aus ziemlich voluminösen, kernführenden saftreichen Zellen, welche nur kleine Interzellularräume offen lassen. Sie haben die Eigenschaft, welche übrigens auch der Cambialzone zukommt, sich in Berührung mit der Luft intensiv braun zu färben, wobei die Zellwände ein dunkeleres Colorit annehmen, wie der Zellinhalt. Die Zellen dieses Rindengewebes, wenigstens diejenigen (*tz* Fig. 83 Taf. V) deren Ursprung aus dem Hautmeristen (*mr* Fig. 83) nicht zweifellaft ist, führen zahlreiche Chlorophyllkörner und besitzen nicht unbeträchtlich verdickte Wände; sie bilden ein eigenthümliches Gewebe, welches in Folge seiner Entstehung und auf Grund seiner Lage unterhalb der „peridermartigen" Hautschicht, sich einigermaassen mit einem Phelloderm vergleichen lässt. Jedoch muss bemerkt werden, dass stellenweise in diesem „Phelloderm" secundäre Gefässbündeläste gebildet werden, welche sich als Zuwachs der peripherischen Verzweigungen des primären Gefässbündelsystems ergeben. Die Gallen welche sich für das Studium dieses Verhältnisses besonders eignen sind die centimeterdicken Exemplare (Fig. 82 Taf. V), welche man Mitte Juli finden kann; einem solchen wurde die Fig. 83 entlehnt.

Tiefer nach innen besteht die Rinde aus gerbstoffreichen, chlorophyllfreien Zellen, welche im August in Folge von Verzweigung und Vergrösserung ein Gewebe einer ausserordentlich lockeren und schwammigen Structur darstellen. Im Monat Juli fangen zwar die Interzellularräume sich zu bilden an, jedoch ist die Gerbstoffrinde da zur Zeit (*gr* Fig. 82) noch stets ein Gewebe von dichtem Gefüge. Die Dimensionen welche die Gerbstoffzellen zuletzt erreichen sind, im Vergleich mit der normalen Grösse der verschiedenen Zellformen des Eichenbaumes, wirklich riesenhaft.

§ 10. *Das secundäre Stärkegewebe und der Zuwachs der centralen Gefässbündelzweige.* Diese Neubildungen sind das Product der Cambialzone; das secundäre Stärkegewebe ist für die Kollarilarve sicher das wichtigste Gewebe der ganzen Galle, weil daraus das secundare Nahrungsgewebe, das ist die Hauptmasse ihrer Nahrung hervorgeht.

Das Stärkegewebe (*sg* Fig. 84 Taf. V) entsteht in centrifugale Richtung, dadurch dass die Theilungsproducte der Cambialzellen sich von innen nach aussen mit Stärke anfüllen. Da, wie früher angeführt wurde, das primäre Stärkegewebe in den jungen Gallen allmählich in die Cambialzone übergeht, ist es auch in den älteren Exemplaren nicht möglich eine scharfe Grenze zwischen primäres und secundäres Stärkegewebe aufzufinden, daher kann die punktirte Linie in Figur 82 diese Grenze nur annäherungsweise bezeichnen. In Figur 84 sieht man auf der Linkenseite secundäre Stärkezellen, welche dicht mit kleinen

Stärkekörnchen angefüllt sind (*sg*), rechts dagegen liegen die unveränderten Cambialzellen (*cz*) und in der Mitte der Figur die verschiedenen Uebergangsstufen. Die Stärkekörner erreichen allmählich eine beträchtliche Grösse (*sg* Fig. 86 Taf. V) und dadurch wird es schwierig den weiteren Inhalt der Amylumzellen zu beobachten. Da die sehr jungen Stärkezellen nur wenig Protoplasma dagegen sehr viel Zellsaft führen, muss letzterer verschwinden um für die Stärke Raum zu schaffen. Uebrigens lassen sich in den jungen Amylumzellen einzelne grosse Gerbstofftropfen nachweisen. Das totale Volumen, welches das Stärkegewebe zuletzt erreicht ist sehr beträchtlich, denn es bildet sich im Ganzen eine Kugelschale von 1.5 mM. Dicke bei einem äusseren Radius von 2.5 mM., welche ausschliesslich aus diesem Gewebe besteht.

Ehe die Bildung neuer Stärkezellen gänzlich erlischt, werden stellenweise procambiale Stränge (*pc* Fig. 84 Taf. V) in der Cambialzone sichtbar; die Richtung der Längsachse der Elemente dieser Stränge ist eine sehr genau radiale. An denjenigen Stellen, wo sich die Cambialzone in Procambium umwandelt, hört natürlich die Stärkebildung auf; da diese jedoch in der Umgebung der genannten Stellen noch längere Zeit fortgeht, erstrecken die Gefässbündelzweige ausgewachsener Gallen sich bis zu einer gewissen Tiefe in die Stärkeschicht. In ihrem feineren Bau scheinen diese Verzweigungen (*gb* Fig. 88 Taf. V) mit den Hauptstämmen der Gefässbündel (*gb* Fig. 81 Taf. V) übereinzustimmen.

§ 11. *Das secundäre Nahrungsgewebe.* Der wichtige Vorgang, nämlich die Entstehung des secundären Nahrungsgewebes, welchen mir nun zu beschreiben obliegt, findet besonders in der zweiten Hälfte von Juli statt. Die Gallen sind dann noch intensiv grün gefärbt, messen höchstens 2 cM. in Mittellinie und dehnen sich noch fortwährend aus; ihre Hautschicht ist noch nicht erhärtet und demzufolge das Ganze nur wenig widerstandsfähig. Der Vorgang besteht in der Hauptsache darin, dass die gesammten Stärkezellen sich allmählich in Oel- und Eiweiss-führende Zellen umbilden. Die Veränderungen im Zelleninhalt, welche ich während dieses Ueberganges mikroskopisch verfolgen konnte will ich nun beschreiben.

Zur Zeit wenn die Larve, welche anfänglich so ausserordentlich langsam wächst, sich schnell zu vergrösseren anfängt, verändert die innere Structur der Galle sehr schnell. Das primäre Nahrungsgewebe und die Krystallschicht werden zernagt und verspeist, und die Larvenkammer erhält dadurch eine unregelmässige Gestalt. Zu gleicher Zeit mit dieser mehr äusserlichen Veränderung fängt die Umwandlung des Inhaltes der Stärkezellen an, welche ebenfalls ziemlich rasch von Statten geht. In der Fig. 85 Taf. V findet man eine Larvenkammer

abgebildet, zu einer Zeit wenn die Gewebezerstörung nur noch eine geringe Ausdehnung erlangt hatte. Zufälligerweise war eine Partie des primären Nahrungsgewebes in Tact geblieben (*ng*) und dieses hatte einen sehr merklichen Einfluss auf die Ausdehnung des secundären Nahrungsgewebes ausgeübt. Es ist nämlich in der genannten Figur durch eine punktirte Linie die Grenze bezeichnet zwischen dem unveränderten Stärkegewebe (*sg*) und dem neuenstandenen Nahrungsgewebe (*sn*), beide Gewebe unterscheiden sich scharf von einander. Nun ist es klar, dass die Lage dieser Linie bestimmt wird durch das noch unversehrt gebliebene primäre Nahrungsgewebe, sowie die damit verbundene Krystallschicht: es hat den Anschein, als ob die zuletzt genannten Gewebe eine schützende Wirkung auf das Stärkegewebe ausüben, dessen Umbildung besonders in der Nachbarschaft der Larve rege ist.

Eine kleine Partie (*86* Fig. 85) des in Umwandlung begriffenen Gewebes findet man in der Fig. 86 Taf. V gesondert dargestellt; man sieht darin sowohl ganz unveränderte Stärkezellen, wie auch fertige secundäre Nahrungszellen, und die Uebergänge zu den Letzteren. Die secundären Nahrungszellen stimmen mit den primären vielfach überein, jedoch unterscheiden sie sich davon, dadurch, dass in der Mitte ihres Oel- und Eiweiss-reichen Inhaltes ein *brauner Körper* vorkommt, da jede Zelle einen solchen braunen Körper einschliesst, erhält das secundäre Nahrungsgewebe dadurch bei schwacher Vergrösserung ein eigenthümliches, feinpunktirtes Vorkommen. Lacaze Duthiers * hat diese Körper schon gesehen und belegte dieselben mit dem Namen „corps roux". In den ursprünglichen Stärkezellen lässt sich davon noch keine Spur entdecken, sodass die Entstehung der braunen Körper offenbar mit dem Verschwinden der Stärke und dem Auftreten des Oels, oder möglicherweise des Eiweisses, zusammenhängt. Unter ähnlichen Umständen wie die hier beschriebenen, treten bei einer ganzen Reihe von Cynipidengallen, wie z. B. die Globuli-, Gemmae-, Numismatis-, Laeviusculus-, Lenticularisgalle etc., „braune Körper" in die Nahrungszellen auf. Die eigentliche Natur derselben konnte ich bisher noch nicht sicher ermitteln. Bei ihrer ersten Entstehung sieht man schwach braun gefärbte Stellen, ohne scharfe Begrenzung, im körnigen Zellinhalt zwischen den Stärkekörnern; später individualisiren diese Stellen sich deutlicher, und nehmen dabei eine intensivere Farbe an. Bei der Erwärmung mit Kaliumhydroxyd schwellen sie etwas an, und es wird dann eine dünne unregelmässige Schale (α und β Fig. 87 Taf. V) sichtbar, welche nicht selten aufplatzt (γ), in Folge dessen der Inhalt als dickliche Masse theil-

* *Recherches pour servir à l'histoire des Galles,* Annal. d. sc. nat. Bot., 1853.

weise austritt. In Salpetersäure sind sie ziemlich leicht löslich, in Schwefelsäure erst nach vorhergehender Einwirkung von Kali. In gewissen Hinsichten erinnern sie an die Krystallklumpen der Krystallschicht, welche aus kleesaurem Kalk bestehen, doch lassen sie sich damit nicht identifiziren.

Bei der Entstehung der „braunen Körper" in den Stärkezellen, erleidet das Amylum eine ähnliche Veränderung, wie bei der Keimung vieler stärkeführender Samen. Die Auflösung der Körner beginnt von innen, demzufolge entsteht an Stelle des Kernfleckes ein sternförmiger Raum (Fig. 86 Taf. V), welcher sich allmählich vergrössert, bis zum vollständigen Verschwinden des ganzen Kornes. — Dass bei diesem Lösungsprocesse eine Fermentwirkung stattfindet, ist kaum zu bezweifeln, ob sich dabei jedoch sofort Oel bildet ist gewiss sehr zweifelhaft. Da es mir möglich erschien, dass Traubenzücker als Zwischenproduct auftreten möchte, habe ich sowohl im Nahrungsgewebe der Kollarigalle, wie bei einigen anderen Formen, diesen Stoff mit Hülfe der Fehlingschen Lösung nachzuweisen versucht, jedoch immer vergebens.

In Bezug auf die Herkunft des Eiweisses im Nahrungsgewebe sind die Verhältnisse ebensowenig aufgeklärt. Im primären Nahrungsgewebe lässt dieser Körper sich leichter nachweisen, wie im secundären; da die Gegenwart der Stärke die Eiweissreaction im Stärkegewebe sicher beeinträchtigt, möglicherweise gänzlich verdeckt, bleibt es unsicher, ob das Eiweiss, welches erst im secundären Nahrungsgewebe nachweisbar ist, wirklich erst darin von aussen hereintritt, oder schon vorher in anderer Form gegenwärtig sei.

Es ist klar, dass die Umwandlungen im Stärkegewebe der Kollarigalle vielfach mit den analogen Vorgängen bei der Folii und der Lenticularisgalle übereinstimmen; jedoch gibt es ein eigenthümlicher Unterschied, welcher darin besteht, dass in den Nahrungsgeweben der Kollarigalle keine Zellenvergrösserung zu Stande kommt, während diese, in so ausgedehntem Maasse, bei den beiden anderen genannten Gallen stattfindet.

§ 12. *Weitere secundäre Veränderungen.* Es bleibt mir nun noch übrig die Bildung des Steinzellengewebes kurz zu erörteren, welche besonders im August, nachdem die Galle sich zu vergrösseren aufgehört hat, stattfindet, und wodurch eine Innengalle von beträchtlicher Festigkeit entsteht. — Dieser Process ist sehr einfacher Natur, und kennzeichnet sich durch eine Wandverdickung in denjenigen Zellschichten, welche das secundäre Nahrungsgewebe unmittelbar berühren, und, welche entweder zu dem, aus der Cambialzone entstandenen Dauergewebe gehören, oder als Producte der Zelltheilung dieser Cambialzone müssen betrachtet werden. In der Fig. 88 Taf. V findet man ein Anfangsstadium des

Vorganges dargestellt; der Larvenkammer zugekehrt, bei *sn*, sieht man einige secundäre Nahrungszellen mit einem oder zwei „braunen Körpern"; daran grenzen mehrere isodiametrische Zellen mit beginnender Wandverdickung. Noch weiter nach aussen besitzen die sich verdickenden Zellen eine in radiale Richtung verlängerte Gestalt, und diese Verlängerung wird um so beträchtlicher, je weiter die Zellen vom Mittelpunkt entfernt liegen; das früher (§ 1) genannte prismatische Steinzellengewebe entsteht aus diesen verlängerten Zellen. Sowohl die isodiametrischen, wie die prismatischen Steinzellen, sind mit schönen, sehr regelmässig angeordneten Tüpfeln und Tüpfelkanälen geziert. — In vielen dieser dickwandigen Zellen liegen kleine Krystalle von kleesaurem Kalk; die grossen, wohl ausgebildeten Krystallindividuen nehmen jede für sich eine besondere Zelle in Anspruch, welche sich durch ihre sich nicht verdickende Wand auszeichnet. An anderen Stellen ist die Continuität der dickwandigen Gewebeschichten durch radiale Gefässbündelzweige (*gb* Fig. 88 Taf. V) unterbrochen.

§ 13. *Résumé*. Es scheint mir geeignet die verschiedenen Vorgänge, welche ich bei der Entwicklung der Kollarigalle beobachtet habe, noch einmal in gedrängter Kürze zusammenzustellen.

Sofort nach dem Ausschlüpfen im Oktober sucht die Kollariwespe kleine und schwache Grosstriebknospen (Macroblaste), vorzugsweise an kränklichen Eichenzweigen, auf. Sie legt darin einige Eier, derweise, dass die Eikörper (*Ek* Fig. 70 Taf. IV) neben den kleinen secundären Seitenknöspchen (*ks*) in die Blattachseln der Knospenblättchen zu liegen kommen; die Eistiele (*Es*) finden sich in dem feinen Bohrkanal des Blattstielchens (*bt*) unter dem Seitenknöspchen.

Die Larvenbildung innerhalb der Eischale findet wahrscheinlich schon im Herbst, sicher vor Februar statt; die Plastembildung beginnt im Frühling *. Das Plastem entsteht aus der Basis des Knöspchens. Am 9 Juni fand ich die Larve vollständig umwallt und die Larvenkammer allseitig abgeschlossen (Fig. 73 Taf. IV). Die Narbe des Kammerloches (*nb* Fig. 73) liegt immer seitlich auf der Oberfläche der jungen Galle unterhalb ihrer Spitze. Das oberhalb der Narbe befindliche Gewebe stirbt im Juli, und demzufolge findet man auf den reifen Gallen ein kleines Höckerchen (*nb* Fig. 67), an dessen Basis die Narbe gelegen ist.

Die jungen Gallen, welche 2 bis 3 mM. dick sind, haben den folgenden Bau. Im Centrum liegt die Larvenkammer (*lk* Fig. 75 Taf. V). Diese ist zunächst von dem primären Nahrungsgewebe eingeschlossen, welches aus Eiweiss- und

---

* So ist es wenigstens in Niederland; FRANK sagt (*Handbuch der Pflanzenkrankheiten*, II, p. 773), dass die Kollarigalle schon im Herbst entsteht.

*

Oel-führenden Zellen besteht (*ng* Fig. 81 Taf. V). Weiter nach aussen liegt die Krystallschicht (*kr* Fig. 81 Taf. V). Dann folgt das primäre Stärkegewebe (*ps* Fig. 81 Taf. V) welches aus einer Kugelschale stärkeführender Zellen mit collenchymatischer Wandverdickung besteht. Im Saftparenchym der Gallenrinde (*gr* Fig. 75 Taf. V) liegen die einfach collateralen primären Gefässbundel (*gb* Fig. 74 Taf. IV) in Ringlage angeordnet. Ausserhalb des primären Stärkegewebes entsteht ein meristematisches Gewebe, welches als Cambialzone (*cz* Fig. 76 Taf. V) bezeichnet werden kann, und worin sich der primäre Gefässbündelring vorfindet.

Anfang Juli wenn die Galle c. a. 6 mM. Dicke erreicht hat, findet sich in derselben ein sehr complizirtes Gefässbundelsystem (Fig. 76 Taf. V), anscheinend durch Verzweigung der primären Bündel entstanden. Die nach innen aus der Cambialzone gebildeten Zellen beginnen sich da zur Zeit mit Stärke zu füllen (*sg* Fig. 84 Taf. V), und verwandelen demzufolge in secundäres Stärkegewebe (*sg* Fig. 76 Taf. V). An der Gallenoberfläche entsteht ein meristematisches Gewebe (*mr* Fig. 81 Taf. V), welches eine gleichmässige Ausdehnung der Hautgewebe ermöglicht.

Mitte Juli findet man Gallen von 10 mM. Dicke (Fig. 82 Taf. V), dieselben haben ihre Epidermis gänzlich abgeworfen und besitzen ein intensiv grünes Hautgewebe. — Bis tief im Monate Juli bleibt die Kollarilarve sehr klein und kugelrund, und die verschiedenen Gewebezonen, welche die Larvenkammer bekleiden und einschliessen bleiben bis dahin alle in Tact. Das secundäre Stärkegewebe ist zur genannten Zeit erwachsen.

Am Ende Juli und in August kann man die centralen Gewebe der Kollarigalle, welche dann eine Dicke von 2 Cm. erreicht, nicht alle mehr zurückfinden, da die schnellwachsende Larve dieselben zernagt und verspeist (Fig. 85 Taf. V). Das Stärkegewebe (*sg* Fig. 86 Taf. V) wird von da an in secundäres Nahrungsgewebe (*sn* Fig. 86 Taf. V) umgewandelt, dadurch, dass die Stärke gelöst wird, und an deren Stelle Oel auftritt. Auch Eiweiss lässt sich im secundären Nahrungsgewebe nachweisen. Bei dieser Umwandlung entsteht in jeder Zelle ein eigenthümlicher brauner Körper (Fig. 86 und 87 Taf. V), dessen Natur noch zweifelhaft ist.

Eine letzte Gewebeveränderung besteht in der Ausbildung einer Steinzellen bekleidung (*ss* Fig. 88 Taf. V), auf der Aussenseite des Nahrungsgewebes. Die Larve, welche das letztere weiter und weiter zernagt, stiesst zuletzt auf dieses Steinzellengewebe, welches von da an die directe Bekleidung der Larvenkammer darstellt. Inzwischen ist das Thier erwachsen und verändert Ende August in eine Nympfpuppe.

Meine Beschreibung der Kollarigalle lässt sich, wahrscheinlich gänzlich unverändert, auf die Gallnüsse der Apotheken (Cynips tinctoria) übertragen.

KAPITEL VIII.

DIE ORTHOSPINAEGALLE *.

Taf. VI Fig. 89—100.

§ 1. *Allgemeines über die Cynipidengallen unserer Rosen* Von den in Niederland heimischen Rosenarten tragen, für so weit mir bekannt, nur Rosa canina, R. rubiginosa und R. pimpinellifolia bisweilen Cynipidengallen. An den beiden erstgenannten Arten findet man nicht selten die Gallen der Gallwespen Rhodites rosae und R. eglanteriae, seltener diejenigen von Rhodites rosarum und R. orthospinae †. Von diesen ist die letztgenannte möglicherweise in neuerer Zeit aus Nord-Amerika zu uns gekommen, und möchte dann mit Rhodites bicolor HARRIS identisch sein; jedenfalls sind die Orthospinae- und Bicolorgalle einander äusserst ähnlich. Wäre das schöne Gebilde zur Zeit als HARTIG über Gallwespen schrieb schon in Deutschland gewesen, so hätte es schwerlich der Aufmerksamkeit eines solchen Beobachters entgehen können. Da mir aber keine ausführliche Beschreibung der amerikanischen Rhoditesarten zu Diensten steht, kann ich diese Angelegenheit nicht sicher entscheiden.

An Rosa pimpinellifolia bildet Rhodites spinosissimae in unseren Dünen eine sehr hübsche Galle, welche, nach anderen Angaben, ebenfalls an Rosa canina vorkommt. — Diese fünf verschiedenen Gallen habe ich im lebenden Zustand untersuchen können, und überdies die Rosae- und Orthospinaegalle in zahlreichen Exemplaren in meinem Garten cultivirt, und deren Entwicklungsgeschichte Schritt für Schritt verfolgt. Durch Zergliederung sehr junger Individuen gelang es mir zu zeigen, dass diese Entwicklungsgeschichte nicht nur bei den beiden letztgenannten Formen, sondern auch bei den drei übrigen in der Hauptsache übereinstimmt. Dieses erklärt sich besonders aus dem Umstande, dass die Lage der Eier, welche die Entstehung der Gallen bedingen, in allen Fällen eine ähnliche ist; es legen nämlich die Gallwespen, ihre Eier stets an die *Oberfläche* wachsender.

---

* Bewohnt von Rhodites orthospinae m. Dieses Insect ist möglicherweise nicht verschieden von Rhodites mayri SCHLECHTENDAL (Jahresbericht des Vereins für Naturkunde zu Zwickau, 1876, p. 59), und von Rhodites bicolor HARRIS. Da Dr. VON SCHLECHTENDAL die Güte hatte meine Wespen zu untersuchen, dieselben jedoch nicht sicher für identisch mit Rhodites mayri erklären konnte, obschon die Uebereinstimmung mit dieser Species sehr gross ist, so meinte ich vorläufig einen neuen Namen für meine Galle annehmen zu müssen.

† Kürzlich habe ich die Eglanteriaegalle in den Holländischen Dünen an Rosa pimpinellifolia angetroffen; und man unterrichtet mich, dass hier in Gelderland an angepflanzten Stöcken dieser Rose, Bedeguare (Rhodites rosae) gefunden worden sind.

Organe der Rosen, und nicht, wie dieses gewöhnlich vermuthet wird, ins Innern der gallenerzeugenden Gewebe. Freilich haben die Rhoditesweibchen eine sehr lange Legeröhre (Fig. 90 Taf. VI) und gebrauchen dieselbe um ihre Eier tief in die Rosenknospen hineinzubringen, wobei sie durch mehrere Blättchen und Nebenblätter quer hinstechen; die feinen dadurch entstandenen Verwundungen stehen jedoch mit der eigentlichen Gallbildung in keiner Beziehung, denn diese findet nur Statt aus den engumschriebenen, von den Eikörpern berührten Gewebepartieën, welche beim Eierlegen vollständig unversehrt geblieben sind. Das Schema der Entwicklungsgeschichte der angeführten Rosengallen ist demzufolge das nämliche, wie bei der Baccarumgalle der Eiche (Fig. 30 Taf. II).

In Uebereinstimmung mit dieser Entwicklungsweise geben die verschiedenen Gewebe der Blatt- oder Stengelorgane, welche Rosengallen tragen, ohne Ausnahme continuirlich in die Gewebe der Galle selbst über (Fig. 100 Taf. VI), und sind nicht, wie dieses bei zahlreichen anderen Gallen der Eiche der Fall ist, nur mit inneren Gewegruppen verbunden. Demzufolge gehören die Rosengallen, selbst dann, wenn dieselben erst im Spätsommer an den Rosenblättern sichtbar werden, — wie dieses vielfach bei der Eglanteriaegalle beobachtet werden kann, — mit den Frühlingsgallen der Eiche, wie die Baccarum-, Albipes-, Vesicatrix-, Tricolor-, Curvatorgalle zu einer einzigen Gruppe. — Verfolgt man die feineren entwicklungsgeschichtlichen Détails, so findet man beim Vergleich der verschiedenen Rosengallen unter sich, sehr interessante Verschiedenheiten, auf welche ich bei einer anderen Gelegenheit zurückzukommen hoffe.

Die Rhoditeslarven überwinteren, wie es scheint, immer in ihren Gallen, auch wenn diese sich schon im Anfang des Sommers an den Rosenblättern zeigen. Die Rosae-, Orthospinae- und viele Stücke der Spinosissimaegalle verharren bis zum nächsten Frühjahr an ihrer Nährpflanze, jedoch sterben sie vor dem Anfang des Winters und finden sich demnach als todte, braune Korper an den entblätterten Zweigen. — Dagegen lösen die Eglanteriae- und Rosarumgalle sich von den Blättern, und die eingeschlosenen Larven überwinteren in ihren abgestorbenen, zu Boden liegendenden Wohnungen. Die Zeit des Ausschlüpfens der Wespen ist ausserordentlich verschieden; besonders gilt dieses für Rhodites eglanteriae, und daraus erklärt sich, dass man beinahe während des ganzen Sommers junge Gallen dieser Art auffinden kann.

§ 2. *Beschreibung und Vorkommen der Orthospinaegalle.* In mancher Hinsicht steht die Orthospinaegalle, der Galle von Rhodites spinosissimae sehr nahe. Wie diese an Rosa pimpinellifolia, findet jene sich an den verschiedensten Organen von Rosa canina und R. rubiginosa; Blättchen, Blattstielchen, Blattspin-

deln, Nebenblätter, Kelchblätter und Blüthenboden können einzelne Gallen tragen, oder in Klumpen von mehreren Gallen umgewandelt werden. Unter Umständen können dabei auch Kronenblätter, Staubfäden und Fruchtblätter sich an der Gallbildung betheiligen. Was ein einzelnes Kelchblatt in dieser Beziehung leisten kann ist wahrhaft erstaunlich. In der Figur 89 Taf. VI sieht man rechts oben eine Blüthe, deren Blumenkrone abgefallen ist, während zwei Kelchblätter, die von dem normalgebliebenen Receptaculum getragen werden, zur Gallbildung Veranlassung gegeben haben; die Galle ist mit breiter Basis auf dem Rande des Receptaculums befestigt und die ganze Blüthe ist durch die Wucht des Productes der zwei Kelchzipfel niedergebogen. Bekanntlich sind die Kelchblätter der Rosen oft gefiedert und an den einzelnen Fiederchen kann man bisweilen einkammerige, kugelige Gallen von 5 mM. Mittellinie finden.

Die einfachen, nur eine Larvenkammer einschliessenden Gallenindividuen finden sich jedoch gewöhnlich an den Blättern vor (Fig. 89), und können dann eine Dicke von 10 bis 15 mM. erreichen. Sie erheben sich beiderseits gleichmässig über der Ober- und Unterseite der Blattspreite, und dabei ist der gürtelförmige Nabel (Fig. 100 Taf. VI) gewöhnlich mehr weniger eingeschnürt. Da die Galle unter günstigen Bedingungen noch längere Zeit fortwächst, wenn die Blätter sich nicht mehr vergrösseren, entstehen zuletzt, in der aus der ebenen Fläche gedrängten Blattspreite, ringsum die Galle, viele spaltenartige Risse, welche in Folge der Unterbrechung der nahrunganführenden Bahnen, die weitere Ausdehnung der Galle verhinderen.

Die Oberfläche der Orthospinaegalle ist mit geraden Dornen dicht bewachsen; diese besitzen eine ähnliche Structur, wie die Anhänge der Früchte von Rosa pomifera, und werden ihrer ganzen Länge nach von einem einzigen unverzweigten Gefässbündel durchsetzt. Finden sich die Gallen an Rosa canina, so ist die Oberfläche zwischen den Dornen glatt, dagegen bei den an Rosa rubiginosa vorkommenden Exemplaren deutlich mit einzelligen Haaren besetzt. — Die Farbe der jungen Gallen ist weisslich mit rothem Anflug; ältere Gallen sind dagegen grün.

Die meisten Orthospinaegallen kommen in vielkammerigen Körpern vor, welche aus mehreren, mit einander verschmolzenen einfachen Individuen bestehen. Diese Körper können sowohl aus einzelnen Blättern als aus ganzen Knospen hervorgehen, und es sind vor Allem die Blüthenknospen, welche dieser Umwandlung besonders oft unterliegen, da die Orthospinaewespe dieselben beim Eierlegen bevorzugt. Solche, durch Blüthenumbildung entstandene Gallen zeigen eine ausserordentliche Formverschiedenheit. Am schönsten und lehrreichsten sind diejenigen Fälle, in welchen die ganze Blüthe in eine complexe scheibenförmige Galle verwandelt ist; das ganze, unter normalen Bedingungen concave Receptaculum, ist dabei

in Folge eines excessiven Wachsthums der Innenseite zu einer platten Fläche geworden, welche jedoch stets in der Mitte eine Vertiefung beibehält. Die übrigen Blüthentheile tragen das ihrige bei zur Verdickung der Scheibe, da dieselben, nur mit Ausnahme ihrer Spitzen, welche sich gänzlich normal ausbilden können, in Gallsubstanz umgewandelt werden. Jedoch betheiligen die Staubbeutel und die Griffel sich an dem Gallenwachsthum nicht, und veränderen gewöhnlich in kleine grüne, spitzige Erhabenheiten, welche sich bei reifen Gallen in der obengenannten Vertiefung vorfinden. Die fünf Kelchzipfel und Kronenblätter sitzen dagegen auf dem breiten Rande der Galle, als soviele grüne und rothe Anhänge.

Ende Juni beginnt die Galle äusserlich an den Rosenzweigen sichtbar zu werden; im Juli und August erreicht sie ihre definitive Grösse, welche 5 bis 7 cM. betragen kann. — Seit dem Jahre 1876 ist mir die Galle aus der Betuwe bekannt, wo sie zerstreut aber nicht sehr selten vorkommt; später habe ich dieselbe ebenfalls in der Provinz Utrecht, sowie in der Veluwe aufgefunden.

§ 3. *Parthenogenesis der Orthospinaewespe; eigene Culturen ihrer Galle im Garten.* Während der ganzen Dauer des Monates Mai, und selbst noch Anfang Juni, verlassen die Orthospinaewespen ihre Gallen. Die Thiere sind den Bedeguarwespen (Rhodites rosae) sehr ähnlich nur, etwas grösser. Die Weibchen beider Arten sind schwarz mit theilweise roth gefärbtem Hinterkörper, jedoch sind die Farben der Orthospinaeweibchen intensiver, wie bei Rhodites rosae. Die Männchen sind bei dieser wie bei jener Art vollständig schwarz und dadurch, so wie durch ihre Kleinheit, in Bezug auf welche dieselben bei den Weibchen weit zurückstehen, leicht kenntlich. Auf mehrerern hunderten Weibchen zählte ich bei der Orthospinaewespe eine fünfzahl Männchen, sodass die Geschlechtsverhältnisse in dieser Beziehung mit denjenigen der Rhoditis rosae, bei welcher Art ADLER 7 Männchen auf 664 Weibchen zählte * übereinstimmen. — Auf die nahe Verwandtschaft der Orthospinaewespe mit Rhodites mayri habe ich schon oben hingewiesen, hier will ich noch bemerken, das Dr. SCHLECHTENDAL, als er diese Art aufstellte, die Männchen derselben noch nicht aufgefunden hatte.

Nachdem die Mehrheit der legitimen Bewohner ihre Galle verlassen hat, kriecht die Inquiline Aulax brandtii † aus der Letzteren heraus. Dieses Thierchen ist in den beiden Geschlechtern schwarz, und hat dadurch einige Aehnlichkeit mit den Rhoditesmännchen, welchen es auch in Bezug auf die geringe Körpergrösse

* Deutsche entomologische Zeitschrift, 1877, p. 209.

† BRANDT und RATZEBURG, *Medicinische Zoölogie*, Bd. II, 1833, pag. 151.

entspricht, jedoch lassen sich diese beiden Thiere sehr leicht durch das Adernetz ihrer Flügel von einander unterscheiden. Aulax brandtii, sowie ein gewisser Parasit, sind sehr verderbliche Feinde der Orthospinaewespe, und bedingen ohne Zweifel die relative Seltenheit der Galle. Besonders die Parasiten (Torymus) sind ausserordentlich schädlich, da sie zum Theil schon zu Ende des ersten Sommers die Galle verlassen, und dann sofort Eier in die Larvenkammern der sich zur Ueberwinterung anschickenden Rhoditeslarven legen; die im nächsten Frühjahre auskriechenden Parasiten können dann wieder die neue Rhoditesgeneration infectiren, welche demnach dem Angriff zweier Parasitengenerationen ausgesetzt ist.

Um die Orthospinaegalle künstlich in meinem Garten zu cultiviren, habe ich die Wespen in Gazenetze gebracht und diese über Sträucher von Rosa canina und R. rubiginosa gebunden. Ich habe dabei die Erfahrung gesammelt, dass nicht jede individuelle Pflanze sich gleich gut für den Versuch eignet, sondern an einzelnen Exemplaren von Rosa canina haben sich gar keine Gallen gebildet. Ich würde diese Erfahrung, welche natürlich nur auf eine beschränkte Reihe von Experimenten basirt ist, hier nicht erwähnt haben, wäre es nicht, dass auch Dr. ADLER Aehnliches für Rhodites rosae angibt.

Wegen der Seltenheit der Männchen gelingt es ohne Schwierigkeit die Weibchen vollständig zu isoliren. Bringt man die Weibchen, welche ihren Gallen eben entschlüpft sind, und sicher nicht befruchtet sein können, unter die Gazenetze und schliesst diese sofort, so findet nichtsdesstoweniger das Eierlegen sehr regelmässig statt und es entwickeln sich später in den Netzen schöne Gallen. Die aus solchen Gallen gezüchteten, parthenogetisch erzeugten Wespen, habe ich im nächsten Jahre auf's Neue für Culturversuche verwenden können. Die parthenogenetische Fortpflanzung der Orthospinaewespe ist hierdurch sicher gestellt; wahrscheinlich ist die männliche Generation im Verschwinden begriffen, und die Orthospinaewespe auf dem Wege, nur im weiblichen Geschlechte weiter zu existeren, was bei der Kollariwespe der Eiche schon zur Wirklichkeit geworden ist. Zwar muss ich bemerken, dass in mehreren Fällen, wenn ich ein Männchen bei den Weibchen in die Netze gebracht hatte, die Gallenausbeute ausserordentlich reichlich war; jedoch könnte dieses zufälligerweise verursacht worden sein, in Folge besonderer Fähigkeit der benutzten individuellen Pflanzen für Gallbildung, sodass noch keine genügende Veranlassung besteht, auf eine, bisweilen stattfindende Befruchtung zu schliessen.

Die künstliche Cultur der Galle geschieht desshalb besonders leicht, weil man im Frühling, während mehrerer Wochen, eierlegende Weibchen zur Disposition haben kann; wenn an den Sprossen in welche die Wespen Ende Mai Eier ge-

legt haben, die jungen Gallen sich schon zu zeigen beginnen, kriechen aus den aufbewahrten alten Gallen noch fortwährend neue Wespen heraus. Fürchtete ich dass an einem Strauch die Culturen misslungen waren, so konnte ich mithin die schon verwendeten Sprosse auf's Neue dem Stich der Wespen anheimstellen. An einem und demselben Sprosse, zwei über einander liegende Etagen von Orthospinaegallen zu erzeugen — ein Versuch welcher bei den Bedeguaren leicht ausführbar ist — gelingt jedoch nicht, oder nur unvollkommen, weil in den normalen Fällen die ganze Sprossspitze in eine vielkammerige Galle umgebildet wird, und dan natürlich nicht weiter wächst. Dass dieses letztere bei den Bedeguaren wohl möglich ist, erklärt sich daraus, dass diese Galle ausschliesslich aus Blättern entsteht, ohne dass dabei der Vegetationspunkt der Knospe irgend welche Veränderung erleidet. Warum dennoch die Bedeguare so oft terminal an den Sprossen sitzen, werde ich weiter unten noch kurz erörteren.

Mit dem Zwecke das Betragen meiner Orthospinaewespen genauer kennen zu lernen, habe ich die Thiere ihre Arbeit wiederholt an abgeschnittenen Zweigen in meinem Zimmer verrichten lassen; anscheinend ging dieses völlig normal vor sich, und die Sprossknospen enthielten bei späterer Untersuchung zahlreiche Eier. Die Leichtigkeit der Ausführung dieser Versuche veranlasste mich den Thieren ausser Rosa canina und R. rubiginosa, einige andere Rosenarten dar zu bieten; dabei beobachtete ich zu wiederholten Malen, dass die Eier in die Sprossknospen von sogenannten „Multifloren" * gelegt wurden. Als im Frühling 1881 die Orthospinaewespen mir in sehr grosser Anzahl zu Diensten standen, habe ich eine ganze Reihe von Versuchen angestellt ihre Galle an den Multifloren zu erzeugen. Obschon die Versuchsanstellung auf verschiedene Weisen variirt, und Wochen lang ununterbrochen fortgesetzt wurde, habe ich in keinem Falle auch nur die geringste Spur von Gallbildung beobachten können. Eine gewöhnliche Ursache des Absterbens der in Rosenknospen gelegten Rhoditeseier, welche also vielfach zum Ausbleiben der Gallbildung veranlasst, besteht darin, dass der sich schnell verlängernde Trieb, seine Blätter entfaltet bevor die Eier im Gallplastem eingewachsen sind, dieselben werden dadurch der freien Luft ausgesetzt und vertrocknen. Mit Sicherheit kann ich behaupten, dass darin jedoch nicht die Erklärung des Misslingens der Gallencultur an den Multifloren liegen kann, denn um das Vertrocknen vorzubeugen habe ich vielfach Versuche angestellt mit Rosensprossen, welche unter Bechergläser gebracht waren, ohne dabei von der Pflanze getrennt zu werden, jedoch immer vergebens. — Meine Experimente mit Rosa cinnamomea waren ebenfalls erfolglos.

* Eine in den niederländischen Baumschulen verwendete Unterlage für Edelrosen, wie ich glaube die chinesische Rosa multiflora THUNBERG.

Es würde interessant sein zu wissen, wie diejenigen Rosenarten, welche der Rosa canina und R. rubiginosa näher stehen wie die von mir benutzten Formen, sich in Beziehung auf die Gallbildung seitens der Rhoditeswespen verhalten. Solche Versuche scheinen besonders desshalb Aussicht auf Gelingen zu versprechen, weil sich in der Literatur schon Angaben vorfinden in Bezug auf das Vorkommen von Rhoditesgallen an gewissen Rosen, welche gewöhnlich von den Rhoditeswespen nicht besucht werden. So hat z. B. RATZEBURG den Bedeguar an Rosa sepium angetroffen, und HAYNE fand diese Galle sehr selten an Rosa villosa bei Tegel. *

§ 4. *Structur des Legeapparates und des Eies.* Wenn die Orthospinaewespen sich zum Eierlegen anschicken, suchen sie sich eine geeignete, kräftig wachsende Triebknospe, wo möglich mit eingeschlossenen Blüthenknospen, nehmen sich jedoch nöthigenfalls auch gewöhnlicher Blattknospen an. Die Thiere kehren den Kopf nach unten, ergreifen mit ihren Fusskrallen die Nebenblätter und Blattränder, und senken ihre Legeröhre bis tief in die saftigen Gewebe der Knospe hinein. Da die Länge der Legeröhre grösser ist wie die halbe Dicke der Knospe, wäre es möglich, dass die Knospenachse erreicht und angebohrt würde, jedoch habe ich gefunden, dass dieses nicht geschieht, und auch nicht geschehen darf, wenn die Gallbildung regelmässig stattfinden soll: das Thier bewegt seine Legeröhre nur zwischen den Blättern der Knospe und legt seine Eier an die Oberfläche derselben nieder; die Stichwunde ist mithin nur auf die äusseren Blätter der Knospe beschränkt, und wird nur, mit dem Zwecke die inneren jungen Organe zu erreichen, angebracht, dagegen werden diese letzteren in keinerlei Weise verwundet.

Bevor ich übergehe zur genaueren Beschreibung der Lage der Eier innerhalb der Knospe, will ich einige Worte über die Structur des Legeapparates vorausschicken. Zwar entspricht diese Structur im Allgemeinen derjenigen, welche wir bei Aulax hieracii, so wie bei den Eichencynipiden kennen lernten, und schliesst sich besonders nahe den bei Aulax obwaltenden Verhältnissen an, bietet jedoch auch im Vergleich mit letzterer Gattung einige Unterschiede dar. — Dass die Schienenrinne (*Sr* Fig. 90 *A* Taf. VI) mit der oblongen Platte (*Op*) ein einziges Stück darstellt, ist hier, wie bei den übrigen Gallwespen, sehr leicht zu

* Medicinische Zoölogie, II, pag. 148. — Im vergangenen Sommer ist es mir gelungen in meinem Garten sehr schöne Orthospinaegallen an der sibirischen Rosa acicularis (unter diesem Namen bezog ich die Pflanze aus einer Baumschule) zu erzeugen. Dagegen gelang dieses an der nahe verwandten Rosa rugosa durchaus nicht.

*

beobachten; dazu ist bei Rhodites auch der, sonst so schwierig sichtbare Zusammenhang zwischen den Stechborsten (*Sb* Fig. 90 *B* Taf. VI) und der Winkelplatte (*Wp* Fig. 90 *B*) besonders klar. Um diese Beziehungen besser zu zeigen, wurde in der Fig. 90 die oblonge Platte mit der Schienenrinne, gesondert von den übrigen Theilen gezeichnet, und zwar in der Weise, dass die natürliche Lage der Theile wieder erhalten wird, wenn die oblonge Platte (*Op* Fig. 90 *A*) mit sich selbst parallel, so lange verschoben wird, bis die sich daran vorfindende Gelenkfläche (*gl*) den Gelenkkopf (*cp*) der Winkelplatte (*Wp* Fig. 90 *B*) berührt. — Die bei einigen Cynipiden leicht wahrnehmbare Chitinverbindung zwischen den *beiden* Winkelplatten ist hier weniger deutlich. — Die quadratische Platte (*Qp* Fig. 90 *B* Taf. VI) ist von sehr eigenthümlicher Form; dieselbe besteht aus einem breiten äusseren Theile, welcher mittelst eines feinen und kurzen Chitinbandes scharnierenartig mit dem schmalen, mehr nach innen gelegenen Theile verbunden ist; — letzterer ist bei *g*, mittelst eines Gelenkes, mit der Winkelplatte (*Wp* Fig. 90 *B*) in Zusammenhang.

Die Rhodites- und Aulaxeier besitzen eine grosse Formähnlichkeit, besonders in Folge der cylindrischen Gestalt der Eikörper (*Ek* Fig. 90 *C* Taf. VI und *Ek* Fig. 4 *B* Taf. I), jedoch sind die Rhoditeseier relativ länger gestielt (*Es* Fig. 90 *C* Taf. VI); auch im Verhältniss zur Länge der Legeröhre, welche sie passiren müssen, haben sie eine grössere Dimension, wie bei den übrigen von mir untersuchten Cynipiden; die Eistiele scheinen mithin weniger elastisch zu sein. — Dem Eistiel gegenüber, findet man am Eikörper der Rhoditeseier eine Masse einer eigenthümlichen, klebrigen Substanz, welche ich mit dem Namen Kittmasse (*Km* Fig. 90 *C* und Fig. 90 *D*) bezeichnen will, und welche dazu dient die Eier an die Rosenblätter zu verkleben (*Km* Fig. 95 Taf. VI). Diese Kittmasse findet sich schon an den, noch in den Ovarien eingeschlossenen Eiern, kann demnach nicht als eine Ausscheidung der sogenannten „Giftblase" während des Eierlegens, aufgefasst werden. — Der Inhalt des Eikörpers ist hier, wie bei den übrigen Cynipiden, ein trübkörniges Protoplasma.

§ 5. *Die Lage der Eier in der Rosenknospe.* Obschon, wie ich früher schon (§ 2) ausdrücklich hervorhob, die grössten und schönsten Orthospinaegallen aus Blüthenknospen entstehen, habe ich jedoch bei den weiterhin vorzuführenden Beschreibungen, nicht auf diese, sondern nur auf gewöhnliche Sprossknospen Rücksicht genommen. Dazu veranlasste mich der Umstand, dass die entwicklungsgeschichtlichen Verhältnisse der Gallen, welche aus Blüthenknospen hervorgehen, vollständig mit denjenigen der aus Blattknospen entstehenden übereinstimmen, jedoch sehr schwierig übersichtlich abgebildet werden können. Dieses

gilt besonders für die allerersten Phasen der Gallbildung; beziehen dieselben sich auf die Receptacula der Blüthen, so ist es, in Folge der Gegenwart der zahlreichen, behaarten Carpelle, nur möglich nach der Ausführung einer sehr sorgfältigen Präparation, lehrreiche Bilder zu erhalten; dagegen wickelt der Process der Gallbildung sich in den Blattknospen so übersichtlich und einfach ab, dass die Zerlegung einer solchen Knospe unter dem Präparirmikroskop, zur Beobachtung der wichtigeren Détails vollständig ausreicht; die Fig. 91 Taf. VI wurde nach einer solchen Vorbereitung gezeichnet.

Ehe wir die Lage der Eier innerhalb der Knospe näher ins Auge fassen, scheint es wünschenswerth einige Bemerkungen über die Structur der letzteren vorangehen zu lassen; es können dabei die geschlossenen Winterknospen ausser Betracht bleiben, da die Rhoditeswespen ausschiesslich offene Sommerknospen zum Eierlegen erwählen. — Bekanntlich besitzen die einfach gefiederten, fünfreihig angeordneten Rosenblätter, zwei grosse Nebenblätter mit drüsig-gezähnten Rändern. Die Blättchen sind in der Knospenlage ihren Mittelnerven entlang mitten durchgefalten, dergestalt, dass die Untererseiten der Spreitenhälften einander dabei berühren; die Mittelnerven der Blättchen sind sowohl unter einander, als mit dem allgemeinen Blattstiele nahezu parallel, und jedes Blättchen wird von dem nächst unteren theilweise gedeckt, — ein bei den Dicotylen, im Gegensatz zu den Farnen, beinahe ausnahmsloses Verhältniss. Auf Grund dieses Umstandes, so wie in Folge der anfänglichen Kürze der Blattspindel, welche sich erst beim Oeffnen der Knospen beträchtlich verlängert, sind die Blättchen fächerartig angeordnet und kehren ihre Mittelnerven, für so weit der Raum dieses gestattet, nach aussen. Denkt man sich die Seitenränder der gefaltenen Rosenblättchen derweise mit einander verwachsen, dass sie zusammen eine einzige einfache Blattspreite darstellen, so würde dadurch offenbar ein Blatt mit der, bei dem Eichenblatt beschriebenen (Fig. 32 Taf. II) Vernation entstehen. — Die Zähne der Fiederblättchen tragen gewöhnlich (nicht immer) an ihrer Spitze eine carminrothe Drüse, welche aus grossen Zellen besteht deren Lumen von einem kernführenden Protoplasten angefüllt ist, der, wie bei den gefärbten Drüsen überhaupt, zugleich Träger des Farbstoffes ist; ähnliche Drüsen werden auch, besonders bei Rosa rubiginosa, auf anderen Theilen der Blattspreite gefunden. Die Drüsen scheiden eine dickliche schleimige Substanz aus, welche man als glänzende Tröpfchen auf den Blattzähnen antrifft. Ausser diesen Drüsen trägt die Epidermis der Rosenblätter lange einzellige Haare, und auf der Rückenseite der Mittelrippe zurückgekrümmte Dornen.

Gehen wir, nach dieser Abschweifung, zur Betrachtung der Lage der Orthospinaeeier innerhalb der Rosenknospe über. — Wir haben schon gesehen, dass

die Orthospinaewespe ihre Legeröhre quer durch zahlreiche ältere Blätter der Knospe sticht, und die Spitze jenes Werkzeuges zwischen die jüngeren, inneren Blättchen bringt, an deren Oberfläche sie ihre Eier mit Hülfe der Kittmasse festklebt, ohne dabei diese Blättchen auf irgend eine Weise zu verwunden. Findet das Thier Ruhe bei seiner Arbeit, so beschäftigt es sich mehrere Stunden mit der nämlichen Knospe und legt darin zahlreiche Eier. Wenn, wie dieses öfters geschieht, zwei verschiedene Wespen ihre Eier in eine einzige Knospe bringen, können alle jüngeren Blättchen, sowie auch die Knospenachse mit Eiern belegt werden, in Folge dessen dann später die mächtigen vielkammerigen, knollenartigen Gallen entstehen. Fur das Eierlegen der Bedeguarwespe (Rhodites rosae) ist das hier Gesagte ebenfalls zutreffend, jedoch habe ich niemals Eier dieses Thieres mit der Knospenachse selbst in Berührung gefunden, und glaube das dieses immer vermieden wird, die Bedeguare also, ausschiesslich Blattbildungen sind.

In Fig. 91 Taf. VI findet man eine Abbildung der inneren und oberen Partie einer Blattknospe mit Orthospinaeeieren, nach der Entfernung der äusseren Blätter. Wie man sieht sind die Eier, sowohl mit der Mittelrippe der Blättchen, als mit der Unterfläche der Letzteren verklebt, und sie berühren diese Blättchen nur mittelst der Kittmasse (*Km* Fig. 92 Taf. VI) welche sich am Ende des Eikörpers vorfindet; die Eistiele liegen gänzlich frei innerhalb der Knospe, büssen jedoch sehr leicht, in Folge von Verklebung mit den wachsenden Blättchen einen Theil ihrer ausserordentlichen Länge ein. Letzteres war auch im Präparate, nach welchem die Figur 91 angefertigt wurde, geschehen, wie aus dem Vergleich mit *Es* Fig. 90 *C* hervorgeht. Gewöhnlich ist die Anordnung der Eier auf den Blättern nicht besonders regelmässig, bisweilen ist dieses jedoch wohl der Fall; so sieht man in der Figur 95 eine ganze Reihe von Eiern — mit schon weit vorgeschrittener Embryobildung (*Lk*) innerhalb der Eischale — deren jedes für sich auf der Spitze eines Blattzahnes (*bz*) ruht; der untere Eipol ist in der Kittmasse (*Km*) theilweise versenkt, und durch diese vom pflanzlichen Gewebe getrennt. Die meisten Eier, welche ich innerhalb der Knospen beobachtet habe, waren zufolge der eigenthümlichen Knospenlage und Fältelung der Blättchen, entweder mit dem Rande derselben, oder in der Nähe des Randes mit der Rückenseite der Blättchen verklebt, und es fiel mir dabei auf, dass die Längsachse der Eikörper immer einen Spitzen, nach oben geöffneten Winkel mit dem tragenden Organe macht. — Es ist selbstverständlich, dass man, da die Orthospinaeeier sehr oft mit den Nebenblättern verklebt sind, auch an diesen, Gallbildung beobachten kann.

§ 6. *Hemmender Einfluss der Orthospinaeeier auf das Blattwachsthum.* Bei meinen zahlreichen Versuchen mit der Orthospinaewespe, bemerkte ich oft, dass aus gewissen Knospen, in welche die Eier unter anscheinend günstigen Bedingungen gelegt waren, keine Gallen hervorgingen. Gewöhnlich musste die Ursache dieser Erscheinung, in Uebereinstimmung mit dem früher Gesagten, darin gesucht werden, dass die Knospen, durch eine zu schnelle Verlängerung der Knospenachse die noch nicht vollständig im Plastem eingeschlossenen Eier, mit der freien Luft in Berührung brachten, und demzufolge zum Vertrocknen derselben Veranlassung gaben. Aus dem Umstande, dass die in die Blüthenknospen gelegten Eier, diesem Uebelstand natürlich nicht ausgesetzt sein können, erklärt die Vorliebe der Orthospinaewespen für diese Knospenform sich ungezwungen. In anderen Fällen könnte jedoch das Austrocknen der Eier nicht die unmittelbare Ursache des Misslingens der Gallbildung sein, nämlich dann wenn eine schnelle Verlängerung nicht eintrat. Es ergab sich, dass die Erscheinung in solchen Fällen auf eine eigenthümliche, durch die Rhoditeseier auf das Blattwachsthum ausgeübte Wirkung beruhen kann. Ich fand nämlich oft, wenn keine Gallbildung stattgefunden hatte, dass ganze Blättchen in ihrer Entwicklung theilweise oder vollständig unterdrückt, und dabei zu bräunlichen Körpern eingeschrumpft waren, an welchen sich bei schwacher Vergrösserung leicht die vertrockneten, hellglänzenden Eischalen und Eistiele auffinden liessen. Dass die Ursache dieser Erscheinung wirklich in den Rhoditeseiern zu suchen war, ergab sich aus dem Verhalten gewisser Blättchen an deren einen Spreitenhälfte Rhoditeseier verklebt waren, während die andere Hälfte nicht mit Eiern belegt war (Fig. 93 Taf. VI); jene Hälfte war dabei vollständig fehlgeschlagen, diese dagegen zur normalen Ausbildung gelangt. Auf welche Weise dieser wachsthumshemmende Einfluss, welcher gewissermaassen an die analoge Wirkung der Cynipidenlarven auf das Plastem während der Umwallung erinnert, zu Stande kommt, bleibt vorläufig eine offene Frage. Besonders desshalb scheint mir der Vorgang noch räthselhaft, weil ich in vereinzelten Fällen Blätter gefunden habe, welche sich den Rhoditeseieren gegenüber, so zu sagen ganz gleichgültig verhielten, das heisst weder Gallplastem erzeugten, noch auf irgend eine andere Weise eine Störung ihres Wachsthums aufzeigten, — innerhalb der Eischalen hatte dabei die Larvenbildung sehr regelmässig stattgefunden. Ich habe dieses jedoch nur selten beobachtet, und weiss nicht sicher, welche spätere Zustände daraus würden entstehen können. Möglicherweise üben die Larven in solchen Fällen ihre Wirkung auf die Pflanze später aus wie gewöhnlich, wenn also die Reactionsfähigkeit der Letzteren schon etwas veringert ist, und es möchten dann, in Folge dessen, die lebenslang sehr kleinen Gallen erzeugt

werden können, welche bisweilen in vereinzelten Exemplaren auf den Rosenblättern angetroffen werden. *

Es sei mir erlaubt hier noch einige Bemerkungen betreffs des Wachsthums der Bedeguare (Rhodites rosae) einzuschalten, für so weit dabei ähnliche Verhältnisse, wie die oben Besprochenen in Betracht kommen. — Diese Galle entsteht, wie schon früher angeführt, ausschliesslich aus Blättern; behauptet dieselbe eine terminale Stellung am Zweige, so ist sie nicht selten von einem schönen Blätterschopf gekrönt; die nicht terminalen Gallen bilden gewöhnlich einen geschlossenen Ring um den Stengel, jedoch ersetzen die kleineren Gallen einzelne Blätter oder Blättchen. Die geschlossenen Ringe und die „terminalen" Gallen entstehen gewöhnlich aus vier bis fünf Blättern, zwischen welchen die Stengelinternodien kurz geblieben, und etwas über das gewöhnliche Maass verdickt sind. Der Einfluss des Gallwuchses auf das Stengelwachsthum entspricht in diesem Falle, bezüglich des Resultates, offenbar der Wirkung, welche bei den normalen Bildungsvorgängen die Entstehung einer Blattrosette veranlasst. Factisch findet bei der Rose das Letztere statt, wenn die geschlossene Winterknospe entsteht, nämlich im knospenschuppentragenden Ringtheile derselben. — Die Blätter, welche sich an der Gallbildung betheiligen, werden stets von stark verholzten, jedoch nicht in Gallsubstanz umgewandelten Blattstielen von beträchtlicher Länge getragen, in Folge dessen die Gallenthiere, so wie die jungen Gallen, offenbar ziemlich weit von dem Stengeltheile des Zweiges entfernt sind. Da man sich schwierig irgend eine direct vom Gallenthiere herrührende Wirkung auf die Nährpflanze, in einer so beträchtlichem Entfernung denken kann, möchte man berechtigt sein zu schliessen, dass die Wachsthumshemmung der Stengelinternodien in den Rosaegallen, auf veränderte Nahrungsverhältnisse zurückzuführen ist. Auch die Verholzung der Blattstiele, welche die in Gallen umgewandelten Blattspreiten tragen, muss wahrscheinlich auf eine ähnliche Weise erklärt werden. Jedoch lässt sich das Fehlschlagen der Rosenblätter unter dem Einfluss der Orthospinaeeier, welches in vielen Hinsichten eine ähnliche Erscheinung ist, durchaus nicht einer solchen Erklärungsweise unterordnen.

§ 7. *Ausbildung der Larve innerhalb der Eischale.* In Eiern, welche am 14 Mai 1881 gelegt waren, fand ich zehn Tage später Larven, die schon Körperringe und deutliche Chitinkiefer besassen, welche jedoch entweder noch gar nicht (Fig. 95 Taf. VI) oder höchstens halbwegs (*Lk* Fig. 94 Taf. VI) einge-

* Bei meinen diesjährigen vergeblichen Versuchen, Bedeguare an Rosa pimpinellifolia zu erzeugen, sah ich die jungen Sprossspitzen verschrumpfen, absterben und braun werden, zufolge der intensiven Wirkung der Rhoditeseier.

schlossen waren. Jedenfalls geht aber bei der Orthospinaewespe die Larvenbildung der Gallbildung voraus, in der Weise, dass die Letztere erst anfängt, wenn die, an ihrer zelligen Structur leicht kenntlichen Keimblätter am Larvenkörper, schon vollständig ausgebildet sind; sind die beiden Processe einmal begonnen, so halten sie weiterhin gleichen Schritt. Optische Längsschnitte der Eier eignen sich Ende Mai und Anfang Juni, schon bei 120-facher Vergrösserung, vorzüglich zur Beobachtung des Baues, des nur von der durchsichtigen Eischale eingeschlossenen Thieres (Fig. 96 Taf. VI). Eine ausführliche Beschreibung von dem was sich dabei wahrnehmen lässt, will ich jedoch an dieser Stelle nicht zu geben versuchen, da diese Angelegenheit für die Kenntniss des Vorganges der Gallbildung nur nebensächlieh ist; überdies stellt die Literatur der Entwicklungsgeschichte der Insecten dem Nichtspecialforscher grosse Schwierigkeiten bei der Erklärung des Gesehenen gegenüber, sodass es mir wenigstens nicht gelingen wollte, die Objecte, welche ich untersuchte, nach den von CLAUS, GRABER und BOBRETZKY gegebenen Regeln zurecht zu legen. Jedoch seien die folgenden Bemerkungen in Bezug auf meine Figuren gestattet.

Sobald die Körperform der Larve innerhalb der Eischale kenntlich wird, ergibt sich, dass das Kopfende des Thieres dem Eistiele zugekehrt ist. Zu dieser Zeit besteht die ganze Körperoberfläche aus einer einfachen Zellenschicht, wahrscheinlich das Ektoderm (*Et* Fig. 96 Taf. VI), welches von dem sehr dünnen Faltenhautblatt oder der Embryonalhaut (*Am* Fig. 97 Taf. VI) allseitig eingeschlossen ist. Innerhalb der erstgenannten Zellenschicht findet sich zwar der Nahrungsdotter (*Nd* Fig. 96 Taf. VI), allein zwischen diesem und jener liegt noch ein eigenthümliches Gewebe (*Ms* Fig. 96 und 97 Taf. VI) in welchem sich stellenweise eine zellige Structur nachweisen lässt, und welches dem Meso- und Endoderm entsprechen möchte. Die Anlage der Mundöffnung (*Os* Fig. 96 Taf. VI) entsteht, wie schon bemerkt am oberen Eipole, mithin von dem Gallplastem (*gp* Fig. 96) abgewendet. Während die Zellstructur in den äusseren Schichten des Körpers noch deutlich sichtbar ist, wird die Segmentirung am Leibe des Thieres schon überall bemerklich und auch die Chitinkiefer zeigen sich dann an den Kopfsegmenten in der Gestalt einer Kreuzförmigen, aus vier Stäbchen zusammengesetzten Figur. Der Nahrungsdotter ist, lange nachdem die Thiere schon vollständig innerhalb der Galle beschlossen liegen, noch aufzufinden, wird jedoch allmählich kleiner und schwindet zuletzt gänzlich.

Hinsichtlich der ebengenannten und mehrerer anderer Besonderheiten, z. B. in Bezug auf die längliche Körperform, stimmen die Rhoditesembryonen mit denen von Aulax hieracii überein. Anderseits schliessen dieselben sich mehr den Larven der Eichencynipiden an, z. B. darin, dass jene wie diese passiv, in Folge des Druckes

seitens des Gallplastems, ihre Eischale verlassen, während die Larven von Aulax hieracii, wie ich im Kapitel II beschrieben habe, längere Zeit in der Eihöhlung des Stengels ihrer Nährpflanze frei umherkriechen.

§ 8. *Umwallung und Einschliessung der Larve durch das Gallplastem.* Bei meinen Gartenculturen fand dieser Process bei den Orthospinaegallen an den letzten Mai- und den ersten Junitagen statt. Die erste Veränderung des pflanzlichen Gewebes, welche ich unterhalb der Kittmasse (*Km* Fig. 96 Taf. VI) der Eier wahrnehmen konnte war eine schwache Zellenvergrösserung, welche bald nachher von Zelltheilungen gefolgt wurde, und zur Entstehung eines kleinen Höckerchens, das Gallplastem (*gp* Fig. 96 Taf. VI), Veranlassung gab. Die sich schnell vermehrenden Zellen dieses Plastems enthalten einen grünlichen Protoplasten mit deutlichem Kern und einer Safthöhlung. Die Einschliessung der Larve geschieht wenn das Thier noch vollständig von der Eischale eingehüllt ist, und ist in mancher Hinsicht eigenthümlich. Hierbei wird nämlich anfänglich die äusserste Spitze der Eischale sammt der Kittmasse, welche diese Spitze bedeckt, durch das seitlich heranwachsende Plastem zusammengedrückt, sodass nicht die gewölbte Endfläche der Eischale, wie bei den Eichencynipiden, in das Plastem sinkt, sondern ein scharf spitziges Ende (Fig. 97 Taf. VI) des Eies. Die Kittmasse (*Km* Fig. 97) mag dabei von grossem Nutzen sein, denn anscheinend kann dieselbe einer Verschiebung des Eies, welche beim Einschliessen eintreten könnte, vorbeugen. Es wird also, wie aus diesen Angaben erhellt, die Eischale vom Plastem gleichsam festgegriffen, und bei der weiteren Ueberwallung „rollt" das Plastemgewebe, so zu sagen, an die Aussenfläche des Eies aufwärts. Ein ganz ähnlicher Vorgang wie der hier Beschriebene, findet ebenfalls statt beim Einschliessen der Eier von Rhodites rosae (*Lk* Fig. 98 Taf. VI) und wurde von mir wiederholt beobachtet. Wenn man überlegt von welcher Natur die Wachsthumprocesse im Plastem sein müssen, die zur Einschliessung Veranlassung geben, so findet man auch wieder in diesem Falle die schon mehrfach von mir bei der Beschreibung der Eichengallen ausgesprochene Regel gültig, nämlich, dass die Larve im Berührungspunkte mit dem Plastem das Wachsthum des Letzteren einschränkt, dagegen in geringer Entfernung beschleunigt, sodass die inneren Gewebe der Galle, welche später der Larvenkammer unmittelbar angrenzen, in gleicher Weise wie bei der Baccarum, Taschenbergi-, Megaptera- und Kollarigalle aus der Epidermis der Nährpflanze entstehen. Dass die übrigen Rosengallen in dieser Hinsicht mit der Orthospinae- und Rosaegalle übereinstimmen, habe ich schon in § 1 dieses Kapitels betont.

Die ersten Stadien der Plastembildung sind bei der Orthospinaegalle in man-

cher Hinsicht lehrreich. Betrachtet man den in der Fig. 97 Taf. VI abgebildeten Zustand des in reger Ausdehnung und Zelltheilung begriffenen Plastemes etwas näher, so springt dabei sofort ins Auge, dass die Entfernung zwischen dem lebendigen Thiere und dem lebendigen Protoplasma der Pflanze, keineswegs unbeträchtlich genannt werden kann. Zwischen den beiden finden sich nämlich, zuerst die von einer Cuticula bekleidete Zellwand der pflanzlichen Zelle, weiter die Eischale und endlich ein mit einer durchsichtigen Flüssigkeit (*Fl* Fig. 97) angefüllter Raum; möglicherweise muss dazu noch eine Schicht der Kittmasse gefügt werden, welche ich jedoch auch bei 600-maliger Vergrösserung nicht auffinden konnte. Durch diesen heterogenen Complex von gewiss als Tod zu betrachtenden Körpern, muss offenbar die „Gallwirkung", auch dann, wenn man dieselbe als eine geheimnissvolle, von der lebenden Larve ausgehende Kraft auffassen will, fortgeleitet werden. Ist es, einem solchen Thatbestand gegenüber, nicht die einzig befriedigende Hypothese anzunehmen, dass LACAZE DUTHIERS, DARWIN, HOFMEISTER und PAGET recht haben nur an einen einfachen stofflichen Einfluss des Thieres auf die Pflanze zu denken, welche Ansicht in der Einleitung ausführlicher erwähnt wurde? Und könnte es nicht die zwischen dem Larvenkörper und der Eischale angesammelte Flüssigkeit (*Fl* Fig. 97) sein, welche in dieser Hinsicht in Betracht käme?

Längere Zeit bevor die vollständige Einschliessung des Thieres im Plasteme beendet ist, wird die Eischale vom Larvenkörper gelöst, später kann diese als ein glashelles Häutchen, welches an der Oberfläche der ganz jungen Galle haftet, zurückgefunden werden, und oft wird dadurch, in klarer Weise, diejenige Stelle an welcher sich das Kammerloch einmal geschlossen hat, das heisst die Gallennarbe, bezeichnet (*nb* Fig. 99 Taf. VI). Die Fig. 98 welche einem Jugenzustand der Rhodites rosae entlehnt ist, kann das Verhalten der Eischale während des Abstreifens versinnlichen. An der Larve (*Lk*) waren die Chitinkiefer und die Segmente eben sichtbar geworden; die Eischale war dem Körper des Thieres entlang erheblich nach oben geschoben, zufolge dessen im oberen Eipole, also dem Eistiele zugewendet, ein, mit einer Flüssigkeit angefüllter Hohlraum innerhalb des Eies entstanden war. Am unteren Ende, dass heisst dort, wo die Larve schon im Plastem eingewachsen war, muss die Eischale sich offenbar geöffnet haben, so dass da zur Stelle, das lebendige Thier und das pflanzliche Gewebe einander unmittelbar berühren. Wie man bemerkt ist dieser Vorgang, mit dem was ich bei der Terminalisgalle beschrieben habe, in der Hauptsache analog, und in den beiden Fällen fragt es sich, durch welche Ursache das Oeffnen der Eischale am unteren Eipole vermittelt werden möchte. Eine sichere Antwort auf diese Frage zu geben vermag ich nicht, jedoch ist es schwierig das Vermuthen fern zu halten, es

möchte die Eischale an einer eng umschriebenen Stelle weich werden und verflüssigen; an einem Zernagen derselben seitens des Thierens ist offenbar nicht zu denken, da der Kopf mit den Chitinkiefern eben vom Plastem abgewendet, dem Eistiele zugekehrt ist. Ist nun, sei es in Folge von Verflüssigung oder auf eine andere Weise, einmal eine Oeffnung in der Eischale entstanden, so versteht sich leicht, wie das Thier unter dem Einfluss des Druckes des wachsenden Plastemes vollständig aus dem Eie herausgleiten kann, während die Eischale passiv vom Plasteme mitgeführt wird, und, nach vollständiger Ueberwallung, mit dem Letzteren verklebt bleibt.

Ich habe früher angeführt, dass die Eier entweder an der Unterseite des Blattes (Fig. 91 und 92 Taf. VI), oder an dem Blattrand (Fig. 95) abgelegt worden sein können; auf den letzteren dieser beiden Fälle will ich hier noch einmal in Kürze zurückkommen. Gewöhnlich finden die Eier sich dabei in sehr regelmässiger Anordnung, jedes auf der Spitze eines Blattzahnes (*bz* Fig. 95), mithin mit der, an dieser Stelle befindlichen, schleimabsondernden Drüse verklebt. Die Zellen des Drüsengewebes führen, wie früher erwähnt, innerhalb ihrer dünnen Wandung einen carminrothen Protoplasten. Findet unter diesen Umständen Plastembildung statt, so ist es, wenigstens anfänglich, das rothe Drüsengewebe, welches die Plastemzellen erzeugt. Da diese Letzteren ebenfalls einen carminrothen Inhalt führen, ist es klar, dass die Gallwirkung den rothen Farbstoff nicht zu affiziren vermag. Da andererseits aus Blattgrüngewebe grünes Plastem entsteht, ergibt sich, dass auch das Chlorophyll durch den gallbildenden Einfluss, von welcher Natur dieser übrigens auch sein möge, nicht verändert wird.

§ 9. *Ueber die Ausdehnung des Gallplastems am Rosenblatte.* Eine sehr merkwürdige Thatsache auf dem Gebiete der Naturgeschichte der Gallen besteht darin, dass die pflanzlichen Gewebe schon eine hohe Entwicklungsstufe erreicht haben können ohne dabei ihre Fähigkeit zur Gallbildung zu verlieren *. Ob dieselben dazu noch im Stande seien, wenn schon gänzlich erwachen, ist zweifelhaft, wenigstens würde ich kein einziges sicheres Beispiel dieser Art zu nennen wissen, da alle mir bekannte Organismen, welche zur Entstehung von Gallen Veranlassung geben, wachsende Gewebe ergreifen. Jedoch können diese Gewebe, wie bemerkt, schon sehr beträchtliche Differenzirungen erfahren haben. Die Orthospinaegalle bietet uns in dieser Beziehung ein interessantes Beispiel dar, wie schon aus dem Vergleich der Fig. 91 Taf. VI mit der Fig. 94 Taf. VI erhellt. Es geht

* Siehe auch J. PEYRITSCH, *Zur Aetiologie der Chloranthien einiger Arabis-Arten*, PRINGSHEIM'S *Jahrbücher*, 1881, Bd. XIII, p. 1.

daraus nämlich hervor, dass die Plastembildung in dem Gewebe des Blattes erfolgt, zu einer Zeit wenn dieses in die Streckungsperiode hineintritt, und die Xylembündel darin schon ausgebildet sind, sodass auch diese letzteren einen Theil des Plastems darstellen müssen. Ferner ist es ein interessanter Umstand, dass bei den vielkammerigen Rosengallen, wie z. B. denjenigen von Rhodites orthospinae und R. rosae, selbst noch längere Zeit nachdem, die Larve vollständig umwallt ist, fortwährend, in centrifugale Richtung, unversehrte Blattzellen durch Zelltheilung in Plastem übergehen, sodass die Gallwirkung im Ganzen eine Zirkelfläche der Blattspreite von nahezu 1.5 mM. Mittellinie in Plastem umzuwandeln vermag; die spätere Ausdehnung der Galle beruht dann auf Veränderungen in dem Plasteme an sich. Wir haben früher gesehen, dass dieses Verhältniss sich bei der Kollari-, Megaptera- und Taschenbergigalle anders gestaltet, da in diesen Fällen nur eine ausserordentlich kleine Zellgruppe der Nährpflanze zur Galle umgebiltet wird. Die Rosengallen schliessen sich dadurch mehr der Galle von Aulax hieracii an, bei welcher sich ebenfalls die Gallwirkung in beträchtlicher Entfernung vom Gallenthiere bemerklich macht, und bis zu einem gewissen Grade auch derjenigen von Spathegaster baccarum und S. curvator der Eiche. Die Entstehung der grossen vielkammerigen Gallen (Fig. 89 Taf. VI), welche für Rhodites orthospinae so besonders characteristisch sind, beruht in der Hauptsache auf diese beträchtliche seitliche Ausdehnung der Gallwirkung in den Rosenblättern. Es können nämlich in Folge dessen, verschiedene Plasteme, welche unter dem Einflusse von Eiern entstanden sind, die selbst einen Millimeter weit von einander entfernt liegen, verschmelzen und zur Entstehung einer einheitlichen Galle Veranlassung geben. In der Figur 94 sieht man zwei dergleiche Plasteme, welche im Begriff sind über einander hinzugreifen.

Diese letztere Beobachtung veranlasste mich zu fragen, was geschehen wird wenn die beiden neben einander liegenden Eier von specifisch verschiedenen, jedes für sich eine eigene Galle erzeugenden Thieren herrühren, wenn also die nämlichen Zellen der Nährpflanze, zu gleicher Zeit, zwei verschiedenen Gallwirkungen anheimgestellt sind. Versuche zur Lösung dieser Frage sind nicht so schwierig anzustellen, wie auf den ersten Blick erscheinen möchte. Ich fand nämlich, dass es bei der Beachtung gewisser Fürsorgen gelingt eine Orthospinae und eine Rosaewespe, mit einander oder nach einander in eine und dieselbe Knospe Eier legen zu lassen, woraus offenbar die Möglichkeit des Gelingens des genannten Experimentes schon erhellte. In einem einzigen Falle habe ich auch wirklich eine zusammengesetzte Galle erhalten, welche an derjenigen Stelle, wo die beiden specifisch verschiedenen Bildungen durch einander gewachsen waren,

gewisse mittlere Eigenschaften aufzeigte, die sich besonders deutlich, in den, für die beiden genannten Gallen so characteristischen Anhangsgebilden, zu erkennen gaben. Da ich dieses vorläufige Ergebniss als wichtig betrachte, behalte ich mir vor weitere Versuche in dieser Richtung anzustellen *.

Bei dieser Gelegenheit sei mir noch zu bemerken erlaubt, dass es anscheinend auch auf eine ganz andere Weise möglich ist eine Mittelbildung zwischen zwei verschiedenen Gallen zu erzeugen, nämlich vermittelst hybrider Cynipidenlarven; jedoch ist mir bisher keinen einzigen derartigen Fall weder aus der Litteratur noch aus der Natur bekannt geworden. Jedenfalls verdient aber die Möglichkeit der Entstehung von Gallenmischlingen, welche zwar dem nämlichen Elternpaare entstammen, allein auf so verschiedene Weisen entstanden sein könnten, einige Aufmerksamkeit. Unglücklicherweise werden die Bewohner der zur Erzeugung der „Verwachsungsmischlinge" sich besonders gut eignenden, vielkammerigen Rosengallen, in Folge ihrer beinahe ausschliesslichen Parthenogenesis, sich wohl äusserst schwierig für Hybridisationsversuche verwerthen lassen †.

§ 10. *Anatomischer Bau der jungen Galle.* Wenn die, innerhalb der Eischalen liegenden Larven ungefähr halbwegs eingeschlossen sind (Fig. 94 Taf. VI), zur anderen Hälfte dagegen noch in der freien Luft hervorragen, werden im Plastem schon einige Differenzirungen sichtbar; selbst die radial abstehenden rechten Stacheln, welche später die Oberfläche der Galle zieren, und worauf ich den Namen der Wespe gründete, fangen an diesem frühen Entwickelungsstadium sich schon zu zeigen an. Bildet die Galle sich an Rosa rubiginosa, so kann man auf dem jungen Plastem ebenfalls die einzelligen Haare auffinden, welche für die Blätter dieser Pflanze characteristisch sind. In Uebereinstimmung mit der Entstehung des Plastems aus dem sehr vollständig differenzirten Blattgewebe, in welchem sich schon die Gefässbundel ausgebildet haben, lassen sich, wie zu erwarten war, schon in den allerjüngsten Anlagen Xylembündel nachweisen. Beiläufig sei noch darauf hingewiesen, dass es mithin sehr ungenau sein würde das Plastem der Rosengalle mit einem Meristem zu vergleichen, da es doch gewiss ein Hauptmerkmal letzterer Gewebeform ist, aus einem homogenen Zellengewebe zu bestehen.

Von der Orthospinaegalle kann man, Mitte Juni, Entwicklungsstadien antreffen

* Nachträgliche Bemerkung. Im vergangenen Sommer erzeugte ich mehrere solcher Verwachsungsgebilde.

† Ich versuchte Rhodites rosae ♀ und R. eglanteriae ♀ mit R. orthospinae ♂ zu kreuzen, jedoch vergebens.

bei welchen das Plastem sich eben über dem Scheitel der Larve zusammengeschlossen hat (Fig. 99 Taf. VI), die Narbe des Kammerloches (*nb*) lässt sich daran leicht auffinden, und aus derselben ragt dann noch gewöhnlich der Eistiel hervor. Nach dieser Erklärung brauchen die Uebergangsstufen zwischen den Figuren 94 und 99 wohl keiner näherer Beleuchtung, und auch die Deutung der Figur 100, welche einen Längsschnitt einer etwas weiter entwickelten, beiderseits sich über der Blattspreite erhebenden, bei *nb* dichtgewachsener Galle darstellt, bietet keine Schwierigkeiten in entwickelungsgeschichtlicher Beziehung.

Untersuchen wir den zelligen Bau der in Figur 99 abgebildeten, an der Basis eines Blattzahnes (*bz*) entstandenen Galle, etwas näher. Zunächst ist dabei, besonders auf Längsschnitten, welche durch die Larvenkammer und die Narbe gehen, die sehr regelmässige reihenweise, nur in der Nachbarschaft der Larvenkammer und des Kammerloches verwischte Anordnung der Zellen auffallend; die Reihen stehen, ähnlich wie im Korkgewebe, senkrecht zur Oberfläche. Verfolgt man diese Zellenreihen bis in die unveränderte Blattspreite (*bt*), so ergibt sich, dass die Gallwirkung, welche sich von der Larvenkammer heraus nach aussen bewegt, alle in der Dicke der Blattspreite liegende Zellen nahezu in derselben Weise affizirt, und besonders deren tangentiale, zur Oberfläche der Blattspreite parallele Theilungen beschleunigt.

Die neuen Zellen, welche demzufolge entstehen, haben eine ungefähr cubische Gestalt und besitzen die Grösse der benachbarten Blattzellen; der Inhalt derselben besteht aus Protoplasma mit Zellkern und Zellsaft, das Licht wird darin stark gebrochen, wodurch die Zellen ein fettglänzendes Aussehen erlangen. Die gleichmässige Affizirung der ganzen Dicke des Blattes seitens des Thieres, ist augenscheinlich davon die Ursache, dass die Orthospinaegalle sich beiderseits ungefähr zu gleicher Höhe über der Blattspreite (*bt* Fig. 100) erhebt; wenn diese letztere dagegen auf der Ober- oder Unterseite der Gallwirkung stärker anheimgestellt wäre, wie auf der entgegengesetzten Seite, so würde dadurch eine einseitig hervorstechende Galle entstehen müssen.

Schon zur Zeit wenn die Eistiele noch weit ausserhalb der Gallen hervorragen (Fig. 94), lassen sich im Plastem procambiale Bündel auffinden, welche sich anscheinend an die ursprünglichen, im Plastem befindlichen Gefässbündel des Blattes ansetzen, und später ebenfalls in collaterale Gefässbündel übergehen. Auch bei der Entstehung der Stacheln der Galle (Fig. 100) wächst ein procambialer Strang mit nach aussen, welcher später das Gefässbündel der Stachel hervorbringt. Zwar lässt sich im Allgemeinen von dem Gefässbündelverlauf in den älteren Gallen sagen, dass die Hauptstämme in einer mit der Grenze der Larvenkammer ungefähr concentrischen Fläche angeordnet sind, jedoch ist

es nicht möglich, für die zahlreichen Gefässbündelzweige, ein bestimmtes Stellungsverhältniss anzugeben.

Sehr frühzeitig bildet sich um die Larvenkammer, welche eine mehr-weniger längliche Gestalt annimmt, das Nahrungsgewebe (*ng* Fig. 99 und 100) aus, welches hier, wie in anderen Fällen, durch den reichlichen Gehalt an Oel und Eiweiss ausgezeichnet ist, in Folge dessen die Zellen desselben einen trübkörnigen Inhalt führen. An der Aussengrenze des Nahrungsgewebes behält das Plastemparenchym längere Zeit einen meristematischen Character (*cz* Fig. 100), ist daher, der als Cambialzone bezeichneten Gewebegruppe, welche wir in der Kollarigalle kennen lernten, zu vergleichen. In Uebereinstimmung mit der sehr einfachen späteren Gewebedifferenzirung der Rosengallen im Allgemeinen, und der Orthospinaegalle hier im Besonderen, ist die Function dieser meristematischen Zone wenig complizirt: nach innen entstehen daraus neue Zellen für das Nahrungsgewebe, die äusseren Theilproducte strecken sich beträchtlich, und werden dabei in Rinderparenchym umgewandelt. Besonders reichlich abgesetzte Nahrungs- oder Reservestoffe habe ich in den Orthospinaegallen, ausserhalb des ursprünglichen Nahrungsgewebes, nicht angetroffen.

Untersucht man die weiter ausgereiften Gallen, so ergibt sich, dass dieselben, der Hauptsache nach aus Tüpfelzellen mit mässig verdickten Wänden und wasserklarem Inhalte bestehen, welche, während der Ueberwinterung, der Larve den nöthigen Schutz verleihen; ein eigentliches Steinzellengewebe kommt hier gar nicht zur Ausbildung. In Bezug auf dieses Merkmal, sowie durch die einfachen Verhältnisse bei der Entstehung des Nahrungsgewebes, muss die Orthospinaegalle im Vergleich z. B. mit der höchst complizirten Kollarigalle, als eine Bildung niederer Organisation betrachtet werden. — Das grüne Hautgewebe der Galle ist ausgezeichnet durch die Kleinheit der Zellen, und lässt sich am besten einem chlorophyllführenden Collenchymgewebe vergleichen; es ist ziemlich gerbstoffreich und unterscheidet sich dadurch von dem gerbstoffarmen inneren Rindengewebe.

Ich schliesse diese Beschreibung der Orthospinaegalle mit der Bemerkung, dass das Wachsthum derselben unter günstigen Bedingungen ausserordentlich lange fortdauern kann; die Blätter, welche solche Gallen tragen, können einen Monat, ja selbst länger, schon vollständig erwachsen sein, ohne dass die Galle aufhört sich zu vergrösseren, sodass bisweilen erst Ende August keine weitere Grössenzunahme mehr zu bemerken ist. Bei den Bedeguaren lässt sich Aehnliches beobachten, und beide Gallen stimmen darin mit manchen, im Spätherbst reifenden, fleischigen Früchten überein.

KAPITEL IX.

SCHLUSSBEMERKUNGEN.

Im Laufe der fünf letzten Jahre habe ich ungefähr fünfzig verschiedene einheimische Formen von Cynipidengallen lebend untersuchen können; viele davon haben mir massenhaft in zahlreichen Entwicklungsstadien vorgelegen, andere hatte ich bisher nur im reifen Zustand. Jedoch gelang es mir auch für die Letzteren, in Folge eines genauen Vergleiches mit den vollständiger untersuchten Formen, mit Sicherheit zu bestimmen wo und wie das Ei, welchem dieselben ihren Ursprung verdanken, abgelegt worden sein muss, m. a. W., welche pflanzliche Gewebe bei ihrer Bildung verwendet werden. Zwar lassen sich, in Bezug auf diese ursprüngliche Lage des Eies, zwei Hauptfälle unterscheiden, nämlich je nachdem das Letztere innerhalb der pflanzlichen Gewebe in eine eigens dazu verfertigte Verwundung gebracht, oder einfach an die Oberfläche der jugendlichen Organe festgeklebt wird, — jedoch ergab sich, dass der eigentliche Vorgang der Gallbildung überall, in gewissen Hauptpunkten, identisch ist. Dieses gilt ganz besonders hinsichtlich der Art und Weise, wie das junge Thier seitens der jugendlichen Gallengewebe, welche ich mit einem eigenen Namen, „Plastem", zu belegen für nöthig hielt, umwallt und eingeschlossen wird; ehe wir jedoch diesen Vorgang näher betrachten mögen in erster Linie einige Worte über die Bildung des Plastemes an sich, vorausgeschickt werden.

Dasselbe entsteht aus den Geweben der Nährpflanze unter dem Einfluss der vorläufig noch dunkelen Gallwirkung, welche immer von der jungen Larve des Gallenthieres herrührt und sich über die nächste Umgebung ausdehnt. Nicht nur auf Grund seines eigenthümlichen Ursprunges, sondern auch wegen seines abweichenden anatomischen Baues, war es nöthig dem Bildungsgewebe der Gallen mit einem besonderen Namen zu belegen und dasselbe nicht einfach, wie bei den normalen Organen üblich, „Meristem" zu nennen. So ergab sich z. B., dass das Plastem der Bedeguare und der Orthospinaegallen vom Anfang an schon ziemlich vollständig differenzirte Gefässbündelchen einschliessen kann, welche schon, vor der Entstehung des Plastems, in dem Rosenblatte existirten; allein dieses ist mit dem Begriffe, welchen man an das Wort Meristem zu verbinden pflegt, unvereinbar. Wir haben weiter gesehen, dass in manchen Fällen eine mit Vacuolenbildung gepaarte Zellendehnung der Plastembildung vorausgeht, ein Vorgang also, welcher sich bei der normalen Meristembildung wohl niemals, oder sicher nur ausnahmsweise zeigen möchte, und zufolge dessen die Plastembildung sich vielmehr mit

der Callusbildung, welche ebenfalls theilweise auf Zellenstreckung beruht, — sich jedoch, mit Bezug auf die Ursache ihrer Entstehung von der Plastembildung scharf unterscheidet, — in Einklang bringen lässt. Anderseits gibt es aber Plasteme, wie z. B. diejenigen der höher organisirten Gallen von Cynips kollari und Dryophanta folii, deren Zellen anfänglich, wie es scheint gänzlich mit Protoplasma angefüllt, und dabei sehr klein sind, so dass sie einem gewöhnlichen Meristem in jeder Hinsicht gleich kommen.

Die eigentliche Ursache der Plastem- oder Gallbildung, das heisst also die Natur der Gallwirkung, wurde, wie bemerkt, durch die vorliegende Untersuchung nicht vollständig aufgeklärt, jedoch konnte ich hinsichtlich der Einwirkung des Gallenthieres auf die Nährpflanze gewisse Thatsachen feststellen, welche sich etwa folgendermaassen formuliren lassen. — Die wachsende, innerhalb der Eischale beschlossene, oder — bei Aulax hieracii — freilebende Larve, hat das Vermögen die in einer gewissen Entfernung sich befindenden Protoplasten der pflanzlichen Zellen zu affiziren. Bei den Rhoditesgallen im Allgemeinen und der Orthospinaegalle im Besonderen, ist diese Entfernung gleich der Summe der Dicken der Eischale, Zellenwand und Kittmasse, welche alle als leblos betrachtet werden müssen. Bei anderen Gallen befinden sich zwischen dem lebenden Thiere und der lebenden Pflanzensubstanz nur Zellenwand und Eischale, allein es können sich, wie z. B. bei der Terminalisgalle zwischen denselben auch noch abgestorbene Gewebeschichten vorfinden, welche der Gallbildung keineswegs beeinträchtigen. Diesen Thatsachen gegenüber ist der Schluss, die Gallwirkung werde durch eine vom Gallenthiere ausgesonderte flüssige Substanz verursacht, kaum abweisbar.

Von welcher Natur die Gallwirkung nun übrigens auch sein möge, jedenfalls dehnt dieselbe sich während kürzerer (Eichencynipiden) oder längerer Zeit (Rhodites- und Aulaxarten) nach allen Richtungen in die Gewebe der Nährpflanze aus, in Folge dessen das Gallplastem entsteht, welches weiterhin eine vollkommen selbständige Entwicklungsrichtung einschlägt und als Initialgewebe der Galle fungirt. Soll die Galle jedoch zur vollkommenen Ausbildung gelangen, so muss die Larve längere Zeit gegenwärtig sein, stirbt das Thier frühzeitig, so steht auch die weitere Entwicklung der jungen Galle selbst stille. Dagegen können die letzten Stadien des Gallenwachsthums auch bei der Abwesenheit des Bewohners zu Stande kommen, sind mithin nur indirect von demselben bedingt. Es ist nicht schwierig sich über die Richtigkeit dieser Aussagen, sowohl durch natürliche Vorkommnisse, wie durch künstlich angestellte Experimente, zu belehren. In der Natur gibt es viele Parasiten, welche bisweilen früher, bisweilen später, die legitimen Bewohner der Gallen vernichten. Anderseits ist die künstliche Entfernung der Gallenbewohner,

aus gewissen jungen Gallen, leicht ausführbar. Freilich gilt letzteres nur für die Aphidengallen, welche erzeugt werden durch erwachsene, sich auf die freie Oberfläche junger, kräftig wachsender Pflanzentheile ansiedelende Blattläuse, und für gewisse Cecidomyiengallen, wie z. B. diejenigen von Cecidomyia persicariae an Polygonum persicaria, und von Cecidomyia annulipes an Fagus sylvatica, bei welchen die Larven ganz offen und unbedeckt liegen, — künstliche Entfernung der jungen Cynipidenlarven aus ihren Gallen ist dagegen, ohne sorgfältige Präparation bei stärkerer Vergrösserung, unmöglich; — allein es möchte der Entstehung, der durch verschiedenartige Gallenthiere erzeugten Gallen, wohl im Allgemeinen die nämlichen Bildungsgesetzte zu Grunde liegen. Allenfalls kommt man auf den beiden Wegen zum Resultat, dass das Wachsthum der jungen Galle aufhört, sobald das Thier darin getödtet oder daraus entfernt worden ist. Es kann der gallbildende Einfluss des Insects mithin nicht ein einziger einfacher Impuls sein, sondern derselbe muss während längerer Zeit fortwirken.

Die Aussagen LACAZE DUTHIERS, * welche sich auf den Antheil der Gallenmütter bei der Entstehung der Cynipidengallen beziehen, sind durch meine Beobachtungen wiederlegt. Seine dessbezüglichen Angaben lauten nämlich folgendermaassen: „Reste donc l'hypothèse du venin déposé par l'insecte en même temps que l'oeuf dans l'intérieur de la plante. Cette hypothèse est un fait. Nos recherches sur l'armure génitale femelle des insectes mettent hors de doute que tous les Hyménoptéres ont une glande vénifique en rapport avec l'armure. Il suffit d'ailleurs d'exciter un Ichneumon, un Cynips, pour voir à l'extrémité de la tarrière, absolument comme dans les guêpes, une gouttelette de liquide qui, dans quelques Cynips et dans le Xovides nitens etc., a une odeur assez agréable. MALPIGHI l'avait aperçu, il lui attribuait la production des galles, seulement par un mode d'action impossible à admettre. Ainsi voilà un premier fait irrécusable: la tarrière des insectes peut déposer dans la plaie qu'elle fait au végétal un liquide particulier."

Nirgends könnte man die Function der Substanz, welche während der Eiablage durch das Insect abgegeben wird, klarer zu übersehen wünschen, wie bei der durch Biorhiza aptera erzeugten Terminalisgalle; allein wir haben dabei gesehen, dass dieser Körper einfach dazu dient, die Stiele der zahlreichen Eier unter einander, so wie mit dem, durch die Apterawespe abgesägten Theil der Knospe, zu verkleben, und mit der eigentlichen Gallbildung in keiner Beziehung steht. Ich will dazu noch bemerken, dass diese Substanz, welche im Augenblicke wenn dieselbe den Körper der Gallwespe verlässt die Consistenz

* *Recherches pour servir à l'histoire des Galles*, Annal. d. sc. nat. Bot., 1853, pag. 279.

eines dicklichen, farblosen, durchsichtigen, bald an der Luft vertrocknenden Schleimes besitzt, geruch- und geschmacklos ist und unter die Haut gebracht, keine besondere Erscheinungen hervorruft. Ganz anders aber verhält sich das Gift der Bienen und Wespen, welches nach vollständigem Eintrocknen den brennenden Geschmack beibehält, den daran zukommt zum Augenblicke, wenn dasselbe die Stachel verlässt, und welches, unter die Haut gebracht, ebenso kräftig wirkt, wie beim Stiche des Thieres selbst. Beiläufig sei noch darauf hingewiessen, dass die jungen Gewebe der Rosen und Eichen, welche ich in dieser Beziehung vielfach geprüft habe, unter dem Einfluss des Giftes von Hummeln, Bienen und Wespen keine besondere Erscheinungen aufzeigen.

Betreffs der Bemerkung LACAZE DUTHIERS', dass einige Cynipidenarten einen eigenthümlichen Geruch von sich geben, muss ich darauf hinweisen, dass die Thiere dieses thun wenn sie gereizt werden, und nicht während des Eierlegens.

Ich glaube demnach aus meinen Untersuchungen, in Bezug auf die Entstehung des Gallplastems der Cynipidengallen, mit Sicherheit schliessen zu können, dass dieser Vorgang durch die jugendliche Larve des Gallenthieres allein bedingt wird, von jeglicher Verwundung vollständig unabhängig ist, und dass eine besondere Wirkung einer, seitens der Mutterwespe beim Eierlegen in die Gallbildenden Gewebe ergossenene Flüssigkeit nicht besteht.

Einige Autoren haben in dem Nagen der Gallenlarve einen Reiz sehen wollen, welcher, nach ihrer Ansicht, die pflanzlichen Gewebe affiziren, möglicherweise zur Wucherung bringen könnte. — Freilich besitzen die Cynipidenlarven, selbst schon dann, wenn dieselben noch als volkommen kugelförmige Thiere innerhalb der Eischale eingeschlossen sind, feine Chitinkiefer, allein, zu dieser Zeit, wenn von einem Zernagen der pflanzlichen Zellen natürlich kein Reden sein kann, ist das Wachsthum des Gallplastems schon in vollem Flusse. Bei den Rhoditesarten liegt überdies das Kopfende, der in der Eischale eingeschlossenen Larve, noch gänzlich frei in der Luft am Stielende des Eies, wenn das Hinterende des Thieres schon im Gallplastem vergraben ist. Dem Frasse an und für sich, kann man demnach keine Bedeutung bei der Gallbildung anerkennen.

Auf die Frage nach der Natur der pflanzlichen Gewebe, welche sich für die Gallbildung eignen, geben die vorliegenden Beschreibungen eine ziemlich vielseitige Beantwortung; in Verbinding mit anderweitigen Untersuchungsergeb nissen lässt sich in dieser Hinsicht von den Cynipidengallen im Allgemeinen sagen, dass dieselben sich entweder aus solchen Geweben entwickelen in welchen die Zelltheilung sicher noch fortdauert, oder aus Geweben bei welchen das Bestehen der Zelltheilung zwar nicht bewiesen, jedoch höchst wahrscheinlich ist; selbst für die, erst im Spätsommer aus den Rosenblättern hervorspressenden

Gallen von Rhodites eglanteriae und R. rosarum glaube ich, dass diese Behauptung zutrifft. Betreffs der Eiablage ist es eine ausnahmslose Regel, dass dieselbe an die Oberfläche, oder innerhalb noch wachsender Gewebe stattfindet.

Was in zweiter Linie die Einschliessung der Larve seitens des Gallplastems anbelangt, habe ich Folgendes im Allgemeinen feststellen können. Der Hauptzweck dieses Processes ist die Bildung der Larvenkammer, dazu muss aber die junge Larve, welche sich gänzlich ausserhalb des Plastems befindet, durch besondere Wachsthumsvorgänge seitens des Letzteren allmählich vergraben werden. Hinsichtlich der Art und Weise auf welche dieses bei der Hieraciigalle mit Hülfe von tiefen Rissen im Plastemgewebe, bei der Foliigalle und verwandten Formen vermittelst der Kanalbildung eingeleitet wird, wird man gebeten meine Specielle Darstellungen zu vergleichen. Bei den späteren Entwicklungsphasen dieser, so wie bei der Entstehung aller übrigen von mir untersuchten Cynipidengallen, ergiebt sich folgendes Verhältniss als besonders wichtig, weil darauf die eigentliche Einschliessung beruht. Es wird nämlich überall das Wachsthum derjenigen Stelle des Gallplastems, welche von dem Thiere unmittelbar berührt wird, gehemmt, während die von dem Thiere abgekehrten, und weiter entfernten Partieen des Gallplastems, eine Beschleunigung ihrer Wachsthumsintensität erfahren; es ist klar dass die Folge davon, die Bildung eines das Thier allseitig einschliessenden Hohlraumes — der Larvenkammer — sein muss. — Ein Unterschied in der Schnelligkeit des Wachsthums an verschiedenen Stellen übrigens scheinbar gleichartiger Bildungsheerde, ist die eigentliche formbestimmende Ursache der Gestalten aller höheren Organismen; es scheint mir wichtig in den Gallen diesem Princip in so einfacher und klarer Weise zu begegnen.

Man kann im Allgemeinen sagen, dass die Larve sich während des Processes der Kammerbildung vollkommen passiv verhält; das Thier verlässt dabei seinen Platz nicht, sondern erleidet erst in Folge des Wachsthums der jungen Galle gewisse Verschiebungen, so z. B. bei der Foliigalle, bei welcher die anfänglich innerhalb des Blattnerven gelegene Larve sich zuletzt gänzlich ausserhalb der Blattgrenze vorfindet. Die Larvenkammer an sich hat demnach eine gewisse Stabilität zu den Gallengeweben, die einmal von ihr behauptete Stelle bleibt weiterhin stets erhalten. In Bezug auf die Détails des Vorganges der Kammerbildung, erlaube ich mir auf meine specielle Beschreibungen hinzuweisen, jedoch möge an dieser Stelle noch Folgendes hervorgehoben werden.

Wenn die Eier an die äussere Oberfläche der Organe der Nährpflanze niedergelegt werden, ist es klar, dass der Plastemwall, welcher sich ringsum den Larvenkörper erhebt und diesen zuletzt gänzlich vergräbt, überall von dem

ursprünglichen Hautgewebe der Pflanze bekleidet ist, und dass demzufolge auch die Gewebe des Kammerloches und der Larvenkammer aus der Epidermis der Nährpflanze entstehen. Die Gallen welche sich auf diese Weise entwickeln, und deren Narbe, — das heisst die Stelle wo sich der ursprüngliche Plastemwall nach der vollendeten Umwallung geschlossen hat, — irgend auf der freien Gallenoberfläche vorkommen muss, kann man „Gallen mit äusserem Verschlusse" nennen. Werden dagegen die Eier innerhalb der Gewebe der Nährpflanze gelegt, so schliesst das Plastem sich in der Weise, dass die Narbe vollständig verborgen im Innern des betreffenden Organes zu liegen kommt, und solche Gallen liessen sich unter den Namen „Gallen mit innerem Verschlusse" zusammenfassen. Natürlich müssen die Kammergewebe in diesem Falle aus inneren Zellen der Nährpflanze hervorgehen, dagegen können die Hautgewebe der Galle sehr verschiedenen Ursprunges sein, abhängig von dem Alter oder der Gewebeform des Organes aus welchem das Gallplastem entsteht. Für gewisse Gallenformen, bei welchen zwar das Ei in's Innern der Pflanze gelegt wird, wobei ich aber alle Détails der Plastembildung noch nicht verfolgen konnte, z. B. für die Noduli-, Testaceipes- und Furunculusgalle *, muss ich es unentschieden lassen ob hier möglicherweise das Plastem allseitig um den Larvenkörper entsteht, so dass, wenn dieses der Fall wäre, die genannten Gallen zu einer dritten, morphologisch scharf characterisirten Gruppe gehören würden; ich halte dieses aber für unwahrscheinlich und glaube dass dieselben sich ähnlich wie die gewöhnlichen Gallen mit innerem Verschlusse entwickelen. Ich schliesse dieses auf Grund der von mir gefundenen Thatsache, dass die Aprilinusgalle †, welche mit den ebengenannten Formen in anatomischem Sinne vollständig übereinstimmt, und ebenfalls in Folge des Einflusses eines in's Innern der pflanzlichen Gewebe gebrachten Eies erzeugt wird, dennoch den gewöhnlichen Entwicklungsgang der Gallen mit innerem Verschlusse aufzeigt.

Der anatomische Bau der Cynipidengallen ist so ausserordentlich verschieden, dass es nicht möglich ist davon in Kürze einen Ueberblick zu geben §, ich will darum betreffs dieses Gegenstandes hier nur einzelne Punkte hervorheben, welche mir besonders bemerkenswerth zuscheinen. Zuerst muss ich dann das schon früher von LACAZE DUTHIERS entdeckte Nahrungsgewebe nennen, wel-

* Bewohnt von Neuroterus furunculus n. f., zweigeschlechtliche Generation zu Neuroterus ostreus.

† Gallenmutter Aphilothrix solitaria FONSCOLOMBES.

§ Im ersten Kapitel habe ich die dessbezüglichen Angaben LACAZE DUTHIERS' verwerthet.

ches ich als eine niemals fehlende Bekleiding der Larvenkammer aller jugendlichen, von mir untersuchten Cynipidengallen erkannte, und welches durch seinen reichlichen Gehalt an Oel und Eiweiss ausgezeichnet ist. Als primäres Gewebe entsteht dasselbe durch Differenzirung der inneren Plastemschichten; als secundäres Gebilde geht dasselbe entweder aus der Umwandelung der Theilungsproducte einer als Cambialzone zu bezeichnenden Gewebemasse, welche während längerer Zeit den inneren Zuwachs der höher organisirten Gallen bedingt, hervor, oder es bildet sich aus einem Gewebe, welches in der jugendlichen Galle eine ganz andere Function zu erfüllen hatte. Die letztere Umwandlung kommt in sehr eigenthümlicher Weise bei der Folii- und bei der Lenticularisgalle zu Stande, hier ist es nämlich ein dichtes Gewebe kleiner sklerotischer Zellen, welches in Folge beträchtlicher Dehnung in Nahrungsgewebe übergeht. Diese Dehnung bezieht sich entweder auf die sklerotischen Elemente selbst, welche dieses dadurch ermöglichen, dass ein gewisses Areal ihrer Wandung sich nicht verdickt und für späteres Flächenwächsthum fähig bleibt, oder die Dehnung beruht auf die Vergrösserung allseitig dünnwandig gebliebener Zellen, welche zwischen den Steinzellen eingestreut vorkommen. Hier liegt also der Fall vor, wo der nämlichen Gewebeschicht die doppelte Function obliegt das jugendliche Thier gegen den Angriff seiner Feinde zu schützen, und, sobald dieses auf andere Weise geschieht, dem Thiere zur Nahrung zu dienen. — Bei der Kollarigalle war die Bildung des primären Nahrungsgewebes mit einer ausserordentlich reichlichen Ablagerung von Kalkoxalatkrystallen in ein besonderes, als Krystallschicht bezeichnetes, Gewebe begleitet.

Ferner haben wir bei letzterer Galle ein secundäres Nahrungsgewebe kennen lernen, welches durch Vermittelung der Cambialzone gebildet wurde. Dieses geschah jedoch auf indirecte Weise, da dasselbe direct aus einer dicht mit Stärke angefüllten Gewebeschicht hervorging, welche ihrerseits das Product der Thätigkeit der genannten Zone war. Die nähere Untersuchung der Umwandlung der Stärkezellen in Oel-führende Zellen ergab, dass dieser Vorgang ausserordentlich schnell verläuft, dass das Verschwinden der Stärke sich besonders leicht in der Nähe der Frassstelle des Thieres wahrnehmen lässt, und dass dabei in jeder Zelle ein „brauner Körper", unbekannter Constitution, sichtbar wird.

Ein anderes anatomisches Ergebniss, welches ein gewisses allgemeines Interesse beansprucht, ist das Vorkommen concentrischer Gefässbündel mit centralem Xylem und peripherischem in Ringlage angeordnetem Phloëm in mehreren Knospengallen, wie z. B. bei den Megaptera, Albopunctata und Malpighi-gallen Zwar findet man in der Basis der letztgenannten Galle collaterale Gefässbündel, jedoch zeigen diese, nach aussen gewendetem Xylem. Dagegen besitzen die

Gefässbündel der meisten übrigen Gallen — und dazu gehören mehrere Knospengallen, wie z. B. die Globuli- und Collarisgalle — einen normalen collateralen Bau mit nach innen gekehrtem Xylem. So viel mir bekannt fehlen solche concentrische Gefässbündel ebenfalls in der normalen Organisation der Eiche gänzlich.

Die hier kurz vorgeführten und zahlreiche andere, weniger genau untersuchte Erscheinungen bezüglich der Entwicklung und des Baues der Gallen, haben bisher noch nicht die Beachtung gefunden, welche dieselben, nicht nur an und für sich, sondern vielmehr als Folgen einer bekannten, sei es auch entfernten Ursache in hohem Grade verdienen.

FIGUREN- UND BUCHSTABENERKLÄRUNG.

ERKLÄRUNG DER BUCHSTABEN.

Die Buchstaben folgen einander in alphabetischer Ordnung.

Buchstaben welche sich auf den Thierkörper beziehen.

Faltenhautblatt (Embryonalhaut).	*Am*	Mesoderm (sammt Endoderm?)	*Ms*
Eikörper	*Ek*	Nahrungsdotter	*Nd*
Eistiel	*Es*	Oblonge Platte	*Op*
Ektoderm (?)	*Et*	Mundöffnung	*Os*
Flüssigkeit	*Fl*	Quadratische Platte	*Qp*
Hautkeimblatt (?)	*Ht*	Stechborsten	*Sb*
Kittmasse	*Km*	Schleimdecke	*Sl*
Larvenkörper	*Lk*	Schienenrinne	*Sr*
Legeröhre	*Lr*	Winkelplatte	*Wp*

Buchstaben welche sich auf den Pflanzenkörper beziehen.

Bohrloch	*bl*	Eihöhlung	*eh*
Bündelnetz	*bn*	Epidermis	*ep*
Blattrudimente	*br*	Epidermisschuppen	*es*
Blattstrang	*bs*	Zellen der freien Oberfläche des Gallplastems	*fo*
Blatt	*bt*	Farblose Rinde	*fr*
Blattzahn	*bz*	Gefässbündel	*gb*
Collenchymbündel	*cb*	Grüne Rinde	*gd*
Centrale Gefässbündel im Nerven	*cg*	Gallplastem	*gp*
Cryptoblast	*cp*	Gallenrinde	*gr*
Cambialzone	*cz*		

D24

Farblose Hypodermale Zellen	*hd*
Hof	*ho*
Involucrum	*iv*
Knospenachse	*ka*
Kammerloch	*kl*
Kanal	*kn*
Klappen	*kp*
Kruste	*kq*
Krystallschicht	*kr*
Knospenschuppen	*ks*
Zellen des Gallplastems welche dem Larvenkörper berühren	*la*
Kammerlochgewebe	*lg*
Larvenkammer	*lk*
Markparenchym	*mp*
Meristemschicht	*mr*
Markständige Siebbündel	*ms*
Narbe des Kammerloches	*nb*
Nahrungsgewebe	*ng*
Oberfläche des Bodens	*ob*
Obertheil der Knospe	*ok*
Procambium	*pc*
Phloëmbündel	*ph*
Primäres Stärkegewebe	*ps*
Ringtheil der Knospe	*rt*
Sklerenchymfaser	*sf*
Stärkegewebe	*sg*
Secundäres Nahrungsgewebe	*sn*
Saftparenchym	*sp*
Sklerotische- oder Steinzellenschicht.	*ss*
Phellodermartiges Gewebe	*tz*
Vorblatt	*vb*
Vegetationspunkt	*vp*
Xylem	*xl*
Xylemmasse	*xm*

FIGURENERKLÄRUNG.

Die Vergrösserung ist hinter der Rangzahl der Figuren zwischen Klammern angegeben, findet sich daselbst keine Zahl, so bedeutet dieses natürliche Grösse.

TAFEL I.

Die Hieraciigalle Fig. 1—11.
Die Terminalisgalle Fig. 12—16.

Die Hieraciigalle.

Fig. 1 ($\frac{1}{2}$). Eine terminale Galle der Aulax hieracii an Hieracium rigidum; bei *eh* ist der Hohlkanal (Eihöhlung) unter der Galle im Stengel sichtbar.

Fig. 2. Querschnitt einer reifen Galle von Aulax hieracii an Hieracium vulgatum im August; *eh* Eihöhlung, *lk* Larvenkammern welche von einer Steinzellenschicht eingeschlossen sind, *gb* Gefässbündel.

Fig. 3 (13). 28 Juli 1881. Eine junge Larve in ihrer Larvenkammer; *ng* das Nahrungsgewebe, *sp* Saftparenchym, *ss* Schicht sklerotischer Zellen, *gb* Gefässbündel.

Fig. 4 (20). *A*, Legeapparat, *B*, Ei der Aulax hieracii; *Op* oblonge Platte, *Qp* quadratische Platte, *Wp* Winkelplatte, *Sb* Stechborsten, *Sr* Schienenrinne, *Ek* Eikörper, *Es* Eistiel.

Fig. 5 (17). 23 Mai 1881. Längsschnitte von mit Eiern belegten Stengelspitzen von Hieracium rigidum. *a*, mit den Eiern der Aulax hieracii, *b*, nach Entfernung derselben; in der Eihöhlung *eh* liegen die Eikörper nach oben, die Eistiele nach unten gewendet. Als die Figur gezeichnet wurde war die Embryobildung schon angefangen, daher sieht man innerhalb der Eischale den punktirten Nahrungsdotter. *gb* Gefässbündel, *mp* Markparenchym, *vp* Vegetationspunkt der Stengelspitze, *bl* das Bohrloch.

Fig. 6 (110). 21 Mai 1881. Eine junge noch in ihrer Eischale eingeschlossene Larve der Aulax hieracii; das Hautkeimblatt *Ht* zeigt zellige Structur und bei *Os* die Mundanlage, *Nd* der grosse Nahrungsdotter; die Embryonalhaut ist nicht angegeben.

Fig. 7 (10). 20 Juni 1881. Querschnitt eines Stengels mit eben angefangener Gallbildung; die Larven *Lk* liegen vollständig frei in der Eihöhlung *eh*; die dünne braune Decke verdickten Milchsaftes, welche die Eihöhlung anfangs bekleidet (Fig 5), ist durch das Wachsthum des Stengels in Krusten *kq* auseinander gezogen; *ms* markständige Siebbündelchen auf der Innenseite der Gefässbündel; die künftigen Sklerenchymfaserbündel *sf* bestehen noch aus protoplasmaführenden Zellen.

Fig. 8 (8). 29 Juni 1881. Querschnitt einer jungen Galle; das Plastem *gp* bildet an gewissen Stellen Risse in welche die Larven *Lk* sich ansiedeln, *rr* Rissränder, *pc* procambiale Stränge im Gallplastem, *sf* Anlagen der Sklerenchymfaserbündel; *pz* die Partie des Plastems welche in Fig. 10 vergrössert dargestellt ist.

Fig. 9 (16). 18 Juli 1881. Weiter ausgebildete Galle; die Rissränder *rr* haben sich über den Larvenkörper *Lk* zusammengeschlossen und dadurch ist die Larvenkammer *lk* entstanden, *kl* das Kammerloch welches in die Eihöhlung *eh* ausmündet. Die Procambiumbündel *pc* Fig. 8 sind hier in secundäre Gefässbündel *gb* umgewandelt, *xl* Xylem, *ph* Phloëm und Cambium, *sf* Sklerenchymfaserbündel, *fr* farblose Rinde, *gd* grüne Rinde, *cb* Collenchymbündel.

Fig. 10 (237). Das Gallplastem der Partie *pz* Fig. 8; die grossen Zellen mit hervorgewölbter Seitenfläche grenzen an der Eihöhlung; im Plastem hat sich ein Procambiumbündel differenzirt.

Fig. 11. Eine Hieraciigalle, welche aus der Blüthenachse sammt dem Receptaculum eines Blüthenköpfchens von Hieracium vulgatum entstanden war; *eh* Eihöhlung, *lk* Larvenkammern, *gb* Gefässbündel, *mp* Markparenchym und dickwandige Zellen, *iv* Involucrum.

*

Die Terminalisgalle.

Fig. 12. Teras terminalis, *A* (7), Männchen, *B* (7), Weibchen mit rudimentären Flügeln; *C* (12), Legeapparat, *Op* oblonge Platte, *Qp* quadratische Platte, *Wp* Winkelplatte; *D* (12), Ei; *E* (70), Spitze der Legeröhre des Weibchens, *Sr* Schienenrinne mit 5 Sägezähnen, *Sb* glatte Stechborsten.

Fig. 13. Schematische Darstellung der Apteragalle. Die Figur stellt den Querschnitt eines zweijährigen Eichenstämmchens dar dessen Phloëm und Cambialtheil stellenweise in eine Apteragalle umgewandelt ist; in der Galle selbst sind *alle* Gewebeformen angegeben, welche sich in der *zwei*jährigen Lebensdauer derselben ausbilden; *eh* Eihöhlung, *bl* Bohrloch, *ng* Nahrunggewebe, *sg* Stärkegewebe, *ss* Steinzellenschicht (des zweiten Jahres), *sp* Saftparenchym, *gb* Gefässbündel deren Xylemtheil sich an den Holzkörper des Eichenstämmchens ansetzt.

Fig. 14 (8). Biorhiza aptera in eine Eichenknospe Eier legend. Die Knospe ist im unteren Theile der Figur in Längsschnitt, oben perspectivisch gezeichnet; das Thier sitzt darauf mit dem Kopf nach unten und hat die Legeröhre *Lr* tief in dieselbe eingesenkt; die Eier liegen, mit den Stielen nach oben und dem Thiere zugewendet, unter der Schleimdecke *Sl* in der Eihöhlung *eh*; *rt* Ringtheil-, *ok* Obertheil der Knospe.

Fig. 15 (600). Querschnitt der Legeröhre von Cynips kollari (bei Biorhira aptera sind die Verhältnisse nahezu identisch); *Sr* Schienenrinne, *H'* Höhlung derselben, *Sb* die hohlen Stechborsten mit der Höhlung *H*, *r* die Schienen der Schienenrinne worauf die Gruben der Stechborsten genau passen, *K* der Kanal durch welchen das Ei passirt bei dem Eierlegen.

Fig. 16. Perspectivische Ansicht der Legeröhrenspitze der Biorhiza aptera, *Sr* Schienenrinne mit 6 Sägezähnen, *Sb* glatte Stechborsten.

TAFEL II.

Die Terminalisgalle Fig. 17—23.
Die Baccarumgalle Fig. 24—34.

Die Terminalisgalle.

Fig. 17 (12) 6 Januar 1881. Längsschnitt einer Eichenknospe nachdem eine Apterawespe daran während einer Viertelstunde gearbeitet hatte; *rt* Ringtheil, *ok* Obertheil, *vp* Vegetationspunkt, *rt* Ringtheil der Knospe; in der Eihöhlung sieht man eine Reihe von Eiern mit den Stielen nach oben, und alle nach einer Seite — dem Thiere zugekehrt.

Fig. 18 (10) 6 Januar 1881. Eine andere Eichenknospe nachdem die Wespe ihre Arbeit vollendet hatte; *rt* Ringtheil, *ok* Obertheil der Knospe, *vp* deren Vegetationspunkt, *eh* Eihöhlung; die Schleimdecke der Eier ist nicht gezeichnet worden.

Fig. 19 (40). Perspectivische Ansicht einer kleinen Partie des Gallplastems *gp* mit Apteraeiern (Terminalislarven) in verschiedenen Stadien der Ueberwallung. Bei *A* sieht man innerhalb der Eischale die Flüssigkeit *Fl* und den Larvenkörper *Lk* mit dem Nahrungsdotter *Nd*; bei *B* hat die Larve eine buckelartige Ausbuchtung der Eischale verursucht, das Plastem fängt an einen Ringwall um die Larve zu bilden; *C*, mehr als halbwegs von dem Plastem überwallte Larve (entspricht Fig. 20 *A* und *B*); *D*, ein Zustand wie *C* aber nach künstlicher Entfernung der Eischale, welche noch neben der Larve gezeichnet ist; *E*, ein ebensolcher Zustand aber in Profilansicht; *F*, dessgleichen, aber Enfaceansicht; *G*, eine beinahe vollständig von dem Plastem, überwallte Larve mit noch nicht gänzlich geschlossenem Kammerloch (entspricht Fig. 20 *C*).

Fig 20 (45). Längsschnitt einer kleinen Partie des Gallplastems einer Terminalisgalle, wie in Figur 19 perspectivisch dargestelt. *A*, ein früheres Stadium der Ueberwallung, die Eischale hängt noch mit dem Larvenkörper zusammen; *B* und *C*, zwei Ueberwallungsstadien der Larven, welche *C* und *G* der Figur 19 entsprechen; *D*, ein vollständig überwalltes Thier in einer länglichen Larvenkammer, *kl* das Kammerloch letzterer.

Fig. 21 (schwach vergrössert). Perspectivische Ansicht einer jungen Terminalisgalle nachdem die Knospenschuppen von dem Ringtheil *rt* der Knospe entfernt worden sind, und der Obertheil *ok*, für so weit die Eistiele welche damit verklebt sind dieses erlauben, gehoben ist; auf dem Gallplastem *gp* sieht man viele Eistiele, beim Heben des Knospenobertheiles sind einzelne Eier aus dem Gallplastem herausgerissen und hangen an dem Ersteren; zwischen Plastem und Obertheil sind die Eistiele ausgespannt.

Fig. 22 (237) Kleine partie des Gallplastems; *fo* Zellen der freien Oberfläche desselben, *la* Zellen welche dem Larvenkörper berühren, *gb* junge Gefässbündel.

Fig. 23 (12). Längsschnitt einer jungen Terminalisgalle; *rt* Ringtheil der Knospe nach Entfernung der Knospenschuppen, *lk* Larvenkammern, *ng* Nahrungsgewebe, *gr* Gerbstoffzellen der Gallenrinde, *xm* Xylemmassen welche aus dem Ringtheil der Knospe herkünftig sind, *ep* Epidermis, *gb* Gefässbündel, *cz* cambiale Zone.

Die Baccarumgalle.

Fig. 24 (15). Längsschnitt einer jungen Baccarumgalle, rechts und links oben sieht man die querdurchschnittene Blattspreite *bt*. Die Larvenkammer ist ringsum von dem Nahrungsgewebe *ng* eingeschlossen, *nb* Gallennarbe; *lg* Kammerlochgewebe, *gb* Gefässbündel *bs* Blattstrang, *sp* Saftparenchym.

Fig. 25 (20). Längsschnitt einer Lenticularisgalle im September, die Galle hängt mittelst eines feinen Stielchens an der unteren Fläche eines Eichenblattes *bt*, *bs* ein Blattstrang, *eh* Eihöhlung, *bl* Bohrloch, *lk* Larvenkammer, *ng* Nahrungsgewebe, *gb* Gefässbündel, *ss* sklerotische Zellenschicht, *sg* Stärkegewebe, *ep* Epidermis mit Sternhaaren.

Fig. 26 (8). 28 März 1880. Neuroterus lenticularis mit der Legeröhre *Lr* in einer Eichenknospe; *Ek* der Eikörper, der Eistiel findet sich noch in dem Kanal der Legeröhre des Thieres, *Qp* quadratische Platte, *Op* oblonge Platte; *vp* Vegetationspunkt, *rt* Ringtheil der Knospe, *bt* grüne Blätter, *ks* Knospenschuppen.

Fig. 27. Die Spitze der Legeröhre der Lenticulariswespe welche, so wohl auf der Schienenrinne *Sr* wie auf den Stechborsten *Sb*, einige Sägezähne trägt.

Fig. 28 (41). Das Lenticularisei aus dem Körper einer Neuroterus lenticularis genommen, *Ek* der Eikörper, *Es* der theilweise mit dem Eiinhalt angefüllte Eistiel.

Fig. 29 (18). Kleiner Theil einer Knospenachse *ka* mit einem, noch durchmitten gefalzten Blättchen *bt*; zwischen den beiden Hälften der Blattspreite dieses Blättchens sieht man den Eikörper *Ek* eines Lenticulariseies, *Es* der Eistiel desselben welcher von *a* bis zum Ende freipräparirt, dagegen von *a* bis *b* in der Rinde der Knospenachse versenkt ist.

Fig. 30. *a*, *b*, *c*, *d* schematische Darstellungen der Ausbildung des Gallplastems *gp* der Baccarumgalle, und der Ueberwallung des Larvenkörpers; der Einfachheit halber sind die Eistiele weggelassen. *Lk* Larvenkörper, *Nd* Nahrungsdotter, bei *a* liegt der Larvenkörper an der Oberfläche der unveränderten Blattspreite *bt*, bei *d* hat das Gallplastem *gp* den Larvenkörper beinahe vollständig überwallt, *kl* ist also das Kammerloch.

Fig. 31 (42). Längsschnitt einer sehr jungen Baccarumgalle; *nb* die Gallennarbe, *kl* das Kammerloch, *ng* das Nahrungsgewebe welches die Larvenkammer *lk* einschliesst, *gb* Gefässbündel, *sg* dicht mit Stärke angefülltes Gewebe; rechts und links sieht man die querdurchschnittene Blattspreite.

Fig. 32 (10). Perspectivische Ansicht eines Blattes mit einer sehr jungen Baccarumgalle; das Blättchen findet sich noch in der Knospenlage und ist doppelt gefalten, der Eistiel *Es* sticht aus dem Kammerloche des Gallplastems *gp* hervor.

Fig. 33. Halbschematische Darstellungen der Baccarumgalle; *a* und *b*, die normalen Fälle der Befestigung, *a*, in der Mitte, *b*, am Rande der Blattspreite; *c*, eine Galle welche aus der Rinde eines Zweiges entstanden ist, *d*, eine Galle, welche nicht wie gewöhnlich durch das Blatt gewachsen ist, sondern sich darauf, wie auf einem Zweige, erhoben hat; *nb* Narbe, *ng* Nahrungsgewebe, *gb* Gefässbündel.

Fig. 34. In *a* (22) ist der Fall schematisch dargestellt wo das Lenticularisei genau

über der Mitte einer Blattkerbe gelegt ist, *α* ist der zwischen dem Eie und der Blattspreite offen gebliebene Raum der Kerbe; durch punktirte Linien sind unterhalb des Eies die beiden Spreitenpartiën, aus welchen das Plastem hervorgeht angewiesen; *b*, Eine Galle welche an den beiden Blattlappen zu gleicher Zeit befestigt, und durch ein, wie in *a* gelegenes Ei, erzeugt ist, *α* ist der offene Raum der Kerbe zwischen der Galle und der Blattspreite; oben auf der Galle erblickt man die Narbe.

TAFEL III.

Die Taschenbergigalle Fig. 35—41.
Die Foliigalle Fig. 42—53.

Die Taschenbergigalle.

Fig. 35 (10). Eine Eierlegende Foliiwespe an einem Eichenstämmchen, mit der Legeröhre *Lr* in einem Cryptoblasten *cp* versenkt; *ob* Oberfläche des Bodens, *vp* Vegetationspunkt des Cryptoblasten, *Ek* Eikörper.

Fig. 36 (15). *A*, Legeapparat der Foliiwespe, *Lr* die Legeröhre, *Op* die oblonge, *Qp* die quadratische Platte, *Wp* die Winkelplatte; *B*, das Foliiei, *Es* der Eistiel, *Ek* der Eikörper.

Fig. 37. Halbschematische Darstellung der Bildung des Gallplastems der Taschenbergigalle, die Eischalen und Eistiele der Einfachheit halber weggelassen. *a*, Larvenkörper *Lk* mit Nahrungsdotter *Nd* auf dem Vegetationspunkt *vp*; *b*, alles wie in *a*, doch fängt das Meristem an einen Ringwall um den Larvenkörper zu bilden; *c*, das Gallplastem *gp* hat schon so weit den Larvenkörper überwallt, dass man von einem Kammerloch *kl* reden kann; *d*, das Kammerloch *kl* hat sich vollständig geschlossen, und im Larvenkörper *Lk* zeigen sich schon Ringe.

Fig. 38 (10). Eine junge Taschenbergigalle in April; *nb* Narbe des Kammerloches, *lg* Kammerlochgewebe *, *lk* Larvenkammer, *ng* das Nahrungsgewebe, *sg* das Stärkegewebe, *gb* Gefässbündel, *ep* die in Haare umgewandelte Epidermis, *ks* Knospenschuppen des Cryptoblasten.

Fig. 39 (200). Horizontaler Querschnitt der Gallenwand durch den Mittelpunkt der Larvenkammer; *ep* die in zurückgekrümmte Haare umgewandelte Epidermis, *sg* das Stärkegewebe, *ng* das Oel und Eiweiss-führende Nahrungsgewebe.

* Die Linie bei *lg*, welche nach dem Kammerlochgewebe hinweist, müsste etwas länger und ein wenig höher gezeichnet worden sein, sodass ihr Ende vertical unter *nb* läge.

Fig. 40 (13). Eine junge Galle, zur Erläuterung der Blattrudimente *br* und der Gallennarbe *nb*.

Fig. 41 (2). Eine »gestielte" Taschenbergigalle, an einer Sprossspitze.

Die Foliigalle.

Fig. 42 (9). Ein Taschenbergiweibchen auf der Unterseite eines Eichenblattes im Begriff ihre Legeröhre *Lr* in den Mittelnerven des Blattes zu stechen.

Fig. 43 (26). *A*, Legeapparat der Taschenbergiwespe, *Lr* dieLegeröhre, *Op* die oblonge Platte, *Qp* die quadratische Platte, *Wp* die Winkelplatte; *B*, das Taschenbergiei, *Ek* Eikörper, *Es* Eistiel.

Fig. 44—47 (13). Halbschematische Darstellungen der Bildung des Gallplastems der Foliigalle. In allen diesen Figuren ist *gg* die Grenze des Blattgrüngewebes der Spreite, *cb* Collenchymbündel, *sf* Anlagen der Sklerenchymfaserbündel, *ph* Gefässbündelphloëm, *cg* einige, dem Centrum des Nerven nahe liegenden Gefässbündel, welche ihre Xylemtheile nach der Oberseite des Blattes hinwenden.

Fig. 44. Das Taschenbergiei liegt in der Mitte des unveränderten Nerven.

Fig. 45. Die Bildung des Plastems *gp* aus dem Phloëm der benachbarten Gefässbündel ist angefangen.

Fig. 46. Entstehung des Plastemkanales *kn* zwischen Larvenkörper *Lk* und Gallplastem *gp*.

Fig. 47. Der Larvenkörper hat seine ursprüngliche Lage verlassen, und sich bis an das entgegengesetzte Ende des Plastemkanales fortbewogen, die Eihöhlung *eh* ist dabei mit einem Callusartigen Gewebe vollgewachsen.

Fig. 48 (26). August 1881. Darstellung der Anlage einer Ostreusgalle; diese Art ist besonders geeignet zur Demonstration der Kanalbildung *kn*. Der Larvenkörper *Lk* ist noch in seiner ursprünglichen Lage und das Gallplastem *gp* von einem, der Ostreusgalle eigenthümlichen Klappenapparat *kp* eingeschlossen; *bl* Narbe des Bohrloches *ph* Gefässbündelphloëm.

Fig. 49. Junge Foliigalle in natürlicher Grösse auf der Unterseite eines Eichenblattes; *bl* die äusserlich sichtbare Narbe des Bohrloches.

Fig. 50 (22). Längsschnitt eines Nerven, welcher eine reife Foliigalle trug, parallel zur Blattspreite; unterhalb der Galle findet sich im Nerveninnern die vollständige Pseudomorphose

des Taschenbergieies; *eh* die Eihöhlung, welche mit einem callusartigen Gewebe vollgewachsen ist, *ho* ein Hof grösserer Zellen welche die Eihöhlung einschliessen.

Fig. 51 (58). Längsschnitt der Befestigungsstelle einer jungen Foliigalle vertical zur Längsachse des Nerven, *cg* centrale Gefässbündel des Nerven; *eh* die mit Callus vollgewachsene Eihöhlung; *xl* Xylembündel, *kn* der durch Gewebewachsthum geschlossene Gallkanal (Kammerloch), *lg* das Kammerlochgewebe, *lk* Larvenkammer, *ng* das Nahrungsgewebe, *ss* die Steinzellenschicht, *gb* Gefässbündel.

Fig. 52 (10). Längsschnitt einer jungen Foliigalle parallel zur Achse des Nerven; *bl* Narbe des Bohrloches, *eh* Eihöhlung, *ho* der Hof grösserer Zellen, welche die Eihöhlung einschliessen, *lk* Larvenkammer, *ng* Nahrungsgewebe, *ss* Steinzellenschicht, *gb* gefässbündel.

Fig. 53 (200). Das callusartige Gewebe in der Eihöhlung *eh*.

TAFEL IV.

Die Foliigalle Fig. 54—58.
Die Megapteragalle Fig. 59—66.
Die Kollarigalle Fig. 67—74.

Die Foliigalle.

Fig. 54 (14). Längsschnitt einer jungen Foliigalle vertical zur Nervenachse, das Taschenbergiei ist im Nerven unterhalb der Galle schematisch angegeben; *eh* die Eihöhlung, *sf* Sklerenchymfaserbündel, *gb* die verzweigten Gefässbündel, *lk* Larvenkammer, *ng* Nahrungsgewebe, *ss* Steinzellenschicht.

Fig. 55 (330). Das primäre Nahrungsgewebe *ng* und die Steinzellenschicht *ss*, welche die Larvenkammer bekleiden, einem ähnlichen Präparate wie in der Figur 52 dargestellt, entlehnt.

Fig. 56 (6). Horizontalschnitt einer 6.6 m.M. dicken Galle in welcher die Dehnung der Steinzellenschicht *ss* anfängt, *gb* Gefässbündel, *ng* primäres Nahrungsgewebe, *lk* Larvenkammer.

Fig. 57 (55). Ende Juli 1881. Darstellung des Nahrunggewebes einer 7 m.M. dicken Galle. Auf dem Radius *mr* findet man von innen nach aussen Folgendes: Zuerst ein noch nicht zernagter Rest des primären Nahrungsgewebes; weiter das durch die Dehnung der Steinzellenschicht entstandene Gewebe dessen Zellen Eiweis, Oel, Stärke und Vacuolen führen; endlich, auf der Aussenseite des Nahrungsgewebes, Zellen deren Wände, besonders die dem Mittelpunkt der Larvenkammer zugekehrten, sich zu verdicken

anfangen. Auf dem Radius *mq* hat das Thier das primäre Nahrungsgewebe gänzlich zernagt, daher liegen die sklerotischen Zellen unmittelbar an der inneren Oberfläche; die Vacuolen sind überall verschwunden und die Stärke findet sich nur noch in den äusseren Schichten des secundären Nahrungsgewebes, so weit möglich von der Frassstelle der Larve entfernt. Die Détails sind nur auf dem Radius *mr* gänzlich ausgeführt.

Fig. 58 (330). Kleine Partie des jungen secundären Nahrungsgewebes mit den eingestreuten sklerotischer Zellen. Bei *zs* sieht man dickwandige Zellen der Aussenschicht der Galle, welche offenbar durch Dehnung primärer sklerotischer Zellen entstanden sind.

Die Megapteragalle.

Fig. 59. (Verkleinert). Verschiedene Stellungen der Megapteragalle. Unten links (β) und rechts (α) sieht man den gewöhnlichen Fall, das heisst, auf dem Ringtheil von Cryptoblasten ruhende Gallen, *br* Blattrudimente, *nb* Gallennarbe; oben links (ε) ersetzt eine Galle den Vegetationspunkt eines verlängerten Sprosses. Auf der rechten Seite ist ein verlängerter Spross dargestellt mit zwei Gallen; die untere derselben (δ) ist durch Umwandlung einer Blattspreite entstanden, sie wird von einem kurzen Blattstiele getragen, besitzt zwei Nebenblätter und zeigt eine Knospe in ihrer Achsel. Die obere Galle (γ) vertritt eine solche secundäre Seitenknospe, steht daher in der Achsel eines grünen Blattes mit zwei unveränderten Nebenblättern.

Fig. 60 (370). Gallplastem aus dem Rande des Kammerloches einer noch nicht oberhalb des Larvenkörpers geschlossenen Megapteragalle; *fo* Zellen der freien Oberfläche, *la* Zellen welche dem Larvenkörper berühren.

Fig. 61 (45). März 1880. Längsschnitt einer jungen Galle; *rt* Ringtheil der Knospe, *ks* Knospenschuppen, *nb* Narbe des Kammerloches, *lg* Kammerlochgewebe, *lk* Larvenkammer, *ng* Nahrungsgewebe, *gb* Gefässbündel, *br* Blattrudimente.

Fig. 62—66. Successive Querschnitte junger Megapteragallen, welche den Niveau's *62*, *63*, *64*, *65* und *66* der Figur 61 entsprechen.

Fig. 62 (55). Querschnitt des Ringtheiles (*rt* Fig. 61) unterhalb der Galle, mit geschlossenem Holzring.

Fig. 63 (55). Wie die vorige Figur; der Holzring löst sich in gesonderte Stränge.

Fig. 64 (33). Querschnitt des Gallennabels; die Holzstränge haben sich in fünf Gruppen angeordnet.

Fig. 65 (33). Querschnitt der unteren Hälfte der jungen Galle; *lk* die Larvenkammer, *gb* eines der sechs Gefässbündel, *xl* centrales Xylem und *ph* peripherisches Phloëm eines der Gefässbündel.

Fig. 66 (33). Querschnitt der oberen Hälfte der jungen Galle; *lk* die Larvenkammer, *xl* Xylem und *ph* Phloem eines der dreizehn Gefässbündel.

Die Kollarigalle.

Fig. 67. 12 August 1881. Ein Zweig von Quercus pedunculata mit ausgewachsenen Kollarigallen (verkleinert); durch zeitiges Abschneiden der Zweigspitze oberhalb der höchsten Galle, *α*, ist die Seitenknospe, aus deren Basis die Galle entstand, zum Treiben gebracht, die drittobere Galle, *γ*, zeigt diese Seitenknospe *ks* in geschlossenem Zustand neben sich. Die zweitobere, *β*, zeigt ringsum die Narbe *nb* sieben ziemlich regelmässig angeordnete Höcker. Die untere, *δ*, ist eine gewöhnliche Doppelgalle.

Fig. 68. Ende Juni. Ein Zweig mit jungen Kollarigallen, welche noch ihre conische Spitze und violette Farbe besitzen; im Blattstiel unter den Gallen sieht man bei *bl* die Narbe des Bohrloches, *vb* Vorblatt der Seitenknospe in dessen Achsel die Galle sitzt, *nb* Narbe des Kammerloches.

Fig. 69 (33). Februar 1881. Secundäre (in einer Grosstriebknospe verschlossene) Seitenknospe mit einem Kollariei. *Lk* Larvenkörper innerhalb der Eischale, *Nd* dessen Nahrungsdotter, *Es* Eistiel, *vp* Vegetationspunkt, *vb* ein Vorblatt der Seitenknospe.

Fig. 70—72 (13). Schematische Darstellung der Plastem- und Kammerbildung der Kollarigalle.

Fig. 70. Ei in der Achsel eines Knospenblattes *bt* neben einer secundären Seitenknospe; im Bohrloch *bl* des Blattstiels findet sich der Eistiel *Es*; *Ek* Eikörper, *ka* Knospenachse der Primär-, *ks* Knospenschuppen der Secundärknospe.

Fig. 71. Anfang der Plastembildung *gp* aus der Basis der Secundärknospe ringsum den Larvenkörper *Lk*.

Fig. 72. Weiter entwickelter Zustand des Plastems, der Larvenkörper ist schon beinahe vollständig vom Plastem aufgenommen.

Fig. 73 (13). 9 Juni 1881. Eine sehr junge Galle in der Terminalknospe eines Eichensprösschens; *nb* Narbe des Kammerloches, *lk* Larvenkammer, *ng* Nahrungsgewebe, *ks* Knospenschuppen, *vp* Vegetationspunkt.

Fig. 74 (13). 20 Juni 1881. *a*, Längsschnitt einer jungen Galle durch die Narbe *nb* und die Mitte der Larvenkammer *lk*, der Spross *ka* ist quer, der Blattstiel *bt* in die Länge durchschnitten; *bl* Bohrloch, *vb* Vorblatt der Seitenknospe, *gb* Gefässbündel. *b*, Querschnitt der nämlichen Galle, *lk* Larvenkammer, *ng* Nahrungsgewebe, *kr* Krystallschicht, *gb* die in Ringlage angeordneten Gefässbündel.

*

TAFEL V.

Die Kollarigalle Fig. 75—88.

Fig. 75 (10). 30 Juni 1881. Längsschnitt einer median nach vorn, an der Basis einer Secundärknospe entstandenen Galle; *bl* Bohrloch im Blattstiel unter der Galle, *ks* Knospenschuppen der Seitenknospe, *ka* Sprossachse, *nb* Narbe des Kammerloches, *gb* Gefässbündel, *ep* Epidermis mit einzelligen Haaren, *gr* gerbstoffführende Rinde, *cz* Cambialzone, *ps* primäres Stärkeparenchym, *kr* Krystallschicht, *ng* Nahrungsgewebe, *lk* Larvenkammer.

Fig. 76 (7). 2 Juli 1881. Längsschnitt einer weiter entwickelten Galle an querdurchschnittener Sprossachse *ka*, *vb* Vorblatt der Knospe *ks*, *sg* secundäres, aus der Cambialzone *cz* entstandenes Stärkegewebe, *bn* Gefässbündelnetz.

Fig. 77—80 (15). 2 Juli 1882. Querschnitte der in Figur 76 in Längsschnitt dargestellten Kollarigalle, respective den durch *77*, *78*, *79* und *80* angegeben Niveaus entsprechend.

Fig. 77. Die Epidermis hat sich in Schuppen *es* vertheilt; *gr* die gerbstoffführende Rinde, von den primären Gefässbündeln *gb* strahlen Zweige *gb* aus bis in die Cambialzone *cz*.

Fig. 78. Schnitt unterhalb der Gallennarbe, wo sich die Gefässbündel zerstreut vorfinden.

Fig. 79. Schnitt in unmittelbarer Nähe der Narbe zur Demonstration der Gefässbündel und des Kammerlochgewebes *lg*.

Fig. 80. Schnitt durch den Gallennabel mit dem Gefässbündelgeflecht; *bt* Blattstiel, *ks* Secundärknospe.

Fig. 81 (276). Entspricht der Partie *81*, welche zwischen den zwei parallelen Linien der Figur 75 gelegen ist; man denke sich die beiden Theilfiguren mit einander verbunden, wie durch die Pfeile angegeben. *ng* primäres Nahrungsgewebe, *kr* Krystallschicht, *ps* primäres Stärkegewebe, *cz* Cambialzone, *gr* Gerbstoffrinde, *gb* Gefässbündel, *mr* Meristemschicht, *hd* farblose hypodermale Zellen, *ep* Epidermis mit ein zelligen, einen rothen Saft führenden Haaren.

Fig. 82 (8) 13 Juli 1881. Ausdehnung und Anordnung der Gewebe auf einem Horizontalschnitt einer nahezu Centimeter dicken Galle; für die Buchstabenerklärung sei nach Fig. 75 und Fig. 76 verwiesen.

Fig. 83 (240). Die Partie *83* voriger Figur; die Epidermis ist abgeworfen, *mr* das Hautmeristem, darunter das Gewebe *tz* mit zahlreichen Chlorophyllkörnern.

Fig. 84 (240). Die Partie *84* der Figur 82, *sg* secundäres Stärkegewebe mit noch

nicht vollständig ausgewachsenen Stärkekörnern, *cz* Cambialzone, *pc* Procambiumstrang.

Fig. 85 (6). 25 Juli 1881. Querschnitt der verschiedenen Nahrungsgewebe einer c.a. 2 c.M. dicken Galle. Bei *ng* findet sich noch ein kleiner Theil des primären Nahrungsgewebes; *sn* ist secundäres, durch Umwandlung secundären Stärkegewebes entstandenes Nahrungsgewebe; *sg* unverändertes secundäres Stärkegewebe, anscheinend durch *ng* gegen die Wirkung des Thieres geschützt.

Fig. 86 (240). Die Partie *86* voriger Figur; *sn* secundäre Nahrungszellen mit »braunen Körpern", *sg* secundäre Stärkezellen mit in Lösung begriffenen Stärkekörnern.

Fig. 87 (240). »Braune Körper" in Kalilauge angeschwollen; α, mit sternförmig gespaltener-, β, mit geschlossener Schale, γ, mit theilweise heraustretendem Inhalt.

Fig. 88 (200). Die Partie *88* der Figur 85; *sn* secundäre Nahrungszellen mit ein oder zwei »braunen Körpern", *ss* secundäres Steinzellengewebe zum Schutz der Larvenkammer, *gb* Gefässbündelzweig; in einigen dünnwandigen Zellen liegen grosse Krystalle.

TAFEL VI.

Die Orthospinaegalle Fig. 89—100.

Fig. 89 (½) August 1880. Ein Zweig von Rosa canina mit ausgewachsenen Orthospinaegallen, nach im Garten cultivirtem Materiale gezeichnet. Oben links eine Blüthe, welche vollständig in eine Galle umgewandelt ist; daneben eine Blüthe welche nur an den Kelchzipfeln Gallen trägt; unten verschiedene, auf Blättern enstandene Formen.

Fig. 90. Legeapparat und Ei der Orthospinaewespe; *A* (16), die oblonge Platte *Op* mit der Schienenrinne *Sr*; *B* (16), die quadratische Platte *Qp* mit der Winkelplatte *Wp* und dem Stechborsten *Sb*; *C* (26), das Ei dessen Eikörper *Ek* die Kittmasse *Km* aufzeigt, *Es* der Eistiel; *D* (120), unterer Pol des Eikörpers mit der Kittmasse *Km* stärker vergrössert, *g* Gelenkfläche der quadratischen Platte, *gk* Gelenkkopf der Winkelplatte, *gl* Gelenkfläche der oblongen Platte.

Fig. 91 (13). Inneres einer jungen Sprossknospe von Rosa canina mit Orthospinaeeiern unter jedem Eie ist die Plastembildung eben angefangen. Die Blättchen sind in der Knospenlage durchmitten gefalten und tragen die Eier auf der Rückenseite und am Rande; *Es* Eistiel, *Ek* Eikörper, *gp* Gallplastem.

Fig 92 (15). Ein einzelnes durchmitten gefaltenes Blättchen mit Eiern belegt, unter jedem Eikörper *Ek* eine Kittmasse *Km*, *Es* Eistiel.

Fig. 93 (13). Hemmender Einfluss der Orthospinaeeier auf das Wachsthum der einen Hälfte einer durchmitten gefaltenen Spreite eines Rosenblättchens; *Es* Eistiel, *Ek* Eikörper, *gp* Gallplastem.

Fig. 94 (13). 30 Mai 1881. Spitze eines durchmitten gefaltenen Rosenblättchens mit zwei halbeingewachsenen Thieren, das Blättchen ist in Folge der Wachsthumshemmung im Mittelnerven etwas zurückgekrümmt. Die Blattzähne tragen rothe Drüsen und das Plastem aus welchem die Eischalen halbwegs hervorragen fängt an Stacheln zu bilden.

Fig. 95 (117). Regelmässige Anordnung von Orthospinaeeiern auf den Zähnen *bz* eines Blattrandes; *Km* Kittmasse, *Es* Eistiel, innerhalb der Eischale der Larvenkörper *Lk* mit dem Nahrungsdotter *Nd*.

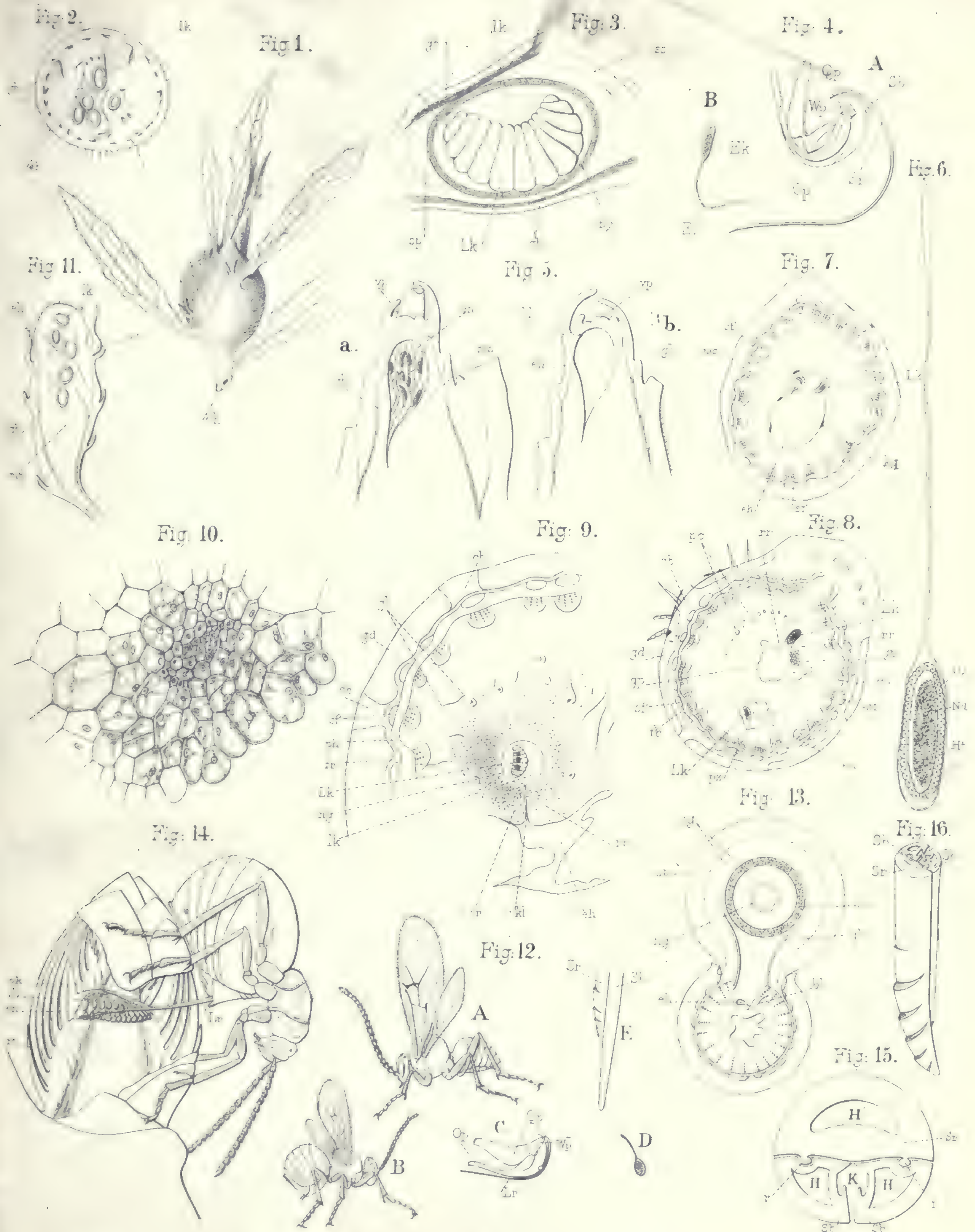
Fig. 96 (85). Optischer Längsschnitt durch eine sehr junge Larve; *bz* Blattzähne, *gp* Gallplastem, *Km* Kittmasse, *Es* Eistiel, *Et* Ektoderm (?) mit zelliger Structur, *Ms* Meso- und Endoderm (?), *Nd* Nahrungsdotter, *Os* Mundanlage.

Fig. 97 (370). Eine Partie voriger Figur stärker vergrössert. Das Gallplastem *gp* umfasst die zu einer feinen Spitze zusammengepresste Eischale; *Km* die Kittmasse, *Fl* Flüssigkeit innerhalb der Eischale, *Am* Faltenhautblatt (ursprüngliches Blastoderm mit Amnion?), *Et* Ektoderm (?), *Ms* Mesoderm sammt Endoderm (?), *Nd* Nahrungsdotter (Dotterballen), *Os* Mundanlage.

Fig. 98 (80). Eine halbwegs von dem Gallplastem *gp* überwallte Larve *Lk* von Rhodites rosae, mit theilweise abgestreifter Eischale, deutlich erkennbarer Segmentirung, Nahrungsdotter und Chitinkiefern; *bz* Blattzahn, *Es* Eistiel.

Fig. 99 (20). Schnitt durch eine sehr junge Galle, welche auf der Basis des Blattzahnes *bz* des Blättchens *bt* sitzt; die Linien versinnlichen die Anordnung der Zellenreihen; *nb* die Gallennarbe, *ng* das Nahrungsgewebe.

Fig. 100 (5). Eine etwas ältere Galle in Längsschnitt, deren Oberfläche mit Stacheln bewachsen ist, welche jede ein Gefässbündel erhalten; *bt*, *bt* Blattspreite in Querschnitt; *nb* die Gallennarbe, *gb* Gefässbündel, *cz* meristematische Schicht, *ng* Nahrungsgewebe, *lk* Larvenkammer.



Lith. Geb. Reimeringer, Amst.


Fig 17.

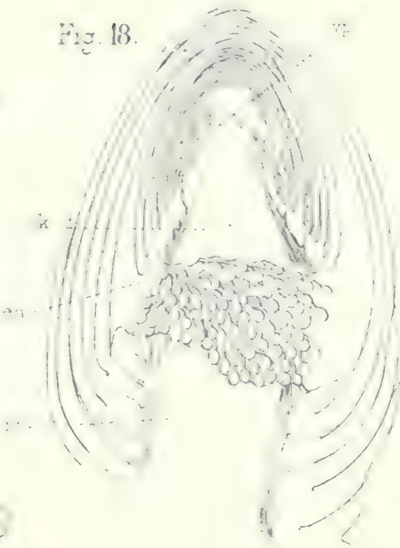
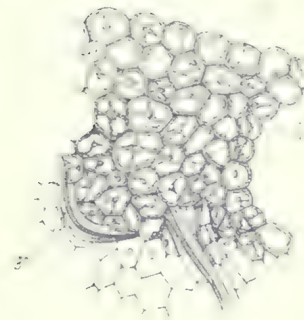
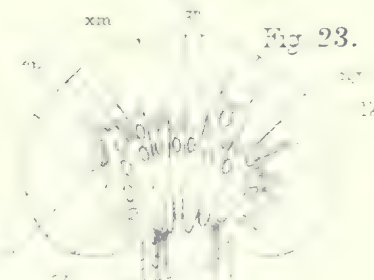
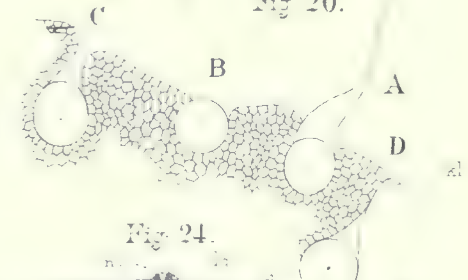

Fig. 18.

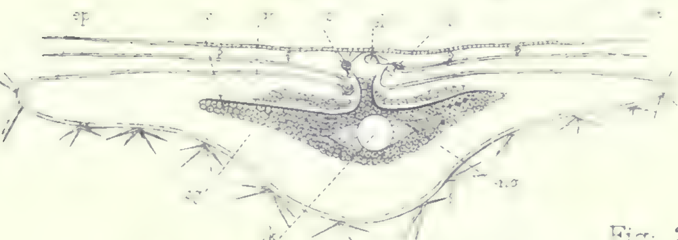

Fig 19.


Fig 21.


Fig 22.


Fig 23.


Fig 20.


Fig: 25.

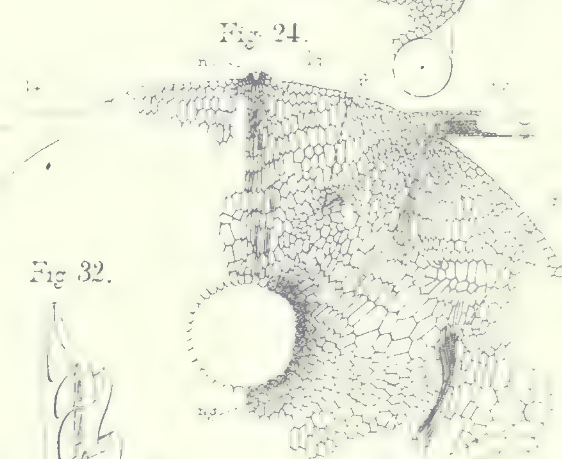

Fig 24.


Fig 32.


Fig: 26.

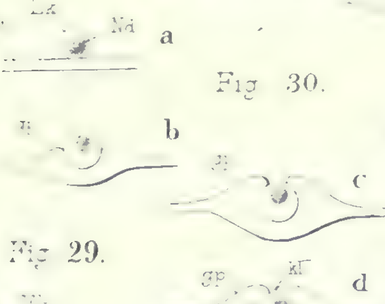

Fig 30.


Fig 29.


Fig 31.


Fig 27. Fig 28.

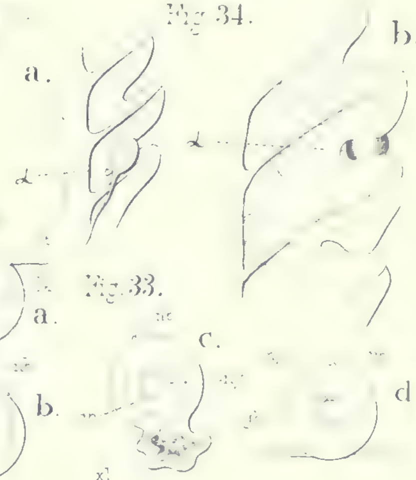
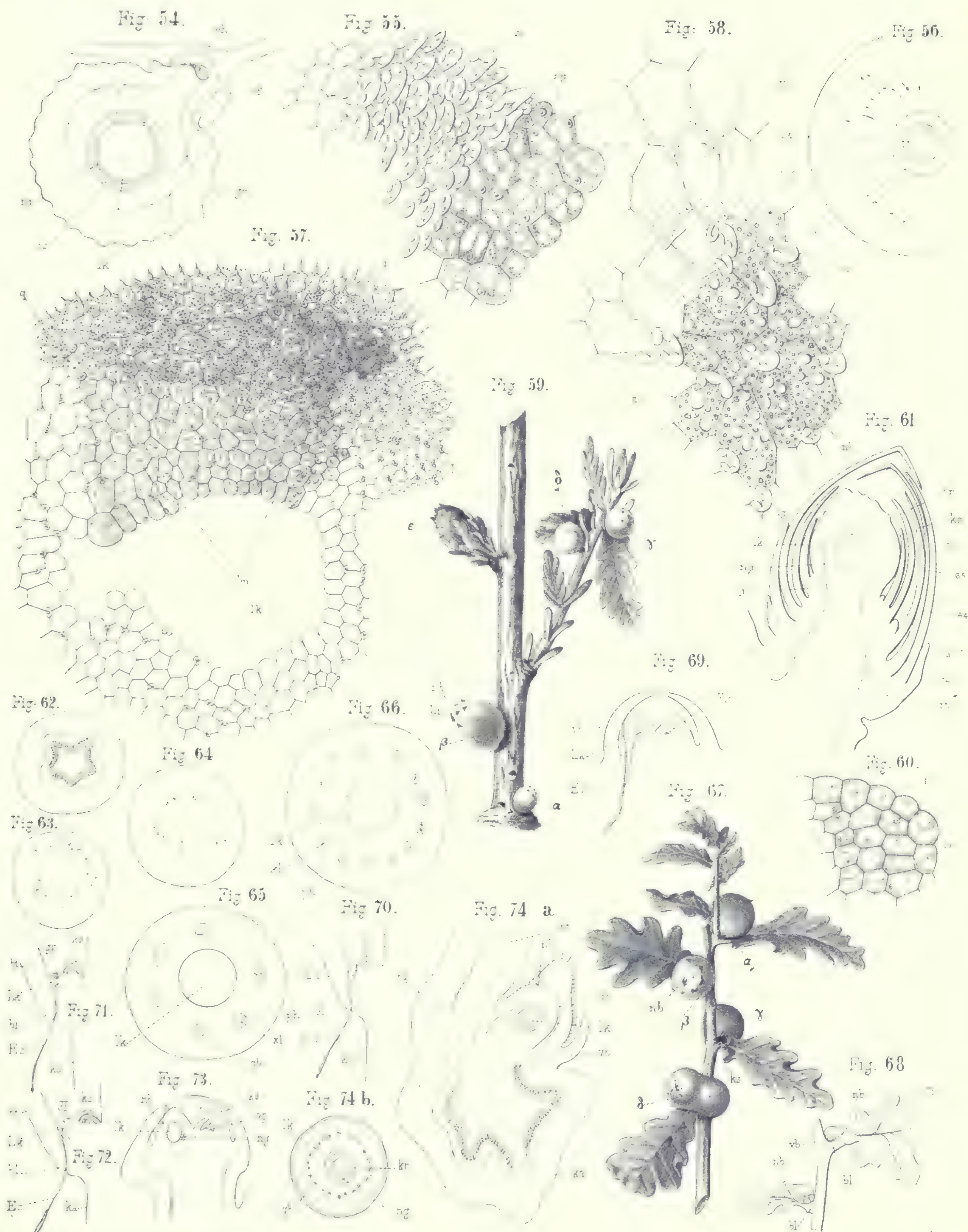
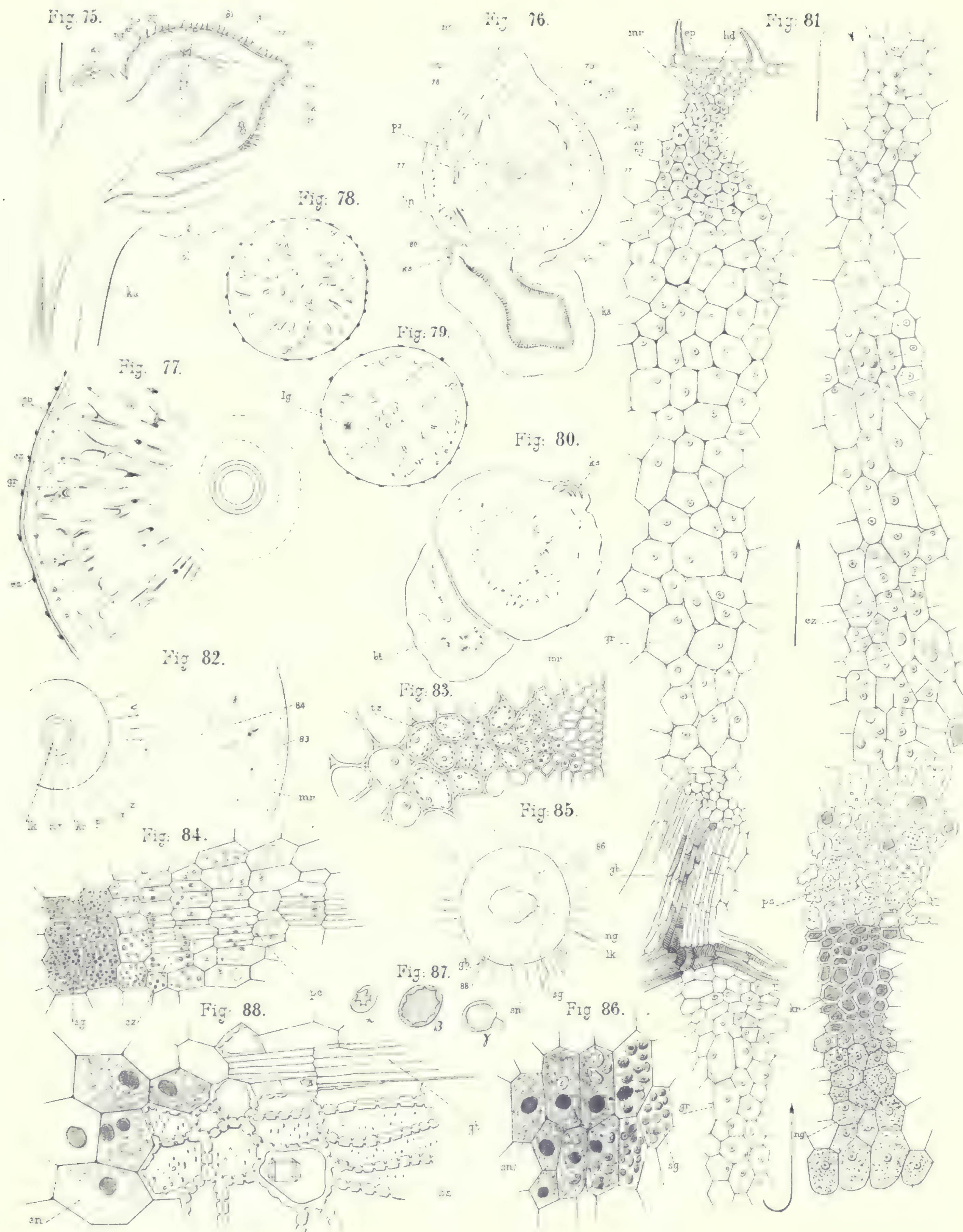

Fig 34.


Fig 33.

Lith: Geb! Reimeringer, Amst:




Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 58.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 59.
Fig. 61
Fig. 69.
Fig. 62.
Fig. 64
Fig. 66.
Fig. 60.
Fig. 67.
Fig. 63.
Fig. 65
Fig. 70.
Fig. 74 a.
Fig. 71.
Fig. 68
Fig. 73.
Fig. 74 b.
Fig. 72.



Lith: Gebr. Reimeringer, Amst.


Fig. 89.

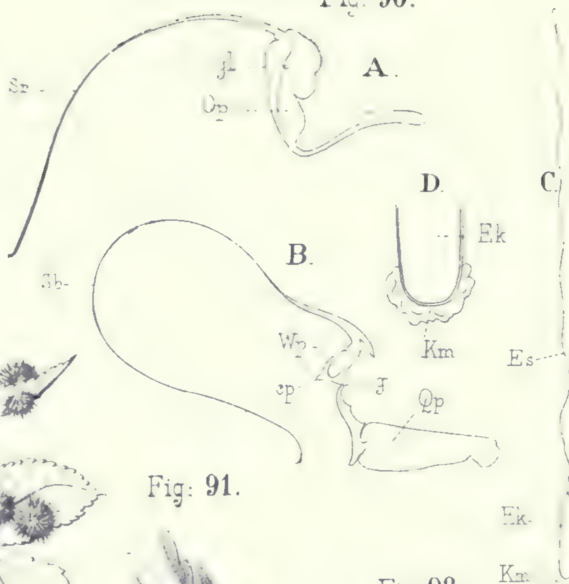


Fig. 90.

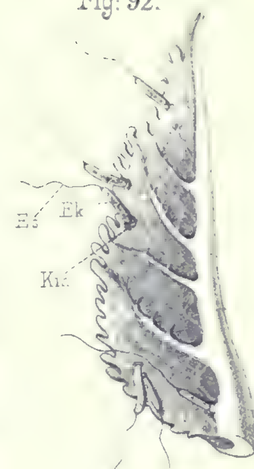


Fig. 92.



Fig. 91.



Fig. 98.


Fig. 93



Fig. 94

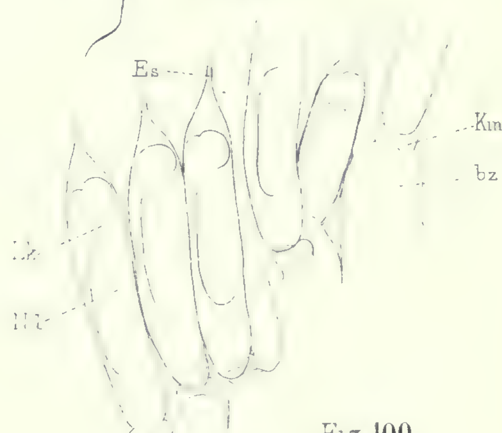


Fig. 95.

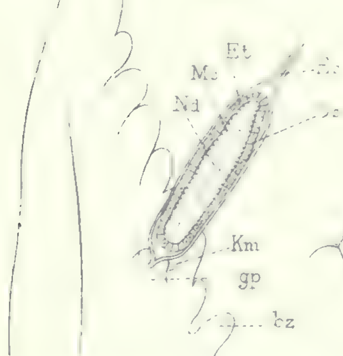


Fig. 96.

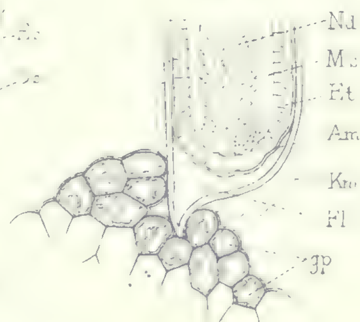


Fig. 97.



Fig. 99.

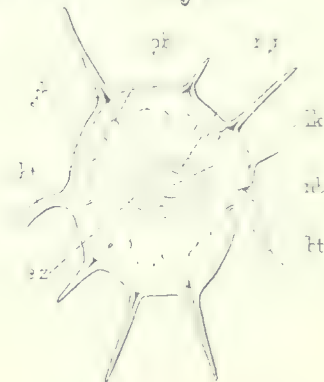


Fig. 100.

Lith: Gebr. Reimeringer, Amst:

UEBER DIE MESODERMSEGMENTE

UND DIE ENTWICKELUNG DER

NERVEN DES SELACHIERKOPFES.

VON

Dr. J. W. VAN WIJHE,

Assistent an dem zootomischen Laboratorium in Leiden.

Diese Arbeit ist eine Erweiterung der Untersuchungen BALFOURS über den nämlichen Gegenstand, dessen Beschreibung in seiner berühmten Monographie * enthalten ist. Die Kenntniss eines Theiles des von mir behandelten Gebietes ist sehr gefördert durch die belangreiche Arbeit von MILNES MARSHALL †, die er später § fortgesetzt hat, und welche gerade erschien, als ich, zufolge eines Auftrags der niederländischen Regierung, in die zoologische Station zu Neapel arrivirt war, um die zu meinem Zwecke erforderlichen Präparate anzufertigen. Letzteres geschah nach einer der in der Station gebräuchlichen Methoden: Tödtung des Embryo's und Fixirung seiner Gewebe in conzentrirter Sublimatlösung; Kernfärbung mit Alaun- oder Boraxcarmin; stufenweiser Entwässerung in Alcohol;

* BALFOUR, A Monograph on the Development of Elasmobranch Fishes. 1878 (Wenn keine andere Arbeit angegeben ist, wird diese beim Citiren gemeint).

† MILNES MARSHALL, On the Head-Cavities and associated Nerves of Elasmobranchs. *Quart. Journ. of Mikr. Sc.* Vol. XXI. 1881, erstes Heft. (Ueber das Citiren sieh die erste Anmerk.).

§ MILNES MARSHALL and BALDWIN SPENCER, Observations on the cranial Nerves of Scyllium. *Quart. Journ. of Mikr. Sc.* Vol. XXI. 1881, drittes Heft.

Durchtränkung mit einem Gemisch von Terpentinöl und Creosot; Einbettung in Paraffin; Anfertigung der Schnitserien mittels eines Spengelschen Mikrotomes und Einschliessung der meistens $^1/_{60}$ m.M. dicken Schnitte in Canadabalsam.

Das mir zu Gebote stehende Material — für dessen freundliche Beschaffung ich Herrn Prof. DOHRN und der Verwaltung seiner Station meinen besten Dank ausspreche — bestand fast ausschliesslich aus Eiern von Scyllium und Pristiurus. In der Andeutung der Stadien folge ich den Bezeichnungen BALFOURS. Der Sprung zwischen den Stadien I und K scheint mir aber, wegen der belangreichen Veränderungen, welche in diesem Intervalle auftreten, zu gross, worum ich zwischen beide ein Stadium J interponire.

Im Folgenden werde ich erst die Mesodermsegmente des Kopfes, dann die Entwickelung seiner Nerven behandeln.

I. Die Mesodermsegmente des Kopfes.

BALFOUR hat zuerst nachgewiesen, dass sich die primäre * Leibeshöhle bis an das Vorderende des Darmes in den Kopf erstreckt. Durch die Bildung der sechs Kiementaschen werde der Kopftheil der Leibeshöhle in sechs hinter einander befindliche Stücke getheilt, von denen jedes in einem Visceralbogen † liege. Ausserdem enthalte auch der siebente (letzte) Visceralbogen ein ähnliches Stück, und entstehe vor dem Munde noch eine „prämandibulare Höhle", sodass der Kopf in maximo, acht dieser Bildungen besitze.

Eine andere Metamerie des Kopfmesodermes hat BALFOUR nicht mit Sicherheit wahrgenommen. Allerdings hat er am Hinterkopfe Muskelsegmente observirt; von diesen sagt er aber: § „Not far behind the auditory involution there are visible ad the end of period K a few longitudinal muscles, forming about three or four muscle-plates, the ventral part of which is wanting. I have not

* Die primäre Leibeshöhle besteht, wie BALFOUR dargethan hat, aus einem dorsalen und einem ventralen Cölom. Das dorsale zerfällt bei der Segmentation in eine Reihe von Höhlen, von denen jede sich in einem Mesodermsegmente befindet und anfangs mit dem ventralen Cölom communicirt, bald aber von diesem abgeschnürt wird, später die Höhle eines Muskelsegmentes bildet und schiesslich abortirt. Nach der Abschnürung der Mesodermsegmente, bildet das ventrale Cölom die secundäre Leibeshöhle; sie befindet sich zwischen den beiden Blättern der Seitenplatten.

† Nur die Höhle des Kieferbogens sowie diejenige des Zungenbeinbogens besitzt einen dorsalen, über den Kiemenspalten befindlichen, erweiterten Theil.

§ BALFOUR, l. c. p., 209.

the means of deciding whether they properly belong to the head, or may not really be a part of the trunk system of muscles, which has, to a certain extent, overlapped the back part of the head, but am inclined to accept the latter view".

Milnes Marshall, welcher Balfour in Betreff der Bildung der Kopfhöhlen bestätigt, hat ausserdem gefunden, dass im Anfang des Stadiums I, wenn schon drei Kiementaschen angelegt sind, der dorsale Theil der Hyoidhöhle vorn noch mit dem dorsalen Theile der Kieferhöhle und hinten mit dem dorsalen der primären Leibeshöhle continuell zusammenhänge, bald darauf aber durch Spalten von denselben getrennt werde, unabhängig von den Kiementaschen. Demzufolge existire im vorderen Kopftheile eine von den Kiementaschen unabhängige Metamerie. In wiefern diese mit der Segmentation im Rumpfe homolog sei, lässt Milnes Marshall unentschieden. Ich kann diese Wahrnemungen bestätigen *, und hinzufügen, dass kurz nach dem Anfang von Stadium I, wenn die dritte Kiementasche eben angelegt ist, der dorsale Theil des Mesodermes im ganzen späteren Kopfe, ebenso wie im Rumpfe, unabhängig von den Kiementaschen in Segmente zerfallen ist. Da es nun in diesem Capitel der Hauptzweck ist, sowohl die Zahl als die belangreichsten Veränderungen der Mesodermsegmente des Kopfes kennen zu lernen, finden wir einem festen Ausgangspunkt im

Stadium I.

Am Ende der Periode H und ganz im Anfang der I sind die hinteren Kopfsomite † schon gebildet, die vorderen aber noch nicht und höchstens durch Falten angedeutet. Wenn bald darauf das ganze dorsale Mesoderm des Kopfes in Somite zerfallen ist, giebt es deren im Ganzen 9 (Fig. 1, 1 bis 9.), die alle, mit Ausnahme des ersten, welches solide ist, eine Höhle umschliessen. Ihre Zahl ist durch Schnitte aus diesem Stadium allein nicht festzustellen, denn eine Trennung von Kopf und Rumpf ist noch nicht vorhanden; der Embryo steht also noch auf einem Acranienstadium. Zur Bestimmung dieser Zahl habe ich eine Reihe von Längsschnittserien bis zu dem Stadium, in welchem Kopf und Rumpf deutlich getrennt sind, gebraucht. Diese Reihe musste natürlich genügend lückenfrei sein, um die einzelnen Somite jedesmal identificiren zu können.

---

* Nur kann ich der Angabe von **Balfour**, dass im letzten Visceralbogen eine besondere Höhle entstehe, nicht beistimmen.

† Somit, ein von **Balfour** gebrauchtes Wort (Treatise of comp. Embryology II), bedeutet Mesodermsegment („Urwirbel").

Zum Beweise, dass die Somite des Kopfes in der erwähnten Periode denen des Rumpfes gleich zu stellen sind, führe ich an:

1°. Dass die Länge * der Somite sich im ganzen Körper gleich verhält. Diese Länge nimmt vom Schwanze, wo der Somite am kürzesten sind, allmählich zu, sodass das zweite Kopfsomit länger ist als eins der folgenden. Das erste macht eine Ausnahme, denn es ist verhältnissmässig sehr kurz, wenigstens wenn man seine vordere Verlängerung nicht mitrechnet.

2°. Dass die obere Grenzlinie der Rumpfsomite ununterbrochen in diejenige der Kopfsomite übergeht (Fig. 1). Diese Linie verläuft im vorderen Körpertheile, der Kopfbeuge entsprechend, bogenförmig hinunter.

3°. Dass die untere Grenze der Somite sowohl im Kopfe als im Rumpfe nur wenig unter der oberen Grenze des Darmes liegt. (Fig. 4) †.

Aus Letzterem folgt, dass die Kiementaschen, da sie Ausstülpungen der Seitenwand des Darmes sind, unter der unteren Grenzlinie der Kopfsomite entstehen. Dies ist am besten auf Querschnitten, aber doch auch auf verticalen Längsschnitten zu sehen, da die Spalte zwischen dem dritten und vierten Somit sich nicht in das Mesoderm zwischen der ersten und zweiten Kiementasche, über welchem sie sich befindet, fortsetzt (Fig. 1 und 2). Schiefe Längsschnitte täuschen Bilder vor, nach welchen man glauben könnte, dass die Kiementaschen nicht *unter*, sondern *in* den Somiten angelegt würden.

Lässt sich, wegen dieser Lage der Somite und wegen der, im Anfange dieses Capitels erwähnten, Bildungsweise der Höhlen in den Visceralbogen, schon vermuthen, dass diese Höhlen nicht — wie BALFOUR glaubte — zu denen der Somite, sondern zu dem ventralen Theil der Leibeshöhle gehören, so werden wir dies durch die Verbindungen dieser Höhlen im folgenden Stadium bewiesen sehen. Hierum werde ich die Höhlen der Somite getrennt von dem ventralen Kopfcölom behandeln. Während die ventrale Leibeshöhle im Rumpfe eine bleibende Bildung ist, geht sie im Kopfe, wie wir sehen werden, nachdem sie erst durch die Kiementaschen unvollkommen in Stücke getheilt ist, grossentheils § zu Grunde.

Schreiten wir jetzt zu einer Beschreibung der einzelnen Kopfsomite:

Das erste oder präorale ist, wie gesagt, das einzige solide (Fig. 1 und 2). Lateral ist es ganz isolirt und schickt eine sich allmählich zuspitzende Ver-

---

* Die Dimension parallel der Längsachse des Körpers.

† Ueber die untere Grenzlinie der Rumpfsomite. Vgl. BALFOUR, l. c. p. 105.

§ Das Pericardium gehört sicherlich bei Embryonen und wahrscheinlich auch beim erwachsenen Thier, wenigstens theilweise, zum Kopfe.

längerung (*v.v.*) zum Stiel der Augenblase nach vorn. Median hängt es aber ununterbrochen mit einer Zellmasse zusammen, in welche auch das Vorderende des Darmes sowie der Chorda übergeht (Fig. 5 und 6, *z. m.*). Auch ist das Ectoderm der Mundeinstülpung mit dieser Zellmasse verschmolzen. Letzterer Zusammenhang ist ein Vorläufer von der Bildung der Mundspalte und secundär, denn im Stadium G und dem Anfang des H ist die erwähnte Zellmasse durch einen deutlichen Spalt vom Ectoderm getrennt (Fig. 7). Ihre Verschmelzung mit der Chorda in dem Anfang und der Mitte des Stadiums I (sowie in den vorhergehenden) ist die letzte Andeutung des von Prof. HOFFMANN * entdeckten Wachsthums des Vorderendes der Chorda, welches in der Richtung von hinten nach vorn stattfindet. Der hintere Theil der Chorda wächst dagegen von vorn nach hinten, und am Blastoporus hängt die Chorda zum zweiten Male mit dem Entoderm zusammen. Es scheint also, dass sie in der Region des Nackens zuerst abgeschnürt wird, und dass von hier aus ihr Freiwerden vom Entoderm sowohl in der Richtung nach vorn als nach hinten stattfindet. Befremdend ist eine solche Wachsthumsweise nicht; man denke — um ein einziges Beispiel zu nennen — an die Verschliessung des Rohres des centralen Nervensystemes, welches einer ähnlichen Richtung folgt.

Kehren wir, nach dieser kleinen Ausschweifung zum ersten Somite zurück, so finden wir das merkwürdige Verhältniss, dass dieses, und zwar *vor* der Chorda, vorn auch mit dem Entoderm verschmolzen ist, und dass, wie erwähnt, die Somite im vorderen Körpertheile sich von hinten nach vorn entwickeln; bekanntlich entstehen sie im hinteren Körpertheil in umgekehrter Richtung, während am Blastoporus das Mesoderm an einer zweiten Stelle mit dem Entoderm (und dem Ectoderm) verschmolzen ist. Aus diesen Thatsachen, und aus Analogie mit der Chorda, schiesse ich, *dass das Mesoderm bei den Selachiern ungefähr in der Region, welche bei andern Thieren dem Nacken entspricht, zuerst differenzirt wird, und dass diese Differenzirung sowohl vor- als hinterwärts fortschreitet.*

Das erste Somit ist das einzige, dessen Wände nicht mit den Seitenplatten zusammenhängen; es ist aber möglich, dass seine erwähnte vordere Verlängerung ein durch die Bildung des Mundes abgeschnittenes Stück der Seitenplatten vorstellt, sodass sie der Wandung einer Visceralbogenhöhle homolog sein würde. Wir werden im Folgenden mehrere Gründe kennen lernen, welche für eine solche Auffassung sprechen.

Das zweite Somit (Fig. 1 und 2, *2*), welches eine geräumige Höhle umschliesst,

* C. K. HOFFMANN, Contributions à l'Histoire du Développement des Plagiostomes, *Archives Néerlandaises*, T. XVI, p. 12.

ist an der Stelle, wo es mit der ventralen Leibeshöhle (hier der mandibularen Höhle * communicirt (bei +), nur wenig eingeschnürt. Sein am meisten nach hinten befindlicher Theil liegt noch eben über der Anlage der ersten Kiementasche (des späteren Spritzloches).

Das dritte Somit (*3*) befindet sich mit seiner Hauptmasse über der ersten Kiementasche; nur sein hinterer Theil erstreckt sich ein wenig weiter caudalwärts und hängt noch gerade mit der soliden Zellmasse im Hyoidbogen zusammen. Diese Zellmasse besteht aus den jetzt zusammengedrungenen Wänden der späteren Hyoidhöhle. Die von dem Somite umschlossene Höhle ist durch die unter ihm befindliche Kiementasche sehr eingeengt, wächst aber bald nach vorn und verbreitert sich.

Das vierte Somit (*4*) liegt über der zweiten Kiementasche und unter der Ohreinstülpung. Sein vorderer Theil hängt breit mit dem Mesoderm des Hyoidbogens zusammen. Seine Höhle ist kaum mehr als ein Spalt.

Das fünfte Somit (*5*), dessen vorderer Theil aussen von der Anlage des Glossopharyngeus gekreuzt wird, liegt über der dritten Kiementasche und hängt mit dem Mesoderm des dritten Visceralbogens (des ersten Kiemenbogens) zusammen (Fig. 3). Schon wenn die dritte Kiementasche erst eben angelegt worden, ist seine Höhle bis auf einen Spalt reducirt.

Von dem sechsten bis neunten Somit (*6—9*) umschliesst jedes, ebenso wie die vorderen Rumpfsomite eine nicht durch das Auftreten von Kiementaschen reducirte Höhle, während der mittlere Theil der Innenwand mit der Anlage von Muskelfasern versehen ist. Ueber letztere verweise ich auf die genauen Mittheilungen von BALFOUR (l. c. p. 106. ff).

Was den ventralen Theil des Mesodermes † im Kopfe betrifft, so ist es, wie erwähnt, vom ersten Somit zweifelhaft, ob es mit einem ventralen Abschnitt in Zusammenhang stehe. Die Wände der übrigen setzen sich in das ventrale Mesoderm fort (Fig. 4), sodass man ganz dasselbe Verhalten wie am Rumpfe bekommt. Nur ist das Mesoderm an der Stelle der Kiementaschenanlagen ganz verdrängt, sodass in dieser Gegend der Zusammenhang nur zwischen den Kiementaschen, also in den Visceralbogen stattfinden kann. Von secundärem Interesse ist hierbei, dass in zwei von den drei, in diesem Stadium

* Es ist nöthig die Höhlen in den Visceralbogen von denen in den Somiten zu unterscheiden; deshalb verstehe ich unter mandibulare- oder Kieferhöhle nur den ventralen Theil des also von BALFOUR benannten Raumes; ihre „dorsal dilated portion" ist die Höhle des zweiten Somites. Ebenso ist meine Hyoidhöhle nur die „ventral hyoid cavity" von BALFOUR und MARSHALL; die „dorsal hyoid cavity" nenne ich die Höhle des dritten Somites.

† D. h. der unter den Somiten befindliche Theil, die Seitenplatten.

angelegten Visceralbogen sich das parietale Blatt eng an das viscerale angelegt hat, sodass die Höhle, welche zwischen beiden bestand, eine kurze Zeit verschwunden ist, um bald wieder zum Vorschein zu treten.

Unter der ersten Kiementasche hat das, hier solide, beiderseitige Mesoderm die ventrale Medianlinie noch nicht erreicht; es convergirt aber hinterwärts zu dieser während zwischen dem parietalen und dem visceralen Blatt eine Höhle entsteht. Unter der Anlage der zweiten Kiementasche, also auch ventral vom vierten Somite, vereinigen sich beide Höhlen zu dem unpaaren Pericardialraum. Mit andern Worten: Die ventrale Leibeshöhle wird in dieser Periode im Kopfe nur durch die unpaare Pericardialhöhle und die paarige Kieferhöhle repräsentirt. Beiderlei Räume communiciren nur potenziell, da die Wände der nach vorn in zwei Zipfel ausgezogenen Pericardialhöhle, sich zwar in diejenigen der Kieferhöhle fortsetzen, unter der ersten Kiementasche einander aber berühren.

Das Stadium J.

Zur Charakteristik dieses Stadiums, welches ich zwischen den von BALFOUR I und K benannten einschiebe, diene Folgendes * über die Kiementaschen, welche, nach dem eben genannten Untersucher, die am leichtesten erkennbaren Merkmale anbieten. Im J wird die vierte und fünfte, aber noch nicht die sechste Kiementasche angelegt. In diesem Stadium findet der Durchbuch der Mundöffnung, sowie diejenige der zweiten und ersten Kiementasche nach aussen statt. In der Periode, wann auch die dritte Kiementasche durchbricht, wird die sechste als Darmausstülpung angelegt und achte ich, dass Stadium K anfängt.

Während der Anlage der vierten Kiementasche, und noch vor dem Auftreten der fünften, also in der ersten Hälfte des Stadiums J, entwickelt sich eine Masse embryonalen Bindegewebes — im I nur durch einzelne Zellen repräsentirt — aus der Innenwand der Somite. Diese zerfallen † dadurch in ein Muskelsegment (Myotom) und ein Skelettsegment, besser: Bindesubstanzsegment, (Sklerotom) §.

---

* Die Angaben sind alle nach Schnittserien gemacht; diejenigen nach Ansichten des Embryo's in toto sind unzuverlässig; sieh BALFOUR, l. c. p. 78 und 211.

† Sieh BALFOUR, l. c., p. 107.

§ Die Worte Myomer und Skleromer sind von verschiedenen Autoren für die Muskeln und die Bindesubstanz eines Körpersegmentes angewendet. Es gehören zu den Myomeren sowohl die Muskeln, welche aus den Somiten, als diejenigen, welche aus den Seitenplatten stammen. Ich möchte unter Myotom nur die Muskeln eines Somites verstehen. Ein Myotom ist demnach nur ein Theil eines Myomeres. In gleicher Weise ist ein Sklerotom nur ein Theil eines Skleromeres.

Die Segmentation der Sklerotome geht aber im ganzen Körper fast sofort verloren, worum ich letztere als nicht zu unserem Zwecke nothwendig ausser Acht lasse, und mich auf die Myotome beschränke. Das Volumen der Bindesubstanz ist hauptsächlich im Kopfe sehr bedeutend.

Myotome. Beim ersten Erscheinen der vierten Kiementasche wird in dem inneren Theil *des ersten Myotomes* (man konnte es noch Somit nennen), welches an dieser Stelle noch ohne Grenze mit der vorderen Darmwand zusammenhängt, eine sehr kleine Höhle sichtbar, entstanden durch Auseinanderrücken der Zellen. Diese Höhle ist paarig, und liegt etwas seitlich von der Medianebene in welcher die Chorda noch mit der oben erwähnten Zellmasse zusammenhängt. In meinem nächst älteren Embryo ist die fünfte Kiementasche noch nicht angelegt; noch keine ist nach aussen durchgebrochen, und auch der Mund ist noch nicht offen; es ist aber schon eine reichliche Masse embryonaler Bindesubstanz vorhanden, und sowohl das erste Myotom als die Chorda sind von dem Vorderende des Darmes isolirt. Das erste Myotom erscheint mit dem der andern Seite durch eine mediane Zellbrücke verbunden, in welcher sich eine enge Höhle befindet, welche die beiderseitigen Höhlen des ersten Myotomenpaares median vereinigt. An der dorsalen, hinteren Wand dieser Brücke endet die Chorda. Die Höhle des ersten Myotomes setzt sich jederseits auch in die vordere Verlängerung * fort, und reicht in dieselbe fast bis an den Stiel der Augenblase.

Balfour, welcher das erste Somit nicht erkannt hat ehe es eine Höhle besass, glaubt, dass letztere durch Abschnürung von dem „dorsalen Theil der mandibularen Höhle" † entstehe, und wird hierin von Milnes Marshall gefolgt. Weil er diese Meinung weder durch Abbildungen, noch durch nähere Beschreibung stützt, und sie mit meinen Wahrnehmungen völlig unvereinbar ist, halte ich sie bloss für eine Vermuthung.

Die mediane Communication der beiderseitigen Höhlen wird von Balfour als eine ventrale betrachtet, sodass sie mit einem Abschnitt der bleibenden Leibeshöhle, und nicht mit dem Raum in einem Somite zu vergleichen wäre. Wegen ihrer besonderen Lage am Vorderende des Darmes können aber die beiderseitigen ersten Somite offenbar noch in einer andern Weise mit einander communiciren als unter dem Darme, indirect mittels der Leibeshöhle, wie die übrigen. Das Somit kann nämlich *vor* dem Darm direct mit demder andern Seite in Verbindung treten.

Halten wir uns an den Thatsachen, so liegt dieser Verbindungsstrang im

---

* Sieh oben Seite 5.

† Vgl. die erste Anmerkung auf Seite 6.

Stadium I (sowie beim ersten Auftreten des J), als er noch solide und nicht vom Entoderm isolirt ist, *vor* der Verschmelzungsstelle der Chorda mit dem Entoderm und *vor* der Darmhöhle. Hierum muss ich annehmen, dass der Strang nicht mit einem Abschnitt der Seitenplatten, sondern mit einem solchen der Somitenplatte („Urwirbelplatte"), zu vergleichen ist *.

Die Höhle des *zweiten Myotomes* ist vergrössert, und communicirt noch mit der Kieferhöhle. Ihr hinterer Theil wird, an der Aussenseite, vom Trigeminus (Fig. 8, *tr*) gekreuzt. Dieser Theil ist im folgenden Stadium abortirt, und seine Stelle wird von dem vorwärts wachsenden dritten Myotome eingenommen, sodass der Trigeminus hinter dem zweiten zu liegen kommt.

Die Wände des *dritten Myotomes* (Fig. 8, *3*) setzen sich jetzt nicht mehr in das Epithel, welches die Höhle des Hyoidbogens umschiesst, fort. Letztere ist von derjenigen des dritten Myotomes durch den Facialis, und durch embryonales Bindegewebe getrennt. Bei einigen Embryonen aus dem Anfang dieses Stadiums scheinen beide Höhlen noch durch einen soliden Strang von zweifelhaftem Gewebe verbunden. Die Höhle des Myotomes fängt in ihrem hinteren Theile zu abortiren an, während ihr vorderer sich vergrössert und nach vorn wächst. Eine Communication von ihr mit der Hyoidhöhle, welche von MARSHALL behauptet wird, ist in keinem meiner Embryonen vorhanden. Weil aber in dem vorhergehenden Stadium die Wände des dritten Somites mit dem Mesodermepithel im Hyoidbogen, welches jetzt die Hyoidhöhle umschliesst, zusammenhängt, muss ich eine potenzielle Communication zugeben.

Das *vierte Myotom* liegt, wie das vierte Somit des vorigen Stadiums, unter der Ohrblase und über der zweiten Kiementasche; es ist höchst rudimentär; seine Grenzen sind unbestimmt und angefangen sich aus ihrem Verband zu lösen. Gegen das Ende dieser Periode verschwindet es gänzlich, während seine Stelle von embryonalem Bindegewebe eingenommen wird. Bis in dieselbe Höhe, aber mehr lateral, verlängern sich in späteren Stadien die Wände der jetzigen Hyoidhöhle. Mit dieser Verlängerung darf das vierte Myotom nicht verwechselt werden. In der ersten Hälfte der jetzigen Periode setzen seine Wände sich noch in die der Hyoidhöhle fort (Fig. 9, *4*); das letzte, kaum mehr sichtbare Ueberbleibsel der Höhle des Myotomes ist aber von der nicht viel mehr als spaltförmigen Hyoidhöhle abgegrenzt.

---

* Ist diese Auffassung richtig, woran ich kaum zweifeln kann, so liefert sie eine wesentliche Stütze für diejenige, nach welcher das Mesoderm ursprünglich nicht die Gestalt zweier isolirten Reifen, sondern eines in die Längsachse des Thieres ausgezogenen Ringes hat. Diese Form ist in den Speculationen einiger Forscher, sowohl für das Mesoderm als für das centrale Nervensystem, behauptet worden.

Das *fünfte Myotom* (Fig. 8, *5*) ist gleichfalls sehr degenerirt. Es nimmt noch über der dritten Kiementasche die Stelle des Somites, aus dem es hervorgegangen, ein, hat aber auch dessen bestimmte Grenzen eingebüsst. Es ist allseitig von Bindegewebe umgeben, und liegt gänzlich vor dem Vagus, während sein Vordertheil, an der Aussenseite, vom Glossopharyngeus gekreuzt wird (Fig. 11).

Das *sechste Myotom* ist, ebenso wie das sechste Somit des vorigen Stadiums, das erste (vorderste), welches embryonale Muskelfasern besitzt; diese sind noch im Stadium P sichtbar; sie bleiben aber auf einer rudimentären Stufe, worum es nicht unwahrscheinlich ist, dass auch dieses Myotom schliesslich abortirt. Es liegt über der jetzt angelegten vierten Kiementasche (Fig. 10) während seine Aussenseite vom Ram. branchialis primus Vagi gekreuzt wird (Fig. 8).

Das *siebente bis neunte Myotom* ist viel besser entwickelt. Unter dem hinteren Theile des siebenten wird die fünfte Kiementasche angelegt. Es erstreckt sich etwas höher neben das verlängerte Mark empor als das sechste; das achte noch höher und das neunte am höchsten, ebenso hoch wie diejenigen des Rumpfes, von denen es nicht verschieden ist. Ueber dem 6ten bis 9ten Myotome befindet sich die Nervenleiste („neural ridge") des Vagusgebietes, welche an der Aussenseite eines jeden Myotomes noch einen rudimentären Auswuchs entsendet (Fig. 10), von denen die mehr nach hinten befindlichen die stärksten sind. Die Höhlen dieser Myotome, wie derjenigen des Rumpfes, sind alle durch die Vermehrung der Muskelfasern, bis auf einen sehr kleinen Rest im oberen Theile, verdrängt.

Wenden wir uns jetzt zu den Seitenplatten, in denen wir im vorigen Stadium nur den Pericardialraum und die Kieferhöhle fanden, so sehen wir in jedem Visceralbogen eine Höhle. Im Hyoid- und ersten Kiemenbogen hat sich nämlich das viscerale und parietale Blatt wieder getrennt, während diese beiden Blätter in den Höhlen der folgenden Visceralbogen nicht verschmelzen. Alle diese Gebilde communiciren unter den Kiementaschen mit der vorderen Verlängerung des Pericardialraums (Fig. 12). Diese Communication ist auf Längsschnitten nicht schwer zu sehen; wie aus der Figur zu vermuthen ist, muss sie auf Querschnitten nicht so leicht wahrzunehmen sein. Hierdurch erklärt sich, weshalb Balfour, der hauptsächlich letztere studirt hat, glauben konnte, dass die Höhlen in den Visceralbogen unten abgeschlossen wären. Indirect, mittels der vorderen Verlängerung des Pericardialraums, communiciren sie ventral mit denen der andern Seite.

Nicht lange nach der Differenzirung der Somite in Myotome und Sklerotome trennen sich ihre Höhlen von der Leibeshöhle. Balfour * bemerkt hier-

* Batfour, l. c., p. 106.

über für den Rumpf: „Though the cavities in the protovertebrae (Somite) are at first perfectly continuous with the general body-cavity, of which indeed they merely form a specialized part, yet by the close of stage H they begin to be constricted off from the general body-cavity, and this process is continued rapidly, and completed shortly after stage I, and considerably before the commencement of stage K." Diese Trennung ist schon in der ersten Hälfte der Periode J auch für die Kopfsomite, mit Ausnahme des zweiten, vollzogen; die Höhle des vierten, fünften und sechsten Visceralbogens kann also nie mit derjenigen eines Somites (oder eines Myotomes) in Verbindung stehen, denn jede dieser Höhlen ist ein abgeschnürtes Stück der secundären, und nicht, wie diejenige des Kiefer-, Hyoid- und ersten Kiemenbogens, der primären Leibeshöhle *. BALFOUR glaubt, dass die Höhlen in den Visceralbogen mit denen der Rumpfsomite homolog seien, weil sich aus beiden willkürliche Muskeln entwickeln. Es scheint mir sicher, dass hauptsächlich die Verhältnisse im Stadium J beweisen, dass sie dagegen mit einem Abschnitt der bleibenden Leibeshöhle des Rumpfes zu homologisiren sind; ich stelle die Gründe dazu zusammen:

In der ersten Hälfte des Stadiums J hat sich die primäre Leibeshöhle in die Höhlen der Myotome und die secundäre Leibeshöhle differenzirt, durch die Trennung der Somite (mit Ausnahme des 2ten) von den Seitenplatten; die Höhlen in den Visceralbogen erstrecken sich nun nicht über die untere Grenze der Somitenplatte (resp. Myotomenplatte) und sind von den Höhlen der Somite (mit Ausnahme derjenigen des zweiten) *getrennt;* sie *communiciren* aber mit dem Pericardialraume. Ausserdem werden, wie wir im Stadium I gesehen haben, die Kiementaschen unter der Somitenplatte angelegt.

Wären dagegen die Höhlen in den Visceralbogen mit denen der Somite vergleichbar, so müssten sie *alle* ursprünglich mit einer der letzteren (oder der Myotome) in Verbindung stehen, und dies ist für diejenigen der hinteren Visceralbogen nicht der Fall. Da sich nun aus den Wänden der Visceralbogenhöhlen fast † die ganze Kiemen- und Kiefermuskulatur entwickelt, finden wir am Kopfe also das merkwürdige Verhältniss, dass der递Haupttheil der willkürlichen Muskulatur nicht aus den Somiten, sondern aus den Seiten-

* Dieser Unterschied ist natürlich ein vollkommen unwesentlicher, weil er nur dadurch bedingt ist, dass die drei letzten Kiementaschen (und damit auch der vierte bis sechste Visceralbogen) nicht *vor* sondern *nach* der Abschnürung der Somite angelegt werden.

† Der Musc coraco-hyoideus (sieh VETTER, Kiemen- und Kiefermuskulatur der Fische. *Jen. Zeitschr.* Bd. VIII, 1874) entwickelt sich aus den hinteren Kopf- und vorderen Rumpfsomiten (vgl. das Ende dieses Capitels).

platten stammt, während am Rumpfe bekanntlich das Umgekehrte der Fall ist. Wie wichtig dies für die Auffassung der Nerven ist, werden wir im zweiten Capitel sehen.

Das Stadium K und folgende Stadien.

Wie erwähnt, entsteht die sechste und letzte Kiementasche in dem Stadium, in welchem die drei ersten nach aussen durchgebrochen sind. Diese Kiementasche wird unter dem hinteren Theile des achten Myotomes angelegt. Im Allgemeinen wird unter der hinteren Hälfte eines jeden Somites (resp. Myotomes) des Kopfes eine Kiementasche, und zugleich mit derselben unter dem vorderen Theile des Somites eine Visceralbogenhöhle gebildet. Dies gilt thatsächlich für das 4te, 5te, 6te, 7te und 8te Somit (resp. Myotom) unter welchen die 2te bis 6te Kiementasche angelegt werden. Die niederen Selachier (Heptanchus und Hexanchus) machen es höchst wahrscheinlich, dass auch unter dem hinteren Myotome des Kopfes ursprünglich eine Kiementasche bestanden habe. Ihre Abwesenheit bei Scyllium- und Pristiurusembryonen beeinträchtigt das allgemeine Schema also nicht. Wie steht es nun aber mit den drei vordersten Somiten?

Die erste Kiementasche liegt im Stadium I nur mit ihrem vorderen Theile unter dem hinteren Theile der zweiten Somites; vor ihr befindet sich die Kieferhöhle; sie scheint mir ungezwungen in das Schema zu passen, nur muss man annehmen, dass sie ein wenig nach hinten gerückt ist, da sie grossentheils unter dem dritten Somite liegt. Letzteres ist ohne zugehörige Kiementasche; um auch für dieses Somit das Schema gelten zu lassen, muss man annehmen, dass eine ursprünglich (phylogenetisch) unter seinem hinteren Theile liegende Kiementasche abortirt ist, und dass demzufolge die Hyoidhöhle zwei Visceralbogenhöhlen repräsentirt; dass also der Hyoidbogen potenziell aus zwei Visceralbogen besteht. Hierdurch erklärt sich zugleich, worum die erste Kiementasche etwas nach hinten rücken konnte; durch den Abortus der folgenden wurde ihr der Raum dazu verschafft. Auf ganz andern Gründen bin ich in einer früheren Arbeit * zu dersellem Hypothese gekommen. Sie erklärt worum anfänglich statt eines, zwei Somite mit dem Gewebe des Hyoidbogens zusammenhängen.

Es bleibt uns jetzt noch die Frage zu beantworten, ob auch unter dem hin-

---

* VAN WIJHE, Ueber das Visceralskelett und die Nerven des Kopfes der Ganoiden und von Ceratodus. *Niederl. Arch. f. Zool.*, Bd. V.

teren Theil des ersten Somites eine Kiementasche angenommen werden kann. Es scheint mir, dass der Mund als der Repräsentant eines an jener Stelle befindlichen Kiementaschenpaares anzusehen ist. Für die Auffassung des Mundes als das Homologon eines Kiementaschenpaares spricht nicht nur die Zeit seiner Entstehung, sondern auch die Thatsache, dass bei seiner Anlage das Entoderm mit dem Ectoderm verschmilzt und dann durchbricht, wie bei einer Kiemenspalte. Gegen diese Auffassung werden gewöhnlich: 1°. die unpaare Anlage des Mundes, 2°. die mit seiner Entstehung verbundene Einstülpung des Ectoderms angeführt. Den letzteren Grund betreffend erwähne ich, dass nach BALFOUR auch bei der Bildung der Kiemenspalten von Torpedo eine geringe Einstülpung des Ectoderms stattfindet. Ersterer Grund scheint mir sehr an Gewicht zu verlieren, wenn der Mund als zum ersten Kopfsegmente gehörig betrachtet wird, da zu der Zeit seiner Entstehung das erste Somit auch unpaar ist. Ist diese Auffassung des Mundes richtig, so lässt sich vermuthen, dass auch er ein vor ihm befindliches Stück, welches mit einer Visceralbogenhöhle zu vergleichen sei, von der Leibeshöhle abgeschnürt habe. Ich habe mich über diesen Punkt schon oben ausgesprochen; wir werden, bei der Behandlung der Veränderungen der Myotome seit dem Anfang des Stadiums K, zu welcher ich jetzt übergehe, sofort Verhältnisse kennen lernen, welche mir stark für die Existenz einer solchen Visceralbogenhöhle zu sprechen scheinen.

Das *erste Myotom* ist im Anfang des Stadiums K vergrössert, zeigt aber bei Scyllium und Pristiurus nichts Besonderes. Die in der ersten Hälfte des vorigen Stadiums so deutliche Fortsetzung bis an den Augenstiel ist geschwunden; an ihrer Stelle befindet sich embryonales Bindegewebe. Galeus, von dem ich leider nur ein einziges Stadium * besitze, zeigt bei Embryonen aus dem Anfang des K, welche übrigens im Wesentlichen mit denen von Scyllium übereinstimmen, das merkwürdige Verhältniss, dass die nach dem Augenstiel gerichtete Verlängerung des ersten Somites nicht nur persistirt, sondern sogar eine selbständige paarige Höhle vor dem ersten Myotom bildet. Ihre Wände (Fig. 13, *v.v.*) bestehen aus einem hohen, mehrschichtigen Epithelium, ebenso wie diejenigen der Visceralbogenhöhlen, während das Epithelium der übrigen noch existirenden Kopfhöhlen (des ersten, zweiten und dritten Myotomes) einfach und viel flächer ist. Nur die dem ersten Myotome zugekehrte Wand der erwähnten Verlängerung ist dünn; die Abschnürung hat wohl noch nicht lange stattgefunden. Es wäre interessant, zu erforschen, was beim erwachsenen Galeus aus diesem Gebilde

* Repräsentirt durch zwei, demselben Mutterthier entnommene und gleichweit entwickelte Embryonen.

entstanden sein kann, denn dass es abortire, scheint mir wegen seiner starken Entwickelung im Stadium K nicht wahrscheinlich.

Gegen das Ende des Stadiums L zeigt die Höhle des ersten Myotomes zwei nach unten und vorn gerichtete Ausstülpungen, eine vordere und eine hintere (Fig. 18 und 19, *v a* und *h a*). Die Wände der hinteren verdicken sich bald, und füllen dabei die Höhle der Ausstülpung aus, sodass dieselbe im Anfang des Stadiums O fast ganz obliterirt ist. Der in dieser Weise entstandene Zellenhaufen bildet, wie MILNES MARSHALL dargethan hat, die Anlage des Musc. obl. inf. (Fig. 23, *m o i*). Der eben erwähnte Forscher hat von diesem Muskel nur letzteres Stadium wahrgenommen. Ich kann seine Wahrnehmungen bestätigen, dass sich, während des Stadiums O, das erste Myotom becherformig um die Augenblase schmiegt und sich aus seiner hinteren Wand der Musc. rect. sup., rect. int. und rect. inf. *, entwickeln; dass weiter im Stadium L die mediane Communication der beiderseitigen Höhlen des ersten Myotomes durch das Zusammenkommen der Wände obliterirt, sodass ein solider, aus Epithelzellen bestehender Strang über dem oberen, hinteren Theile der Hypophysiseinstülpung das erste Myotom mit dem der andern Seite verbindet. In diesem Vorgang kann ich aber nicht, wie MILNES MARSHALL, eine Abschnürung des unpaaren medianen Theiles sehen. Der Verbindungsstrang wird allmählich dünner (im Stadium L zeigt er auf dem Querschnitt durch seine Mitte noch 8—10 Zellen; im Anfang des O nur 4—5 Zellen), und ist in der Mitte des Stadiums O geschwunden.

Während des Stadiums K wird die Höhle des *zweiten Myotomes* factisch isolirt durch das Obliteriren der Kieferhöhle; die Continuität der Wände bleibt aber bestehen (vgl. Fig. 14—17). Im Stadium L schickt sie eine Ausstülpung nach vorn und oben (Fig. 18 und 19 *d a*), welche bei Galeus viel geräumiger und schon im Stadium K vorhanden ist (Fig. 13). Die Höhle des Myotomes fängt jetzt zu schwinden an, und ist im Anfang des Stadiums O bis auf einen nach vorn und oben gerichteten Spalt reducirt (Fig. 20—22). Die Wände desselben liegen in der Fortsetzung derjenigen der früheren Kieferhöhle, welche jetzt aus embryonalen Muskelzellen bestehen, aus denen sich die Kaumuskeln entwickeln. In dem vorderen und oberen Theile, also im Gipfel der Ausstülpung, welche wir im Stadium L fanden, sind die Wände des zweiten Myotomes sehr verdickt, und bilden hier die Anlage des Musc. obl. sup. (Fig. 20 und 21, *m o s*). MILNES MARSHALL hat diesen erst später wahrgenommen, als die Höhle des

* Der Musc. rect. inf. füllt später auch die vordere der beiden, im Stadium L auftretenden ventralen Ausstülpungen des ersten Myotomes, sodass er sich auch aus einem Theile der scheinbar ventralen Wand desselben entwickelt.

zweiten Myotomes schon gänzlich geschwunden und ihre Wände abortirt waren, sodass er nicht observirt hat, dass der Musc. obl. sup. sich auch aus der Wand einer Kopfhöhle entwickelt. Das Schwinden der Wände des zweiten Myotomes (mit Ausnahme des obersten vorderen Theiles) findet bald nach dem Anfang des Stadiums O statt.

Das *dritte Myotom*, welches wir im Stadium J die Innenseite des Trigeminus erreichen sahen, wächst stets vorwärts; im Stadium L liegt sein Vorderende schon vor dem Trigeminus, an der Innenseite des zweiten Myotomes. Die Zellen, welche den Boden und die Hinterwand der von ihm umschlossenen Höhle bilden, haben ihre Epithelform fast verloren, und sind von den umgebenden Bindegewebszellen kaum zu unterscheiden. Die dorsale und die vordere Wand besitzen aber ein sehr deutliches Epithel. Im Anfang des Stadiums O sind die Zellen desselben in spindelförmige Muskelzellen umgebildet, und die Höhle des des Myotomes wohl reducirt, aber doch noch ziemlich gross (Fig. 26). Auf dem Schnitt möchte man sie beim ersten Anblick für ein Blutgefäss halten, weil die ventrale und die hintere Wand so sehr verdünnt sind. Mit seinem Vorderende hat das Myotom jetzt fast die hintere Wand des Augapfels erreicht. Es ist in die Länge gezogen, und von hinten nach vorn und aussen gerichtet, sodass sein Vordertheil zwischen der medial von ihm befindlichen Vena ophthalmica und dem, seine Aussenseite kreuzenden, unteren Theile des nach vorn und oben gerichteten zweiten Myotomes liegt, während an der Kreuzungsstelle die vordere Spitze des dritten sogar noch etwas mehr nach vorn ragt als das zweite Myotom (Fig. 20). Nicht lange nach dem Anfang des Stadiums O abortirt die Höhle des dritten Myotomes, und der aus demselben stammende Muskel, der Musc. rect. externus, wächst vor und medial vom Trigeminus längs der Hinterwand des Augapfels nach vorn und aussen. Von diesem Muskel hat MARSHALL * schon gefunden, dass er an einer Stelle, welche früher von der zweiten und dritten Kopfhöhle eingenommen wurde, entsteht.

Von dem *vierten Myotome* ist nach dem Stadium J keine Spur mehr vorhanden, und das *fünfte* wird nur durch eine unbestimmte Masse repräsentirt, welche sich stärker färbt und deren Zellen dichter auf einander gedrängt sind als in dem embryonalen Bindegewebe (Fig. 17, *5*). Das rudimentäre *sechste* liegt noch stets ander Innenseite des Ram. branchialis I Vagi, aber die folgenden haben sich dorsalwärts verlängert, ebenso wie die Myotome des Rumpfes. Ausserdem kommt eine ventrale Verlängerung (Fig. 23) dem hintersten Kopfmyotome zu,

---

* MILNES MARSHALL, l. c.

fehlt den vordersten (dem 1sten bis 6ten) * aber vollständig. Schon gegen das Ende des Stadiums K fängt die ventrale Verlängerung, sowohl des hintersten Kopfmyotomes als die der vorderen Rumpfmyotome, sich nach vorn umzubiegen an. Im Stadium O haben diese Verlängerungen, welche später selbständig werden, schon ziemlich weit nach vorn vorgegriffen. Aus ihnen entwickelt sich der Musc. coraco-hyoideus †, welcher also genetisch von der übrigen, aus den Seitenplatten stammenden Kiemen- und Kiefermuskulatur ganz verschieden ist.

Der Musc. coraco-branchialis + coraco-mandibularis hat eine ganz andere Entstehungsweise als der coraco-hyoideus. Er entwickelt sich nämlich aus der unpaaren vorderen Verlängerung (Fig. 24, *pc'*) des Pericardiums, dessen Höhle, wie wir gesehen haben, im Stadium J mit den Höhlen der Visceralbogen communicirt (Fig. 12). Nach dem Stadium K fängt diese vordere Verlängerung zu obliteriren an; die Zellen ihrer Wände werden Muskelfasern, und im Anfang des O ist die ganze Höhle geschwunden; ihre muskulösen Wände sind zusammengekommen, und bilden die Anlage des Musc. coraco-mandibularis + coraco-branchialis. In späten Stadien ist derselbe immer leicht von dem Musc. coraco-hyoideus zu unterscheiden (Fig. 25, *mcbr* + *cm.* und *chy*). Die Nebenzweige, welche ersterer zu den Visceralbogen abgiebt, sind aus den Unterenden der Wände der Visceralbogenhöhlen entstanden §.

Kehren wir jetzt zu den Myotomen zurück, so finden wir, dass das 7te bis 9te, durch ihr dorsalwärts neben dem verlängerten Mark emporgerichtetes Wachsthum, in den späteren Stadien sofort erkennbar sind (Fig. 43 und 44). Das

---

* Ob das siebente und achte Myotom sich in späten Stadien auch noch weit ventralwärts ausstrecken, habe ich nicht ermittelt.

† Eine Beschreibung dieser Muskeln giebt. VETTER. l. c.

§ Nach dem Niederscheiben dieses Capitels ersehe ich, dass A. SCHNEIDER (Beiträge zur vergl. Anat. und Entwickelungsgesch. der Wirbelthiere 1879, p. 109) schon auf Grund vergleichend anatomischer und histologischer Untersuchungen zu derselben Hauptunterscheidung der ganzen Muskulatur aller Wirbelthiere (zu dem Unterschied nämlich der aus den Somiten- und aus den Seitenplatten stammenden Muskeln) gelangt ist, wie ich für den Kopf der Selachier an der Hand der Ontogenie dargethan zu haben glaube. Er rechnet aber den Musc. coraco-branchialis (sterno-branchialis SCHNEIDER l. c., p. 123) zu den parietalen (aus den Somiten stammenden). Dies scheint mir fast ein Schreibfehler, denn er bemerkt (l. c., p. 109), dass dieser Muskel bei Acanthias keine Kästchenstructur — diejenige der parietalen Muskeln — erkennen lasse. Ueber die Augenmuskeln der höheren Thiere lässt SCHNEIDER sich nicht aus; von denen des Petromyzon sagt er aber (l. c., p. 60) es scheine ihm nicht unwahrscheinlich, dass dieselben den Leibesmuskeln (parietalen Muskeln) angehören. Es freut mich *auf dem directen Wege*, wenigstens für den Kopf, die Richtigkeit der Schneiderschen Eintheilung zu haben zeigen können.

siebente ist das erste, welches, an der Rückenseite, hinter der Ohrblase liegt. In der Membran, welche seine Vorderwand bildet, steigt der Ram. supratemporalis Vagi auf.

Die Grenze zwischen Kopf und Rumpf wird im Stadium K soweit ausgebildet, dass der erste Halsnerv — der erste dem Vagus folgende Nerv mit sowohl dorsaler als ventraler Wurzel — deutlich als solcher erkennbar wird, und nicht mehr mit einem Vagusauswuchs zu verwechseln ist (Fig. 23, hn_1). Zu dem ersten Halsnerv gehört das zehnte Myotom (*10*) und hiermit glaube ich den Nachweis, dass an der Bildung des Kopfes im Ganzen 9 Somite theilnehmen, geliefert zu haben.

II. Die Entwickelung der Kopfnerven.

Während GEGENBAUR auf vergleichend anatomischem Wege, auch mittels der Nerven, die Frage nach der Segmentation des Kopfes der Hauptsache nach gelöst hat, stellt uns die Ontogenie in den Stand, umgekehrt, mittels der Segmentation des Mesodermes, die GEGENBAUR'sche Auffassung der Kopfnerven zu prüfen. Im Voraus will ich bemerken, dass ich seine Ansicht im Wesentlichen bestätigen kann, speziell in Betreff der Representation meherer dorsalen Wurzeln durch den Vagus, der Natur der aus dem hinteren Theile des verlängerten Markes entspringenden ventralen Wurzeln (Hypoglossus), der Homologie des Oculomotorius, Trochlearis und Abducens mit ventralen Wurzeln und der Repräsentation eines Ramus dorsalis durch den Acusticus.

Bei der folgenden Behandlung der einzelnen Nerven scheint es mir am zweckmässigsten, nach der Reihenfolge der Körpersegmente zu verfahren. Unter einem solchen verstehe ich einen zwischen zwei Flächen liegenden Körperabschnitt, von denen die eine durch die vordere, die andere durch die hintere Wand eines Somitenpaares gedacht wird. Ein typisches Kopfsegment enthält an jeder Seite ein Somit (resp. Myotom und Sklerotom), unter welchem sich in einem gewissen Stadium eine Visceralbogenhöhle und eine Kiementasche befinden. Ausserdem besitzt es typisch, wie wir sehen werden, sowohl eine ventrale als eine dorsale Nervenwurzel. Beide Wurzeln entstehen, wie BALFOUR für den Rumpf gezeigt hat, als zwei, von einander unabhängige Nerven, welche sich später in einiger Entfernung vom centralen Nervensysteme verbinden. Weil sie am Rumpfe anfangs unvereinigt sind, und dies am Kopfe bleibend der Fall ist, wird die Differenzirung von Kopf und Rumpf

phylogenetisch wahrscheinlich vor der Verbindung der dorsalen mit der ventralen Nervenwurzel stattgefunden haben.

Der Olfactorius und der Opticus verlaufen vor den Segmenten, und sind von der folgenden Behandlung ausgeschlossen. Bevor ich zu dieser übergehe, möchte ich einige Worte über die Nervenleiste (neural ridge) vorausschicken. BALFOUR, der Entdecker derselben, fand, dass sie sich bis an den Glossopharyngeus nach vorn ausstreckt. MILNES MARSHALL * zeigte darauf, dass sie beim Hühnchenembryo bis in den vordersten Theil des Kopfes vorhanden ist, und schon vor dem gänzlichen Verschluss des Medullarrohres auftritt. Fig. 27 zeigt, dass Letzteres auch für die Selachier gilt. Der abgebildete Querschnitt gehört zu einem Torpedoëmbryo aus dem Stadium G, und geht durch die Augenblasen. Aus der Schnitttserie erhellt, dass das Markrohr überall geschlossen ist mit Ausnahme zweier Stellen. Die eine derselben liegt am hinteren, die andere am vorderen Körperende. Die letztere (von BALFOUR nicht wahrgenommen) ist schlitzförmig, fängt zwischen den Augenblasen an, und streckt sich von da eine kurze Strecke nach vorn aus. Sie liegt scheinbar ventral (wegen der Kopfbeuge); ihr Hinterende ist auf dem abgebildeten Schnitt getroffen. Aus demselben folgt, dass die Augenblasen zwar scheinbar ventral, inderthat aber (weil das Nervenrohr zwischen ihnen noch nicht geschlossen ist) dorsal entstehen. Da der Olfactorius vor der Entstehungsstelle des Opticus auftritt, ist er zwar scheinbar der vorderste, in Wirklichkeit aber der zweite (nicht segmentale) Kopfnerv. Wo die Augenblasen sich in die Epidermis umbiegen, ist dieselbe verdickt (Fig. 27). Diese verdickte Stelle hängt mit der Nervenleiste continuell zusammen, wie die dem abgebildeten vorhergehenden Schnitte der Serie lehren. Aus einer Vergleichung mit Fig. 28, welche einen entsprechenden Schnitt aus einem etwas älteren Embryo von Pristiurus repräsentirt, folgt, dass diese verdickte Stelle (wenigstens zum Theil) nicht zu dem Nervenrohr, sondern zu der Haut gehört, wie BALFOUR † schon für das Hühnchen vermuthet hat.

Die Oeffnung des Medullarrohres schliesst sich bald zwischen den Augenblasen, bleibt etwas weiter nach vorn aber länger bestehen, und nachdem sie auch hier verschlossen ist, hängt doch noch das Gehirn bis in das Stadium I mit der Epidermis zusammen (Fig. 1, 2 und 29, *ep'*).

Da an dieser Stelle in dem folgenden Stadium die Epiphysis gefunden wird,

---

* MILNES MARSHALL, The Development of the cranial Nerves in the Chick. *Quart. Journ. of Mikr. Science.* Bd. XVIII. 1877.

† BALFOUR, *Treatise of comp. Embr.* Vol. II. p. 375.

kann ich Götte's * Entdeckung, dass dieselbe bei den Amphibien ein Umbildungspunkt einer letzten Verbindung des Hirns mit der Oberhaut ist, für die Selachier bestätigen.

Aus dem oben Erwähnten folgt, dass die Anlage der Epiphysis ursprünglich mit dem vorderen Theil der Nervenleiste zusammenhängt. Dass dieser vordere, den Trigeminus entsendende Theil sich jemals continuell bis an die Anlage des Glossopharyngeus nach hinten fortsetzt, und mit dem hinteren, den Glossopharyngeus mit dem Vagus und den dorsalen Wurzeln der Spinalnerven verbindenden Theil zusammenhängt, habe ich nicht gefunden.

Es ist wohl nicht überflüssig, hier an das Schema eines zu einem Visceralbogen ziehenden Nerven zu erinnern: Ein solcher, nach Art einer dorsalen Wurzel entstehender Nerv theilt sich in einen Ram. dorsalis und einen Ram. ventralis. Jeder dieser beiden Rami kann ein Ganglion besitzen †. Der Ramus ventralis theilt sich in zwei Hauptzweige: Der eine derselben, der Ram. posttrematicus § (in der Ontogenie der eher angelegte) versorgt die Muskulatur des zu seinem Segmente gehörigen Visceralbogens, längs dessen *Vorderseite* er hinzieht. Der andere, der Ram. pharyngeus, zieht zu der Schlundhaut und entsendet nahe an seinem Ursprunge den Ram. praetrematicus ** zu der *hinteren* Seite des vorhergehenden Visceralbogens.

Die Nervenwurzeln †† des ersten Segmentes: Der Ophthalmicus profundus und der Oculomotorius.

Milnes Marshall hat zuerst die Entwickelung des Oculomotorius beschrieben, und seine Beziehungen zum ersten Myotome festgestellt. In Betreff dieser

---

* Götte, Entwickelungsgeschichte der Unke.

† Die dorsalen Hirnnervenwurzeln verhalten sich also hauptsächlich wie die dorsalen Rumpfnervenwurzeln der Gadoiden (vgl. Stannius, *Das peripherische Nervensystem der Fische*. p. 117, sub. 2).

§ Balfour nennt diesen Zweig: „main branch" oder „posterior branch" (l. c. und Treatise). Ich selbst habe ihn früher (l. c.) „Ramus posterior" genannt. Die letztere Benennungsweise kann aber zu einer Verwirrung mit dem gleichen, in der menschlichen Anatomie gebräuchlichen Ausdruck führen, weshalb ich den im Texte angewendeten vorschlage: Posttrematicus, und ebenso praetrematicus, von trema (Loch, Kiemenloch oder -spalte; vgl. die Namen der Myxinoidenarten: heptatrema, hexatrema etc.).

** Es ist auch möglich (aber wie mir scheint nicht so wahrscheinlich), dass der Ram. praetrematicus nicht als ein Zweig des Ram. pharyngeus aufzufassen ist, sondern einem Ram. pharyngeus in engerem Sinne gleichwerthig ist. In den folgenden Seiten wird unter Ram. pharyngeus stets ein solcher in engerem Sinne (d. h. nach Abzug des Ram. praetrematicus) verstanden.

†† Unter „Nervenwurzel" verstehe ich einen ganzen Nerv und nicht nur seinen proximalen Theil.

Beziehungen kann ich ihn vollkommen bestätigen; weiche aber in einem wichtigen Punkte von ihm ab. MARSHALL glaubt nämlich der Nerv repräsentire nicht nur eine ventrale, sondern auch eine dorsale Wurzel; wir werden sehen, dass er eine reine ventrale ist, und dass der Ophthalmicus profundus die mit dem Reste des Trigeminus verschmolzene dorsale Nervenwurzel des ersten Segmentes bildet.

Ophth. profundus. BALFOUR hat gezeigt, dass der Trigeminus nach Art der dorsalen Wurzeln an der oberen Medianlinie des centralen Nervensystemes entsteht, und dass fast von Anfang an zwei Zweige an ihm zu unterscheiden sind: der Ophth. profundus und der Ram. mandibularis. Als Entstehungsstelle giebt er das Vorderende des Hinterhirns an.

Ich finde, dass die Anlage des Trigeminus ausserordentlich breit ist. Die Nervenleiste ist im Stadium H zwischen Trigeminus und Facialis schon abortirt, streckt sich aber von dem vorderen Theile des Hinterhirns sogar noch bis vor der Augenblase aus, und nimmt also die ganze Breite des Mittelhirns ein (vgl. Fig. 30). Von derselben gehen zwei längere Auswüchse ab; der eine liegt vor dem zweiten Somite, der andere befindet sich an dessen Hinter- und Aussenseite. Nun schwindet die Nervenleiste allmählich von vorn nach hinten; was aus ihr wird, kann ich nicht mit Sicherheit angeben. Durch dieses Schwinden nähert sich der vordere Trigeminusauswuchs immer mehr dem hinteren; im Stadium I ist dies auf verticalen Längsschnitten deutlich zu sehen (Fig. 31). Hierdurch wird sein ursprünglich verticaler Verlauf in einen horizontal, über der oberen Wand des zweiten Somites gerichteten verändert, während zugleich sein Ursprung vom Mittelhirn allmählich aufgehoben wird, und er gemeinschaftlich mit dem hinteren Trigeminusauswuchs vom Vorderende des Hinterhirns entspringt. Schon sehr frühzeitig, nämlich schon im Anfang des Stadiums I, entsteht in ihm eine über dem Vorderende des zweiten Somites befindliche Verdickung, die Anlage des Ganglions ciliare (Fig. 31, *gl. c.*), welches das zuerst differenzirte Ganglion des ganzen Thieres ist. Da der Oculomotorius, wie wir sehen werden, erst in der letzten Hälfte des Stadiums J auftritt, kann das Ganglion nicht zu ihm gehören. Dasselbe liegt anfangs unmittelbar unter der Epidermis, rückt aber bald einwärts.

Der Verlauf des Ram. ophthalmicus profundus ist gut und ausführlich von MARSHALL beschrieben; er sagt, dass er im Stadium K gerade aus vorwärts verläuft längs dem Oberande der ersten Kopfhöhle (des ersten Somites), dann längs der Innenseite des Auges, während er am Vorderende des Kopfes dorsal von der Nasengrube endet. Ich will hinzufügen, dass er vor der Bildung des Ganglions längs der Innenseite des zweiten Somites, darauf längs der Aussenseite des ersten verläuft (vgl. Fig.

14—16), während er der Innenwand des Augenbechers enge angeschmiegt ist. In demselben Stadium sendet das Ganglion ciliare einen kurzen Zweig zur Epidermis, welcher senkrecht auf der Richtung des Ram. ophthalmicus profundus steht, in die Anlage des supra-orbitalen Schleimcanales endet, und mit den Zellen derselben so innig verschmolzen ist, dass die Theilnahme der Epidermis an der Bildung des Nervenzweiges höchst wahrscheinlich ist (Fig. 32, *pop.*). In den Stadien K und L ist dieser Zweig sowohl auf horizontalen als verticalen Längsschnitten deutlich zu sehen, später kann ich ihn aber nicht wiederfinden; auch wegen der Verkümmerung des Ganglions ciliare in den späteren Stadien, scheint es mir nicht unwahrscheinlich, dass der erwähnte Nervenzweig abortirt. Nichtsdestoweniger scheint mir sein Vorkommen von Interesse, da er wegen Ursprung und Endigung den Ramus dorsalis des Ophthalmicus profundus bildet. Bei Polypterus und Lepidosteus * ist ein solcher zeitlebens vorhanden; er entspringt aus dem Ganglion ciliare, bildet mit dem Ram. ophthalmicus superficialis † scheinbar ein Ganzes, und verläuft mit ihm über sämmtlichen Bildungen der Orbita hinweg. Ich habe ihn hierum die Portio Ophthalmici profundi des Ram. ophth. superficialis genannt. Sein Vorkommen, sei es auch nur im Embryo, bei Selachiern scheint mir, in Verbindung mit der Entstehungsweise des Ganglions ciliare und dessen jetzt zu erörternden Beziehungen zum Oculomotorius, zu beweisen, dass dasselbe einem Spinalganglion homolog ist. Marshall, der Entdecker des Ganglions im Embryo, hat dasselbe aus Mangel an Material erst im Stadium K gefunden, wann es das Maximum seiner Entwickelung erreicht hat, und an der Kreuzungsstelle des Oculomotorius mit dem Opthalmicus profundus liegt. Er nimmt an, dass es sich in der Bahn des Oculomotorius befinde; die (Fig. 32—34) abgebildete Serie von auffolgenden Schnitten scheint mir in überzeugender Weise zu zeigen, dass sich der Oculomotorius nicht an der Bildung des Ganglions ciliare betheiligt. Die Figuren sind nach horizontalen Längsschnitten durch den Körper gezeichnet, welche den abgebildeten Vordertheil des Kopfes (wegen der Kopfbeuge) im Querschnitt treffen. In Fig. 33 und 34, (links) sieht man, dass das Ganglion ciliare nicht in die Bahn des Oculomotorius eingeschaltet ist, sondern dass dieselbe ein wenig distal davon verläuft. Fig. 34 zeigt, dass das Ganglion sich mittels eines sehr kurzen Stie-

* Sieh van Wijhe, l. c.

† Schwalbe, (das Ganglion Oculomotorii. *Jen. Zeitschr.*, Bd. XII, 1879) hat auf anatomischem Wege gefunden, dass der Ram. opthalmicus superficialis bei den Selachiern aus zwei Nerven besteht, der Portio Facialis (P. major Schw.) und der Portio Trigemini (P. minor Schw.).

les mit dem Oculomotorius verbindet *. Dieser Stiel ist aber so kurz, dass man auf etwas dicken horizontalen, und auch auf verticalen Längsschnitten, welche letzteren hauptsächlich von MARSHALL studirt sind, leicht zu der Meinung gerathen kann, dass sich das Ganglion in der Bahn des Oculomotorius befinde. In weit vorgerückten Stadien, nach der Bildung der knorpeligen Schädelkapsel, finde ich das Ganglion, allerdings etwas rückgebildet, aber noch deutlich in der Bahn des Ophthalmicus profundus, unmittelbar nach seinem Eintritt in die Orbita und proximal von der Kreuzungsstelle mit dem Oculomotorius. Hieraus folgt, dass es nicht, wie von MARSHALL geschehen, mit dem von Schwalbe entdeckten und zu letzterem Nerven gehörigen Ganglion Oculomotorii identificirt werden darf.

Der Oculomotorius tritt am Ende des Stadiums J auf. Er ist nämlich in dem Stadium mit drei offenen Kiemenspalten vorhanden, in dem mit zwei noch nicht, sodass er gleichzeitig mit dem Erscheinen der unteren Wurzeln † des Rumpfes entsteht. Seine erste Entwickelung habe ich nicht wahrgenommen; die Stelle an welcher er auftreten wird, ist aber schon in dem Stadium mit zwei offenen Kiemenspalten deutlich markirt. Die Gehirnbasis ist hier nämlich (ebenso wie im Stadium K, sieh Fig. 32—34) flach, oder selbst statt convex, einigermassen concav. Hierdurch ist sie von den nach aussen convexen Seitenwänden des Gehirns scharf abgesetzt. Von dieser Grenzlinie (auf dem Querschnitt natürlich nur einem Grenzpunkt) entspringt der Oculomotorius, dessen proximaler Theil in denjenigen horizontalen Längsschnitten §, welche auch das Ganglion ciliare enthalten, sichtbar ist. Auch am Rumpfe ist die Basis des centralen Nervensystems in dieser Weise von den Seitentheilen abgesetzt (vgl. BALFOURS Fig. 5, Plate XIII), während die ventralen Nervenwurzeln von der Grenzlinie entspringen.

In dem Stadium mit drei offenen Kiemenspalten ist der Oculomotorius äusserst fein und nur zwei, nahe an einander liegende, durch faseriges Protoplasma verbundene Kerne dick. Nach dem Durchbruch der vierten Kiementasche sind die morphologischen Verhältnisse des Nerven wesentlich dieselben; nur ist er ein wenig dicker, und besteht aus einem Strang von gestreiftem Protoplasma an dessen Peripherie die Kerne in einer einfachen Schicht liegen (Fig. 32—34) **.

---

* Möglich ist dies keine wirkliche Verbindung, sondern nur eine Kreuzung.

† Diese treten nach BALFOUR bei dem Durchbruch der dritten Kiementasche auf.

§ Es ist vielleicht nicht überflüssig zu erinnern, dass diese das Mittelhirn im Querschnitt treffen.

** Histologisch stimmt der Nerv also fast vollkommen mit dem des Kaninchenembryo's überein; sieh KOELLIKER, *Entwickelungsgeschichte*, p. 613.

Eine, von MARSHALL behauptete, gangliöse Beschaffenheit des proximalen Theiles des Nerven kann ich nicht wahrnehmen. Wo derselbe mit mehreren Bündeln vom Mittelhirn entspringt, ist er breit und abgeplattet (Fig. 17). Diese Verbreiterung hat MARSHALL wahrscheinlich zu der Meinung veranlasst, hier eine gangliöse Anschwellung vor sich zu haben. Eine solche Verbreiterung findet man aber auf Längsschnitten aus dem Stadium K am Ursprunge aller ventralen Wurzeln der Spinalnerven.

Der Ursprung des Oculomotorius aus der Hirnbasis, die Zeit seines Auftretens, seine histologische Structur, der Mangel, noch im Stadium K, an einem eigenen Ganglion und seine Kreuzung, so nicht Verbindung, mit einer dorsalen Wurzel distal von deren Ganglion, scheinen mir zu beweisen, dass der Oculomotorius eine reine ventrale Wurzel ist. Wie MARSHALL gezeigt hat, liegt der Nerv im Stadium L, nach der Kreuzung mit dem Ophthalmicus profundus, der Hinterwand des ersten Myotomes enge angeschmiegt (Fig. 18, *oc*), während er später die sich aus demselben entwickelnden vier Augenmuskeln (den Musc. rect. superior, internus und inferior sowie den obl. inferior) innervirt. Die von dem erwähnten Autor aufgestellte Homologie seiner Zweige mit denen des Trigeminus, Facialis etc. muss ich, wegen seiner Natur als ventrale Wurzel, verwerfen.

Im Stadium O ist das von SCHWALBE bei erwachsenen Selachiern entdeckte Ganglion Oculomotorii aufgetreten (Fig. 35, *gl. o*). Es ist verhältnissmässig weit entfernt von dem Ganglion ciliare (vgl. Fig. 36, *gl. c*) und besteht aus einer Masse, welche die Andeutung einer Zweitheilung zeigt, und sich an dem Zweige für den Musc. obl. inf., an der Stelle wo derselbe sich mit der Arteria ophthalmica kreuzt, befindet. Es liegt also auf derselben Stelle wie beim erwachsenen Thier, und ist eine ziemlich grosse Strecke von dem Ganglion ciliare entfernt. In weit entwickelten Embryonen habe ich einen, aus dem Ganglion Oculomotorii entspringenden, rückwärts verlaufenden und die Arteria ophthalmica begleitenden Zweig wahrgenommen; hierum, und wegen der späten Entstehungszeit dieses Ganglions * muss ich es als zum Sympathicus gehörig betrachten †.

---

* BALFOUR hat bekanntlich nachgewiesen, dass die Ganglien des Sympathicus am Rumpfe sich an den Spinalnerven entwickeln.

† Die Homologie des Ciliarganglions mit einem Spinalganglion ist der Hauptgedanke, welcher der schönen von SCHWALBE verfassten Arbeit (l. c.) zu Grunde liegt. Ich muss ihn als vollkommen richtig anerkennen; nur hat SCHWALBE bei den Selachieren das Ganglion ciliare nicht gefunden, und das Ganglion Oculotomorii für dasselbe angesehen. Wodurch dies geschehen konnte liegt auf der Hand; SCHWALBE hat versäumt zu untersuchen, ob es im Opthalmicus profundus nicht ein Ganglion gäbe,

Die Nervenwurzeln des zweiten Segmentes:
Der Trigeminus (nach Abzug des Opth. prof.) und der Trochlearis.

Wie wir sahen, zeigt der *Trigeminus* bei seiner Anlage zwei Auswüchse; der eine gehört zu dem ersten Segmente, der andere zu dem zweiten, sodass der Trigeminus zwei dorsale Wurzeln repräsentirt. Der hintere Auswuchs verläuft bis im Stadium J an der Aussenseite des hinteren Theiles des zweiten, der vordere an der Aussenseite des ersten Somites. Durch das im ersten Capitel dieser Arbeit erörterte Wachsthum des zweiten Somites nach vorn, kommt der hintere Auswuchs im Stadium K gänzlich hinter dasselbe zu liegen. In diesem Stadium fängt er an, sich in drei Zweige zu differenziren. Der eine (Ram. mandibularis) kreuzt die Aussenseite der Stelle, wo das zweite Somit mit der Kieferhöhle zusammenhängt, und verläuft * dann längs der Vorderseite derselben hinunter. Da jeder Ram. posttrematicus des Vagus, sowie derjenige des Glossopharyngeus und des Facialis vor der Visceralhöhle des zugehörigen Kiemenbogens verlaufen, ist der Ram. mand. ungezweifelt einem Ram. posttrematicus homolog. Der Ram. mandibularis des Trigeminus hängt, wie jeder Ram. posttrematicus, an seinem Unterende mit dem Epithel der Wand der zugehörigen Visceralbogenhöhle zusammen, und entsendet in seinem Verlaufe Zweige zu dieser Wand.

Die beiden andern Zweige, welche im Stadium K an dem hinteren Trigeminusauswuchse auftreten, sind der Ram. maxillaris superior und die Portio Trigemini (P. minor, Schwalbe) des Ram. opthalmicus superficialis. Beide Zweige sind in der ersten Hälfte des Stadiums K bei Scyllium und Pristiurus nur eine Zelle dick und daher kaum sichtbar; ihre Dicke nimmt aber rasch zu, sodass sie von dem Stadium L an leicht zu sehen sind. Bei Galeus ist die Portio Trigemini schon im Anfang der Periode K beträchtlich entwickelt (Fig. 13, *tr'*); hier entspringt sie nicht wie bei Scyllium und Pristiurus aus dem gangliösen Stamm des Trigeminus, sondern scheinbar gemeinschaftlich mit dem Ophthalmicus profundus.

Die erwähnten drei Zweige, welche sich aus dem hinteren Trigeminusauswuchse entwickeln, sind alle zuerst von Balfour beim Embryo beschrieben. Milnes Marshall hat zuerst den Ram. ophth. prof. von der Portio Trigemini un-

welches das Gangl. ciliare sein könnte. Um einen Wortstreit zu verhüten, möchte ich hier bemerken, dass ich die Homologie des Ciliarganglions der Selachier mit demjenigen der höheren Thiere des weiteren Beweises bedürftig achte, weil bei diesen dasselbe oft mit dem Gangl. Oculomotorii verwechselt zu sein scheint.

* Sieh meine vorläufige Mittheilung: *Verslag der verrigtingen aan de Nederlandsche werktafel in het zoölogisch station te Napels.* Maart—Junij 1881, im „Staatscourant" des vierten und fünften Sept. 1881.

terschieden und mit SPENCER mittels der Entwickelungsgeschichte die wahre Grenze zwischen den Wurzeln des Trigeminus und Facialis erkannt.

Das vordere der beiden, beim erwachsenen Thier sich vorfindenden Wurzelbündel des Trigeminus entsteht im Stadium L, und unterscheidet sich durch seine nicht gangliöse Beschaffenheit von dem hinteren. MARSHALL glaubt in dem ersteren eine ventrale Trigeminuswurzel zu erblicken; diese Meinung ist schon von BALFOUR genügend widerlegt. Nachdem wir gesehen haben, dass der Trigeminus zwei dorsale Wurzeln repräsentirt, welche nur, wegen der Breite des sie verbindenden Theils der Nervenleiste, anfangs scheinbar *eine* Anlage bilden, wird es wohl nicht befremdend scheinen, dass diese Anlage später auch an ihrer Basis die Spuren einer Zweitheilung zeigt, mit andern Worten, dass das ursprünglich einheitliche Wurzelbündel des Trigeminus sich später in zwei Bündel differenzirt. Dass das vordere, dem Ophth. prof. zugehörige, nicht gangliös ist, folgt aus der frühen Differenzirung des Ganglions ciliare, welche, wie wir sahen, schon im Stadium I anfängt; das hintere Wurzelbündel des Trigeminus ist im Stadium L noch gangliös, weil es sich dann noch nicht in das Ganglion Gasseri und den dasselbe später mit dem Gehirn verbindenden Stiel differenzirt hat.

Der Trochlearis ist die dem zweiten Segmente zugehörige ventrale Nervenwurzel; hierfür kann ich nicht den directen, auf die Ursprungsstelle vom Gehirn etc. gegründeten Beweis anführen, sondern nur den indirecten, nämlich diesen, dass der Trochlearis den Musc. obl. sup. innervirt, welcher, wie wir im ersten Capitel dieser Arbeit gesehen haben, ein Product des zweiten Somites ist. Da nun die Hauptmasse des Trigeminus die dorsale Wurzel des zweiten Segmentes ist, muss der auch zu demselben gehörige Trochlearis die ventrale Wurzel sein. Ich bin nicht glücklicher gewesen als MARSHALL und SPENCER, welche den Nerv erst im Stadium N gefunden haben, wann er äusserst dünn ist, und der Hauptsache nach dieselben Verhältnisse wie beim erwachsenen Thier zeigt.

Die Nervenwurzeln des dritten und vierten Segmentes: Der Acustico-Facialis und der Abducens *.

Die Entdeckung BALFOURS dass der *Acustico-Facialis* als eine dorsale Wurzel entsteht, kann ich nur bestätigen. Im Stadium K besitzt der Nerv vier, schon von BALFOUR beschriebene Zweige, welche kurz, aber so dick sind, dass der Nerv dem Vagus an Volum kaum nachsteht, und alle übrigen Nerven weit übertrifft. Das Ganglion wird durch eine grosse gangliöse Masse

* Die ventrale Nervenwurzel des vierten Segmentes fehlt.

repräsentirt, welche eben angefangen ist, sich für jeden der vier Zweige in ein besonderes Ganglion zu differenziren. Der eine Zweig, der Ram. ventralis * läuft hinunter zur oberen, hinteren Wand der ersten Kiemenspalte, mit deren, an dieser Stelle verdicktem Epithel er zusammenfliesst. Aus dieser Verschmelzungsstelle wachsen in späteren Stadien sowohl der Ram. palatinus (Ram. pharyngeus), als der Zweig zur Pseudobranchie des Spritzloches (Ram. praetrematicus) hervor. In den Stadien K und L geht von derselben nur der Ram. hyoideus (Ram. posttrematicus, Fig. 37, *fa'''*) aus, welcher durch das Bindegewebe des Hyoidbogens längs der Vorderwand der Hyoidhöhle verläuft, in welche er feine Fäden entsendet und mit deren Unterende er zusammenhängt. Der Nerv besteht aus faserigem Protoplasma mit eingestreuten Kernen, welche nicht bloss eine periphere Schicht bilden, wie beim Oculomotorius.

Die drei übrigen Hauptzweige des Acustico-Facialis bilden einen dreistrahligen Stern, dessen einer Strahl, der Acusticus, hinterwärts gerichtet ist, während die beiden andern, fast in einer Verticalebene nach vorn divergirend, den Hinterrand des Auges zwischen sich fassen (Fig. 37, *fa'* und *fa''*; das Auge ist beim Einbetten des Schnittes zu viel nach unten getrieben). Sie sind beide ungefähr gleich lang, gleich dick und endigen resp. in die Anlage des supraorbitalen und eines infraorbitalen Schleimcanales. Der eine, später über den Orbita vorwärts verlaufende, ist von MARSHALL richtig als die Portio Facialis des Ram. ophth. superficialis erkannt, während er den andern, später unter der Orbita und an der Aussenfläche des Ram. max. sup. Trigemini hinziehende, anfänglich für den Ram. palatinus Facialis hielt, und hierin von BALFOUR † gefolgt wurde. Bald nachher hat er aber, in Vereinigung mit SPENCER § und ungefähr gleichzeitig mit mir **, gefunden, dass diese Deutung nicht richtig, und dass der Nerv der Ram. buccalis ist.

Betrachten wir jetzt die ersten, zur Zeit noch nicht beschriebenen Entwickelungsstadien des Ram. buccalis und der Portio Facialis, so finden wir, dass beide Nerven gegen das Ende des Stadiums J oder den Anfang des K gemeinsam als ein kurzes Rudiment entstehen, welches, vom Facialis nahe an seinem Austritt aus dem Gehirn entspringend, in eine kleine, hinter dem Auge befindliche, verdicte Stelle der Epidermis endet. An dieser Stelle sind die Zellen der Epider-

* BALFOUR und MARSHALL nennen ihn Ram. hyoideus; er enthält aber nicht nur den proximalen Theil dieses Zweiges, sondern auch denjenigen des sich später entwickelnden Ram. palatinus und des Zweiges für die Pseudobranchie.

† BALFOUR, Treatise of comp. Anat.

§ MARSHALL und SPENCER, l. c.

** VAN WIJHE, Verslag der verrigtingen etc. l. c.

mis cylindrisch geworden, während viele der Kerne in die Tiefe gerückt erscheinen, und von denen des Nerven nicht zu unterscheiden sind. Dieselbe bildet bald zwei dichotomisch divergirende, vorwärts gerichtete Ausläufer, welche das Auge zwischen sich fassen; der über dem Auge verlaufende ist die Anlage des supraorbitalen, der unter dasselbe hinziehende diejenige eines infraorbitalen Schleimcanales. In derselben Weise wie das Organ der Seitenlinie nach hinten wächst, wachsen diese beiden Anlagen nach vorn. In derselben Richtung wächst auch der sie versorgende Nerv, welcher mit dem Epithelium der Schleimorgananlage zusammenhängt, während er seitlich feine Fasern zu jener Anlage abgiebt. Hierbei ist dieselbe dem Vorderende des Nerven immer ein wenig voraus.

Dass es sich hier nicht bloss um eine enge Aneinanderlagerung, sondern um einen wirklichen Zusammenhang handelt, ist besonders deutlich an verletzten Präparaten zu sehen, bei welchen sich die Epidermis auf dem Schnitt ein wenig vom Bindegewebe abgehoben hat. Einen solchen habe ich (Fig. 38) gezeichnet. Hier ist das Vorderende der (noch äusserst kurzen) Portio Facialis mit der Anlage des Schleimorganes in Verbindung geblieben, während hier und dort zwischen der inneren Schicht der Kerne des Schleimorganes andere eingeschoben sind, von denen man nicht sagen kann, ob sie zum Nerven oder zu dessen Endorgane gehören. Auch ist das Protoplasma des Nerven mit dem des Schleimorganes verbunden, sodass ich die Betheiligung des letzteren an der Bildung des Nerven für fast sicher halten muss.

In einem etwas älteren Stadium (Fig. 37) hat sich das hintere (ältere) Ende, sowohl des Ram. buccalis als der Port. Facialis, von der Anlage des Endorganes gelöst, ist in die Tiefe gerückt, wird durch zwischendringendes Bindegewebe von der Haut getrennt, und ist mit dem Schleimorgane nur durch feine Ausläufer, Nebenzweige, verbunden. Das fortwachsende Vorderende hängt aber noch mit dem des Schleimorganes zusammen.

Was nun die morphologische Bedeutung des Ram. buccalis betrifft, so muss ihm derselbe Werth zuerkannt werden wie der Portio Facialis: 1°. Wegen der Entstehung aus derselben Anlage, 2°. der gleichen Zeit des Auftretens, 3°. der gleichen Wachsthumsweise, und 4°. der gleichen Innervirung eines Schleimorganes. Die Portio Facialis gehört bekanntlich zu dem System der Rami dorsales, somit gehört auch der Ram. buccalis zu diesem Systeme. Wegen seines Verlaufes unter dem Auge wird es anfangs vielleicht etwas paradox scheinen, dass der Ram. buccalis zu den Rami dorsales gehöre. Ein analoger Fall bietet aber z. B. der Ram. lateralis Vagi, der bei einigen Teleostiern bekanntlich Zweige zur ventralen Körperfläche entsendet.

Da auch der Acusticus ein Ramus dorsalis des Facialis ist, wie GEGENBAUR

*

zuerst gezeigt hat, und durch BALFOUR und MARSHALL bestätigt worden ist, besitzt der Facialis im Stadium K scheinbar drei Rami dorsales. Inderthat glaube ich aber, dass die Portio Facialis mit dem Ram. buccalis als ein einziger, sich dichotomisch verzweigender Nerv aufgefasst werden muss: 1°. weil beide als ein einheitliches Rudiment angelegt werden, und 2°. später noch mit ihren Bases zusammenhängen (Fig. 37), ja sogar beim erwachsenen Thier * gemeinschaftlich aus der oberen der beiden Facialiswurzeln entspringen.

Durch die im ersten Capitel dieser Arbeit erläuterte Thatsache, dass ursprünglich zwei Somite mit der Anlage des Hyoidbogens zusammenhängen, liegt die Vermuthung nahe, dass der Facialis eine Zusammensetzung aus zwei Nerven erkennen lassen werde. In den Rami dorsales scheint mir die Andeutung einer solchen wirklich vorhanden; der Acusticus gehört seines Ursprunges und anfänglichen Verlaufes wegen zum vierten, der Ram. buccalis mit der Portio Facialis aus denselben Gründen zum dritten Segmente. In dem Ram. ventralis habe ich nicht mit Sicherheit eine Doppelnatur beobachten können. In einer früheren Arbeit † habe ich die Hypothese aufgestellt, dass nicht nur der Ram. hyoideus, sondern auch der Ram. mandibularis des Facialis ein Ram. ventralis repräsentire. Ontogenetische Thatsachen für oder gegen dieselbe kann ich nicht anführen, da mir die Entwickelungsgeschichte des Ram. mand. Fac. unbekannt geblieben ist. Im Stadium L giebt der Ram. buccalis einen kurzen, feinen Zweig zu der oberen Wand des Spritzloches ab (Fig. 37); dieser wird bald viel stärker und scheint hinter dem Spritzloche zu verlaufen, möglicherweise ist er die Anlage des Ram. mand. externus des Facialis, doch kann ich dies nicht mit Sicherheit behaupten.

Der Trigeminus und der Facialis, welche noch im Anfang des Stadiums K ganz unabhängig von einander sind, vereinigen sich später nicht weit von ihrem Ursprunge. Diese Vereinigung kommt dadurch zu Stande, dass der Ram. buccalis an seiner Basis sich mit dem Gangl. Gasseri, dessen Aussenseite er unmittelbar aufliegt, verbindet. Diese Verwachsung is nicht ursprünglich, wie MARSHALL, weil er die Stadien vor K nicht beobachtet hat, glauben konnte; durch dieselbe wird erklärlich, weshalb man lang Zeit geglaubt hat, dass der Ram. buccalis zum Trigeminus gehöre.

Der Abducens ist zuerst von MARSHALL im Embryo gefunden; seine Wahrnehmung, dass der Nerv nicht gangliös angelegt wird, und mit mehreren Bündeln unmittelbar hinter dem Facialis aus der Gehirnbasis entspringt, kann ich

* Sieh MARSHALL und SPENCER, l. c. p. 487 und 489.

† VAN WIJHE, l. c.

vollkommen bestätigen. Ich finde den Nerv zuerst in der Mitte des Stadiums K vorhanden. Der auf die Ursprungsstelle, histologische Structur und späte Entstehungszeit gegründeten Deutung des Nerven als ventrale Wurzel durch MARSHALL stimme ich vollkommen bei. Dass der Nerv zu einem Segmente gehöre von welchen der Facialis die dorsale Wurzel repräsentirt, leitet der erwähnte Autor aus der Nähe der Ursprungsstellen der beiden Nerven ab; ich kann dies erhärten durch die im ersten Capitel dieser Arbeit erläuterte Entstehung des vom Abducens innervirten Musc. rect. externus aus dem dritten Myotome. Der Abducens ist also die ventrale Nervenwurzel des dritten Segmentes; diejenige des vierten Segmentes fehlt; wir werden in dem allgemeinen Theile dieser Arbeit die Erklärung dieses Fehlens kennen lernen.

Die Nervenwurzel des fünften Segmentes:
Der Glossopharyngeus.

Seiner von BALFOUR beschriebenen Entstehungsweise zufolge ist der *Glosopharyngeus* eine dorsale Wurzel (vgl. Fig. 4). Bekanntlich ist er der Nerv des dritten Visceralbogens (des ersten Kiemenbogens) und da dieser, wie wir gesehen haben, ursprünglich mit den Wänden des fünften Somites zusammenhängt (Fig. 3), ist der Glossopharyngeus der Nerv des fünften Kopfsegmentes. Mit allen andern dorsalen Hirnnervenwurzeln hat er die Lage an der Aussenseite des zu seinem Segmente gehörigen Somites gemein, er kreuzt aber nicht, wie ursprünglich der Trigeminus, die hintere Hälfte desselben sondern die vordere.

Während des Stadiums K differenzirt sich das Rudiment des Nerven in den Ram. dorsalis und den Ram. ventralis. Der erstere verschmilzt mit der auch in diesem Stadium auftretenden Epidermisverdickung, welche die Anlage des vom Glossopharyngeus versorgten Theiles des Schleimcanalsystemes ist (Fig. 39). Aehnlich Bilder wie die für die Portio Facialis des Ram. ophth. sup. erwähnten, führen zu der Annahme, dass die Zellen der Schleimorgananlage an der Bildung des sie versorgenden Nerven theilnehmen. Der Ram. ventralis verläuft zu der oberen, hinteren Wand der zweiten Kiementasche (das Spritzloch wird als die erste betrachtet) mit deren, an dieser Stelle verdicktem Epithel er verschmilzt. Aus dieser Verschmelzungsstelle entwickeln sich in späteren Stadien der Ram. praetrematicus und pharyngeus; in K und L geht von derselben nur der Ram. posttrematicus aus, welcher längs der Vorderwand der Höhle des ersten Kiemenbogens verläuft. In diese Wand entsendet er feine Fäden, und hängt mit ihrem Unterende zusammen.

Im Stadium L tritt in dem Ganglion des Glossopharyngeus die Spur einer

Zweitheilung auf (Fig. 18 und 19). Der eine Theil liegt an der Basis des Ram. dorsalis, der andere an derjenigen des Ram. ventralis. Ob diese angefangene Trennung später vollzogen wird, habe ich nicht ermittelt. Eine ventrale Wurzel felht * dem fünften Segmente. Allerdings entspringt der Glossopharyngeus seit dem Stadium K mit zwei Strängen, von denen der vordere etwas mehr dorsal liegt als der hintere. Letzterer kann aber in keiner Hinsicht die Bedeutung einer ventralen Wurzel beanspruchen.

Die Nervenwurzeln des sechsten, siebenten, achten und neunten Segmentes: Der Vagus und der Hypoglossus.

Balfour hat entdeckt, dass der *Vagus* kurz nach der Anlage des Trigeminus und Facialis auftritt, und wie die dorsalen Nervenwurzeln entsteht. Er sagt †: „Behind the auditory involution, at a stage subsequent to that in which the fifth and seventh nerves appear, there arise a series of roots from the dorsal summit of the hind-brain, which form the rudiments of the glosso-pharyngeal and vagus nerves. These roots are formed towards the close of stage H, but are still quite short at the beginning of stage I."

Ich habe mich sehr bemüht die ersten Stadien des Vagus, sowie die von Balfour nicht angegebene Zahl seiner Auswüchse kennen zu lernen, und gebe folgende Schilderung seines Verhaltens:

Fig. 40 und 41 zeigen uns den Nerv im Anfang des Stadiums I. Sie repräsentiren zwei auffolgende Längsschnitte, welche nicht vertical, sondern ziemlich schief genommen sind. Fig. 40 ist der erste Schnitt der Serie; er zeigt die (einschichtige) Epidermis, welche an zwei Stellen verdunkelt ist. Die eine Stelle ist der Rand der noch nur seicht vertieften Ohrverdickung, die andere ist die Anlage des Vagus. Auf dem folgenden Schnitt (Fig. 41) sind die Anlage des Trigeminus, des Acustico-Facialis, des Glossopharyngeus, die hinteren Kopf- und vorderen Rumpfsomite, das centrale Nervensystem und der Boden der Ohrblase getroffen. Vom Vagus sieht man noch einzelne distale Ausläufer; der hintere Theil des Vagus und die Rückenmarksnerven sind noch nicht angelegt, während am Rumpfe nur der vordere Theil der Nervenleiste aufgetreten ist. Der Vagus zeigt sich als ein unsegmentirter Auswuchs der Nervenleiste, welcher vorn am breitesten ist (am weitesten nach unten zieht), nach hinten allmählich schmäler wird, und einigermassen die Gestalt eines ungleichseitigen Trapeziums hat, welches mit der Basis über dem

* Sieh aber den allgemeinen Theil.

† Balfour, l. c. p. 192.

6ten bis 9ten Somite am Gehirn befestigt ist, während seine mit der Basis parallele Wand die Aussenseite des sechsten und theilweise des siebenten Somites kreuzt.

In der ersten Hälfte des Stadiums J entsendet die Nervenleiste des Rumpfes die Anlage der dorsalen Spinalnervenwurzeln als ein kurzer Ausläufer längs der Innenseite je eines Somites. Im Vagusgebiete dagegen wendet sich die sehr verbreiterte Nervenleiste über den hinteren Kopfsomiten nach aussen, zieht an der Aussenseite derselben weiter nach unten als im vorigen Stadium, und hat im Wesentlichen dieselbe trapezförmige unsegmentirte Gestalt. Der Glossopharyngeus hängt nur proximal mit dem Vagus zusammen, in gleicher Weise wie die proximalen Theile der dorsalen Wurzelanlagen des Rumpfes mittels der Nervenleiste verbunden sind.

Erst in der zweiten Hälfte des Stadiums J finde ich, dass eine Segmentation des Vagus auftritt. Der hintere Theil der in seinem Gebiete sehr verbreiterten Nervenleiste entsendet nämlich je über dem 8ten und 9ten Myotome einen kurzen Auswuchs, welcher denen der dorsalen Spinalnervenwurzeln ähnlich ist (Fig. 10, vg_3 vg_4). In diesem Stadium wird auch der erste Kiemenzweig des Vagus deutlich (Fig. 11); es scheint fast, alsob er sich nur zufolge der Anlage der vierten Kiementasche differenzirt, und alsob er, wenn diese nicht vorhanden wäre, eine einheitliche Masse mit dem Rest der Anlage bilden würde. Er liegt ganz hinter dem fünften, zum Glossopharyngeussegmente gehörigen Somit, kreuzt dagegen die Aussenseite des sechsten.

Die Lagerungsbeziehung der dorsalen Nervenwurzeln zu den Somiten ist jetzt im Kopfe eine andere als im Rumpfe geworden. Ursprünglich befinden sich diese Wurzelanlagen in beiden Körpertheilen über den Somiten. Im Rumpfe wachsen letztere an der Aussenseite der Nerven zwischen denselben und der Haut hinauf; im Kopfe dagegen wachsen sie zwischen dem centralen Nervensystem und den dorsalen Nervenwurzelanlagen empor, sodass sie an der Innenseite der letzteren zu liegen kommen.

In dem letzten Theile des Stadiums J verschmälert sich nun die breite, über dem 6ten bis 9ten Myotome befindliche Wurzel des Vagus, nahe an ihrem Ursprunge, in der Richtung von hinten nach vorn, während zugleich die drei hinteren der vier Vagusauswüchse nach vorn gedrängt werden. In derselben Richtung wachsen das 9te bis 7te Myotom empor, und es hat den Schein, alsob dieses Emporwachsen die Ursache der Verschmälerung des Vagusursprunges und des nach vorn Dringens seiner hinteren drei Auswüchse ist.

In dieser Weise kommt es, dass eine ziemlich lange Strecke der Nervenleiste zwischen dem Vagus und dem ersten Spinalnerv in den folgenden Stadien keine Nervenauswüchse zeigt, eine Thatsache auf welche BALFOUR aufmerksam ge-

macht hat. Dieser Untersucher glaubt, jene Strecke der Nervenleiste beweise, dass der Vagus phylogenetisch mehrere Zweige, welche in der Ontogenie nicht mehr angelegt werden, besessen habe. Wir haben gesehen, dass dies nicht der Fall ist, dass die Auswüchse ursprünglich vorhanden sind, aber nahe an ihrem Ursprunge von hinten nach vorn gedrängt werden.

Noch vor dem Anfang des Stadiums K sind die drei hinteren der Vagusausläufer so weit nach vorn gedrängt, dass sie sich erst über der vorderen Hälfte des siebenten Myotomes nach unten wenden, und fast eine einheitliche Masse darstellen (Fig. 8); der Ram. primus Vagi ist durch die vierte Kiementasche von ihnen getrennt.

Im Stadium K verliert die Nervenleiste bekanntlich zwischen den (dorsalen) Nervenwurzeln ihre Verbindung mit dem Gehirn. Dies geschieht auch im Vagusgebiete, wo dieselbe wie wir gesehen haben, vorn äusserst breit war (sich weit nach unten und aussen ausdehnte). Der Vagus entspringt dadurch jetzt nicht mehr mit einer langen Basis, sondern mit mehreren Wurzeln, deren Zahl schwerlich genau anzugeben ist, aus dem Gehirn (Fig. 17). Die Nervenleiste ist jetzt zu einer Commissur geworden, welche parallel dem Rückenmarke verlaufend, die dorsalen Spinalnervenwurzeln verbindet, zwischen dem ersten Spinalnerv und dem Vagus eine Strecke weit keinen Nerv entsendet, an der Stelle wo die vier Vagusausläufer von ihr abgehen sehr verbreitert ist, und an dem in dem jetzigen Stadium mit zwei Wurzelbündeln entspringenden Glossopharyngeus endet. Von den drei vorderen Vagusausläufern ist der erste der stärkste, der zweite schwächer und der dritte am schwächsten (wie auch im folgenden Stadium, sieh Fig. 18). In jedem fängt sich ein Ganglion zu differenziren an; jeder verschmilzt mit dem verdickten Epithel der oberen, hinteren Wand der vor ihm befindlichen Kiemenspalte, und verläuft weiter vor der Vorderwand der zu seinem Bogen gehörigen Visceralhöhle, in deren Seitenwand er Zweige abgiebt und mit deren Unterwand er zusammenhängt, nach unten. Jeder dieser drei Ausläufer ist also deutlich ein Ramus ventralis, dessen Ram. posttrematicus nur entwickelt ist. Aus der Verschmelzungsstelle mit dem Epithel der Kiemenspalte geht später je ein Ram. praetrematicus und Ram. pharyngeus hervor.

Was nun den vierten Vagusausläufer betrifft, dieser ist weit stärker als jeder drei andern (Fig. 42, vg_4.); er ist ziemlich kurz, aber dick, kreuzt die Aussenseite der Vena jugularis, und endet in dem Epithel der vorderen, oberen Wand des Ganges, welcher zur Seite der Darmes die Communication * des

* In den Stadien K und L steht die Pericardialhöhle ausserdem noch ventral und lateral von der Leber mit der Leibeshöhle und deren Fortsetzung in den Dotterstiel in Communication. In der ventralen Medianlinie ist aber schon eine Scheidewand zwischen Pericardialraum und Leibeshöhle aufgetreten.

Pericardialraums mit der Leibeshöhle darstellt (Fig. 42, *p*.) unmittelbar vor der Stelle, an welcher der Ductus Cuvieri sich in den Sinus venosus stürzt, dessen hinterer Theil mit der Leber von einer gemeinschaftlichen Kapsel umhüllt wird.

Dieser vierte Vagusausläufer, in welchem sich auch ein Ganglion zu differenziren anfängt, ist der Ram. intestinalis; im Stadium L, in welchem die sechste und letzte Kiementasche nach aussen durchbricht, setzt er sich mit dem Epithel an ihrer oberen und hinteren Seite in Verbindung. Aus dieser Verschmelzungsstelle entwickelt sich später wahrscheinlich der vierte und letzte Ram. praetrematicus + Ram. pharyngeus des Vagus. Seiner Entwickelung und seinen Verbindungen im Stadium L zufolge ist der Ram. intestinalis der vierte Ram. ventralis des Vagus. Wie jeder der drei vorderen steht er in diesem Stadium sowohl mit dem Epithel der vor ihn befindlichen Kiementasche als mit der Wandung eines Abschnittes der secundären Leibeshöhle in Verbindung. Da sich, wie wir gesehen haben, von dem Pericardialraum keine besondere Höhle für den letzten Kiemenbogen abschnürt, hat die directe Verbindung des Nerven mit der Wand des Pericardialraums nichts befremdendes, muss vielmehr mit der Versorgung der Wand einer Visceralbogenhöhle durch den vor derselben verlaufenden Nerv homolog erachtet werden.

Der Auffassung Balfour's, nach welcher der Ram. intestinalis eine Commissur repäsentire, kann ich nicht beistimmen; sie wird, wie ich glaube, durch die hier erörterte Entstehung des Nerven widerlegt.

Wenden wir uns jetzt zu den Rami dorsales des Vagus. Diese werden im Anfang des Stadiums K zu zweien angelegt. Der eine, der Ram. supratemporalis, welcher auch beim erwachsenen Thier selbständig ist, entsteht durch die Verschmelzung des Ram. I Vagi mit einer isolirten Epidermisverdickung (Fig. 39, vg_1), welche später sowohl einen Theil des Hauptschleimcanales als der supratemporalen Quercommissur zu bilden scheint. Ueber die Betheiligung der Zellen der Schleimorgananlage an der Bildung des sie versorgenden Nerven kann ich Aehnliches erwähnen wie für die Portio Facialis des Ram ophth. sup. etc. gesagt ist.

Der andere Ram. dorsalis ist der Ram. lateralis, welcher an der Abgangsstelle des Ram. II, Ram. III und Ram. intestinalis Vagi entspringt, und darum drei Rami dorsales repräsentirt, wiewohl ich ihn, von seinem ersten Erscheinen an, nur als einen einheitlichen Nerv gefunden habe.

Balfour hat die Anlage der Seitenlinie und des Seitennerven ausführlich beschrieben. Er hat gezeigt, dass erstere im Anfang des Stadiums K * am Hin-

* Ich finde, dass sie bei einigen Embryonen schon in der zweiten Hälfte des Stadiums J erscheint.

terkopfe auftritt, und sehr kurz aber breit ist, aus einer verdickten Stelle der Epidermis besteht, und allmählich nach hinten wächst. Weiter hat BALFOUR gezeigt, dass der Seitennerv dieselbe Wachsthumsrichtung wie die Seitenlinie hat, und die Entdeckung SEMPER'S *, dass das fortwachsende Hinterende des Nerven zwischen den Zellen desjenigen der Seitenlinie eingeschlossen ist, bestätigt. Der ältere, vordere, Theil des Nerven rückt allmählich in die Tiefe.

Mit diesen Beobachtungen stimmen die meinigen, von denen ich Folgendes hervorhebe, überein. Die Seitenlinie tritt im letzten Theile des Stadiums J oder im Anfang des K als eine breite einheitliche Epidermisverdickung auf, welche sich bald nach hinten ausdehnt. Ihre Kerne liegen in mehreren Schichten; von den am tiefsten nach innen gerückten kann man nicht sagen, ob sie zu der Seitenlinie oder zu der Anlage des Seitennerven, welche mit derjenigen des Seitenorgans zusammenhängt, gehören. Ich besitze viele Schnitte, welche vollkommen ähnliche Verhältnisse zwischen der Anlage des Nerven und des von ihm versorgten Organes zeigen als bei den ersten Stadien der Portio Facialis des Ram. ophth. sup. beschrieben sind. Je mehr der Nerv nach hinten wächst, desto mehr rückt sein vorderes, älteres, Ende in die Tiefe, und bleibt nur mittels feiner Nebenzweige mit der Anlage des Seitenorganes in Verbindung. Letztere ist anfangs ganz flach; ich finde sie in diesem Zustande noch wenn sie das zehnte Segment erreicht hat. Bald aber senkt sich ihr hinteres, fortwachsendes Ende in die Tiefe, und verursacht eine zapfenförmige Hauteinstülpung, deren blinde Spitze nach hinten und deren offene Basis nach vorn gerichtet ist. Auf horizontalen Längsschnitten ist dies sehr deutlich zu sehen (Fig. 39), und ich zweifle nicht, dass BALFOUR, der zur Studirung dieses Punktes nur Querschnitte anwendete, durch dieselben in seiner Meinung, dass im hinteren Theile des Seitenorganes durch das Auseinanderrücken ihrer Zellen ein Lumen entstehe, irre geführt irt. Sich auf dieser Meinung stützend, hat BALFOUR für die Selachier einen besonderen Bildungstypus † des Seitencanales behauptet. Ich besitze keine Embryonen, bei welchen ich die Bildung des Lumens in der Seitenlinie verfolgen konnte. Im Kopfe aber fand ich, dass die Schleimorgane die Form einer Rinne, deren Ränder später verwachsen, annehmen. Da eine Rinnenform des Seitenorganes nach SOLGER § zeitlebens bei Echinorhinus persistirt, müssen wir, wie

---

* SEMPER, Das Urogenitalsystem der Plagiostomen, *Arbeiten a. d. Zool.-Zoot. Inst. zu Würzburg.* Bd. II. S. 398.

† BALFOUR, Treatise II p. 444.

§ SOLGER, Neue Unters. zur Anat. der Seitenorgane der Fische. *Arch. f. mikr. Anat*, Bd. XVII.

mir scheint, annehmen, dass der Seitencanal der andern Selachier durch den Verschluss einer Rinne entsteht.

Was nun den Seitennerv betrifft, so muss ich auf denselben Gründen als für die Nerven der andern Schleimorgane angeführt sind, annehmen, dass das Seitenorgan an seiner Bildung theilnimmt. Bekanntlich hat GÖTTE zuerst für Amphibien die Abstammung eines ein Scheimorgan innervirenden Nerven aus den Zellen dieses Organes behauptet; SEMPER hat ihm hinsichtlich des Seitennerven der Selachier beigestimmt. BALFOUR, wiewohl eine solche Abstammung nicht absolut in Abrede stellen wollend, führt drei Einwände gegen dieselbe an, von denen der belangreichste ist, dass die Nerven der übrigen Schleimorgane nicht aus dem Ectoderm entstehen. Hinsichtlich derselben sagt BALFOUR (l. c., p. 145): „The important point to be noticed is, that at first no nervous structures are to be seen in connection with (the canal-system of the head). In stage O nerves for the mucous canals make their appearance." Ein Blick auf Fig. 39 genügt um einzusehen, dass dies unrichtig ist. Im Stadium K ist die Verbindung der Nerven mit den entstehenden Schleimorganen leicht zu constatiren (Fig. 38 und 39). Später wird dies schwerer wegen der Feinheit der Nebenzweige, und nur hierdurch kann ich mir erklären, dass BALFOUR den Zusammenhang des Nerven mit dem Endorgane erst in späteren Stadien gefunden hat.

Recapitulirend finden wir also, dass der Vagus in den Stadien K und L vier Rami ventrales und typisch ebenso viele Rami dorsales besitzt; von den letzteren sind aber scheinbar nur zwei vorhanden, da der Ram. lateralis die Elemente dreier in sich vereinigt. Nahe an ihrem Ursprunge sind die vier Stämme, aus denen je ein Ram. ventralis und dorsalis entspringt, zusammengeschnürt, und durch die aus der Nervenleiste entstandene dorsale Längscommissur mit dem Glossopharyngeus und den Spinalnerven verbunden. Der Vagus entspringt mit mehreren Wurzelbündeln aus dem Gehirn; mittels derselben glaubten GEGENBAUR und BALFOUR die Zahl der dem Vagus homologen Spinalnervenwurzeln bestimmen zu können. Nach dem in den letzten Jahren über das Auseinanderfahren der Spinalnervenwurzeln bei ihrem Eintritt in das Rückenmark bekannt Gewordenen, scheint mir die eben erwähnte Methode nicht zum Ziel führen zu können.

Es hat mich sehr gewundert zu finden, dass der Vagus bei Scyllium und Pristiurus den oberen Wurzeln von nur vier Spinalnerven homolog ist, und anfangs hielt ich das zehnte und elfte Myotom, welche im Stadium K nur rudimentäre obere Wurzeln besitzen (Fig. 23) für Myotome des Hinterkopfes, und glaubte ihre dorsalen Nervenwurzeln seien zurück gelassene Theile des Vagus, welche später abortirten. Nachher habe ich mich aber überzeugt, dass sie die dorsalen

*

Wurzeln des ersten und zweiten Halsnerven sind, denn in den Embryonen der Stadien L bis P, welche letzteren bekanntlich fast in allen Organen die Form des Erwachsenen zeigen, finde ich nie mehr als drei Muskelsegmente ohne zugehörige obere Wurzel hinter dem Vagus. Das erste derselben gehört, wie ich im vorigen Capitel gezeigt habe, zum siebenten Kopfsegmente.

Wie sich diese Verhältnisse des Vagus mit denen bei Hexanchus und Heptanchus in Einklang bringen lassen, glaube ich nicht, dass zur Zeit durch Speculationen festzustellen ist.

Der Hypoglossus wird durch drei ventrale (von den Hirnbasis entspringende) Wurzeln repräsentirt, welche respective zu dem 7ten, 8ten und 9ten Segment gehören (Fig. 43, $hp' hp'' hp'''$), und die Producte der drei hinteren Myotome des Kopfes innerviren. Sie treten im Stadium K auf, und sind sowohl auf horizontalen als auf verticalen, am besten aber auf etwas schiefen Schnitten zu sehen. Ungeachtet vieler Mühe ist es mir nicht gelungen, die Anwesenheit einer ventralen Wurzel des sechsten Segmentes mit Sicherheit zu constatiren; ich achte es aber wahrscheinlich, dass eine rudimentäre existirt.

Interessant scheint mir, dass an der ventralen Wurzel des letzten Kopfsegmentes zu Ende des Stadiums K ein sympathisches Ganglion gebildet wird (Fig. 45, *gl. sy.*) Dies beweist, dass die Bildung von Ganglien keine Eigenschaft ist, welche ausschliesslich den dorsalen Wurzeln zukommt, und macht, dass das Vorkommen eines Ganglions am Oculomotorius kein Einwand sein kann, denselben nicht als eine ventrale Wurzel aufzufassen. BALFOUR hat den Hypoglossus nicht mit Sicherheit wahrgenommen, und bezweifelt seine morphologischen Beziehungen zum Vagus. Dass er die ventralen Wurzeln desselben repräsentirt, wird, wie ich glaube, durch seine Beziehungen zu den zum Vagus gehörigen Segmenten bewiesen.

Die morphologische Bedeutung der Trigeminuszweige.

Der Ram. I Trig., die Portio Trigemini des Ram. ophth. sup., gehört bekanntlich zu den Rami dorsales, der Ram. maxillaris inferior gehört, wie man weiss, zum Ram. ventralis, und ist ein Ram. posttrematicus; es bleibt uns noch die Bedeutung des Ram. II und der Zweige des Ophthalmicus profundus zu erforschen übrig.

Das beste Ausgangsstadium einer Vergleichung der dorsalen Nervenwurzeln des Kopfes im Allgemeinen, scheint mir das Stadium L oder die letzte Hälfte des K zu sein, weil die Nerven dann gleichsam nur im Schema vorhanden sind. Weder beim Facialis, noch beim Glossopharyngeus, noch beim Vagus findet man um diese Zeit einen Ram. praetrematicus oder einen Ram. pharyngeus; die

Stelle, von welcher sich diese Zweige später entwickeln, ist durch eine Verschmelzung des entsprechenden Nerven mit dem Epithel der hinteren, oberen Wand der vor ihm befindlichen Kiemenspalte angegeben *. Die Abwesenheit, noch im Stadium L, eines Ram. praetrematicus und pharyngeus bei den übrigen Nerven führt zu der Vermuthung, dass solche dann auch beim Trigeminus nicht vorhanden sind; dass also der Ram. II weder als Ram. praetrematicus noch als Ram. pharyngeus gedeutet werden kann. Mit einer solchen Deutung ist auch seine Versorgung eines Schleimorganes, eines Ectodermproductes, im Streit. Mit einem Ram. posttrematicus ist er auch nicht vergleichbar. Wir haben als eine charakteristische Eigenschaft derselben gefunden †, dass sie vor der Visceralhöhle des zu ihren Segmente gehörigen Bogens verlaufen, und deren Wände innerviren. Es bleibt also nichts Anderes übrig, als den Ram. II Trigemini zu den Rami dorsales gehörig zu betrachten, und hiermit stimmt nicht nur die Zeit seines Auftretens, sondern auch seine Endigungsweise. Nach dieser Auffassung besitzt der Trigeminus, ebenso wie der Facialis, einen nach vorn gerichteten, sich gablig theilenden und das Auge zwischen sich fassenden Ramus dorsalis. Der über dem Auge verlaufende Gabelzweig, die Portio Trigemini des Ram. ophth. superficialis wäre dann der Portio Facialis desselben, und der unter dem Auge hinziehende, der Ram. max. sup., wäre dem Ram. buccalis analog.

Dass der Ram. max. sup. mit der eben erwähnten Portio Trigemini als ein enheitliches Rudiment entstehe, habe ich, wegen der anfänglichen Feinheit dieser beiden Nerven, nicht beobachten können, doch scheint mir dies, nach Analogie mit den entsprechenden Zweigen des Facialis wahrscheinlich. Der Ursprung des Ram. max. sup. aus dem Ram. III Trigemini wäre in diesen Falle secundär.

Fragen wir jetzt nach der Bedeutung der Theile der dorsalen Nervenwurzel des ersten Segmentes (des Ophthalmicus profundus), so ist es sofort klar, dass die Portio Ophthalmici profundi des Ram. ophth. superficialis, wegen ihrer Ursprungsstelle, Entstehungszeit, Entwickelungs- und Endigungsweise, ein Ram. dorsalis ist. Es ist möglich, dass auch der Ram. ophthalmicus profundus von dem Gangl. ciliare bis an sein Ende ein Ram. dorsalis vorstelle. Man hätte dann bei der ersten segmentalen dorsalen Nervenwurzel, ebenso wie beim Facialis und Trigeminus, einen sich an der Basis theilenden Ram. dorsalis, und es

---

* Giebt man die wahrscheinliche Betheiligung der Zellen der Schleimorgananlagen an der Bildung der dieselben versorgenden Nerven zu, so scheint auch eine Betheiligung der Wand der Kiemenspalten an der Bildung der Rami praetrematici und pharyngei nicht unwahrscheinlich.

† Vgl. meine vorläufige Mittheilung im „Staatscourant."

scheint mir dies wegen des frühen Auftretens des Ram. ophth. prof, seines Verlaufes über dem Opticus und seiner muthmasslichen Endigung in ein Schleimorgan nicht unwahrscheinlich.

Es kommt mir aber auch vor, dass der Ram. ophth. prof. zum Theil ausserdem noch einen Ram. ventralis, und zwar einen Ram. posttrematicus vorstellen kann. Wie ein solcher verläuft er nämlich vor der Vorderwand einer Höhle *, welche mit einer Visceralbogenhöhle homolog sein kann. Ist die letztere Auffassung richtig, so muss der Nerv die zur Zeit noch unbekannten Producte der Wand dieser Höhle innerviren. Die Längsachse derselben liegt fast longitudinal (parallel der Körperachse), statt transversal. Wegen dieser besonderen Lage wurde der Ram. ventralis dieselbe Richtung haben wie der untere Gabelzweig des Ram. dorsalis und mit demselben scheinbar einen einzigen Nerv bilden †.

Es würde mich zu weit führen, wenn ich hier eine Uebersicht der verschiedenen, sich oft widersprechenden Ansichten der vergleichenden Anatomen über die Natur der Hirnnerven geben wollte. Wie im Anfang dieses Capitels erwähnt, kann ich *im Allgemeinen* die Ansichten GEGENBAUR's bestätigen.

Von diesen weichen SCHWALBE § und WIEDERSHEIM ** beträchtlich ab; ich glaube aber, dass die Verwerfungen — wie WIEDERSHEIM sich ausdrückt — im Kopfe der Selachier und der höheren Wirbelthiere zu gross sind, um mittels der vergleichenden Anatomie dieser Thiere ein auch nur einigermassen sicheres Urtheil über die Natur der Kopfnerven zu gestatten. Die Entwickelungsgeschichte scheint mir den bei Weitem sichreren Weg zu bieten, hauptsächlich wenn man die Segmente des Kopfes mit in Betracht zieht, und nicht zu viel Gewicht auf die Zahl der Bündel, mit welchen ein Nerv aus dem Gehirn tritt, legt.

---

* Nämlich die vordere nach dem Opticus gerichtete Verlängerung des ersten Somites, welche bei Galeus im Stadium K selbständig ist.

† Ist diese Auffassung richtig, so müssen die Muskeln, welche der Ram. ophth. prof. bei einigen Thieren innervirt, zu den aus den Seitenplatten stammenden gehören, und ontogenetisch also im Gegensatz zu den übrigen Augenmuskeln stehen (vgl. den allgemeinen Theil dieser Arbeit). Dass hier nicht die nur *scheinbar* von dem Ram. ophth. prof. (Ram. nasociliaris) innervirten Muskeln gemeint sind, braucht wohl nicht ausdrücklich hervorgehoben zu werden.

§ SCHWALBE, Lehrbuch der Neurologie p. 811. Vgl. aber auch: Das Ganglion Oculomotorii. *Jen. Zeitschr. f. Naturwissenschaft.* Bd. 12. p. 258 ff.

** WIEDERSHEIM, Das Gehirn von Ammocoetes und Petromyzon Planeri. *Morphologische Studien*, p. 23.

Résumé des zweiten Capitels.

Der Opticus ist morphogenetisch der vorderste Hirnnerv, der Olfactorius der zweite.

Die Nervenleiste besteht aus zwei Stücken, welche ich nicht in Zusammenhang mit einander gefunden habe. Das hintere, von BALFOUR entdeckte Stück erstreckt sich von dem Ursprung des Glossopharyngeus caudalwärts; das vordere zieht von dem morphogenetischen Vorderende des Gehirns bis an das Hinterende der Trigeminusanlage, und steht mit der Anlage der Epiphysis in Beziehung.

Der Trigeminus, sowie der Acustico-Facialis repräsentirt zwei dorsale Wurzeln, der Glossopharyngeus eine, der Vagus vier.

Die Rami dorsales * dieser Wurzeln innerviren Schleimorgane, welche wahrscheinlich an der Bildung der sie versorgenden Nerven theilnehmen.

Die dorsale Wurzel des ersten, zweiten und dritten Segments (resp. der Ophth. prof., die Hauptmasse des Trigeminus und der Facialis) besitzt einen nach vorn gerichteten sich gablig theilenden Ram. dorsalis. Der zweite (zum vierten Segmente gehörige) Ram. dorsalis des Facialis ist der Acusticus.

Der Vagus besitzt zwei Rami dorsales, der vordere, der Ram. supratemporalis ist einfach; der hintere, der Ram. lateralis, muss als aus einer Verschmelzung dreier Rami dorsales entstanden betrachtet werden.

Jeder Ram. posttrematicus verläuft längs der Vorderseite der entsprechenden Visceralbogenhöhle, deren Wand er innervirt.

Der Ram. praetrematicus und der Ram. pharyngeus werden als eine Verschmelzung des Ram. ventralis mit der hinteren, oberen Wand der Kiementasche, nach welcher derselbe verläuft, angelegt; sie fehlen dem Trigeminus.

Der Ram. intestinalis ist der vierte und letzte Ram. ventralis des Vagus.

Das Ganglion ciliare ist einem Spinalganglion homolog, und gehört zum Ophthalmicus profundus. Es entsendet zwei Zweige, der eine, bald abortirende, ist die Portio Ophthalmici profundi des Ram. ophth. superficialis, der andere ist der Ram. ophth. prof. in engerem Sinne. Das Ganglion ciliare darf nicht mit dem viel später entstehenden Gangl. Oculomotorii verwechselt werden. Dieses ist wahrscheinlich zum Gebiete des Sympathicus zu stellen.

An der letzten Hypoglossuswurzel ist ein sympathisches Ganglion vorhanden.

Der Oculomotorius, Trochlearis, Abducens und Hypoglossus sind die ventra-

---

* Jeder derselben ist natürlich nicht mit einem *ganzen* Ram. dorsalis eines Spinalnerven homolog sondern nur mit dem aus der dorsalen Wurzel stammenden Theil eines solchen.

len Hirnnervenwurzeln. Der Hypoglossus ist wenigstens aus drei, wahrscheinlich aus vier discreten Wurzeln zusammengesetzt.

III. Allgemeine Resultate.

Viele Untersucher haben sich mit der Frage beschäftigt, ob das BELL'sche Gesetz auch für den Kopf gelte. Seitdem festgestellt war, dass die zum Theil motorischen Trigeminus, Facialis, Glossopharyngeus und Vagus den dorsalen Spinalnervenwurzeln homolog sind, musste jene Frage verneinend beantwortet werden.

Um doch für die Nerven des Kopfes einen gleichen Bildungstypus mit denen des Rumpfes annehmen zu können, erdachte BALFOUR eine Hypothese, die, wie er selbst anerkennt, Vielen nicht befriedigt hat. Nach derselben käme phylogenetisch einem jeden Segmente nicht eine discret enstehende ventrale und dorsale Nervenwurzel zu, sondern beide seien als eine einzige sensu-motorische Wurzel, welche sich am Rumpfe nachträglich getheilt habe, aufgetreten. Am Kopfe bestehe noch das primitive Verhältniss; die ursprüngliche Wurzel habe sich nicht getheilt.

Wie mir scheint, giebt es dreierlei Schwierigkeiten gegen diese Hypothese:

1^0^. sind bei Amphioxus beiderlei Wurzeln vorhanden; *

2^0^. tritt am Rumpfe die dorsale Wurzel von der ventralen getrennt auf;

3^0^. hat BALFOUR die drei vorderen ventralen Hirnnervenwurzeln (Oculomotorius, Trochlearis und Abducens) nicht wahrgenommen, und die ventralen Vaguswurzeln (Hypoglossus) für zu Spinalnerven gehörige gehalten. Er konnte also glauben, dass es keine ventralen Hirnnervenwurzeln gäbe.

Diese Schwierigkeiten scheinen mir BALFOUR's Hypothese hinfällig zu machen.

Werfen wir einen Blick auf die von den Hirnnerven innervirten Muskeln, so fällt es sofort auf, dass die dorsalen Wurzeln nur die aus den Wänden der Visceralbogenhöhlen stammenden Muskeln, nicht diejenigen der Somite innerviren. Der Trigeminus versorgt die Wand der ersten (mandibularen), der Facialis die der zweiten (hyoidalen), der Glossopharyngeus die der dritten, der Vagus die

---

* Als BALFOUR seine Hypothese aufstellte, glaubte er mit Andern, Amphioxus habe nur einerlei Wurzeln. Seitdem hat A. SCHNEIDER (l. c.) aber das von STIEDA (in : *Mémoires de l'Acad. des Sc. de St. Pétersbourg.* VII. Série. Tome XIX. N^0^. 7) gefundene Vorkommen beider Arten von Wurzeln bestätigt. Ich habe mich nicht nur an mit Eisessig behandelten Präparaten, sondern auch an Quer- und Längsschnitten von ihrer Existenz überzeugt, und werde an einem andern Orte darüber handeln.

der vierten, fünften und sechsten Visceralbogenhöhle und ausserdem einen Theil des Pericardiums, welches eine siebente Visceralbogenhöhle potenziell enthält.

Die ventralen Wurzeln dagegen versorgen nur die Producte der Somite, und zwar der Oculomotorius diejenigen des ersten, der Trochlearis die des zweiten, der Abducens die des dritten Myotomes. Das vierte und fünfte Myotom abortiren ehe sie zur Ausbildung von Muskelfasern kommen; auffallenderweise fehlt jedem der entsprechenden Segmente auch die ventrale Nervenwurzel. Beim sechsten Segment ist das Myotom stets sehr rudimentär, und habe ich keine ventrale Wurzel wahrnehmen können. Beim siebenten, achten und neunten dagegen ist je ein Myotom und die dasselbe innervirende ventrale Nervenwurzel gut ausgebildet.

Wie ich im ersten Capitel dieser Arbeit gezeigt habe, gehören die Wände der Visceralbogenhöhlen zu den Seitenplatten; wir kommen für den Kopf der Selachier also zu dem folgenden Gesetze:

Die dorsalen Wurzeln sind nicht nur sensitiv, sondern innerviren auch die aus den Seitenplatten, nicht aber die aus den Somiten stammenden Muskeln.

Die ventralen Wurzeln sind motorisch; innerviren aber nur die Muskeln der Somite, nicht diejenigen der Seitenplatten.

Die Frage, in wiefern den ventralen Wurzeln eine eigene Sensibilität zukommt, fällt ausser dem Kreise dieser Arbeit.

Es ist mehr als wahrscheinlich, wie man an der Hand der vergleichenden Anatomie leicht einsehen wird, dass dieses bei Selachiern gefundene Gesetz für den Kopf aller Wirbelthiere gilt.

Für den Rumpf glaubt man allgemein, dass das BELL'sche Gesetz gelte. Bedenkt man aber, erstens, dass die willkürlichen Rumpfmuskeln, wenigstens phylogenetisch, wahrscheinlich alle Producte der Myotome sind, zweitens, dass die das BELL'sche Gesetz geprüft habenden Physiologen gerade die, aus den Seitenplatten stammenden, vegetativen Muskeln ausser Acht gelassen haben, so scheint es nicht unmöglich, dass, statt des BELL'schen Gesetzes, das oben für den Kopf formulirte auch für den Rumpf gilt.

Februar 1882.

E 6

ANHANG.

Der Uebersichtlichkeit halber gebe ich hier die folgende Tabelle. Ich erinnere, dass zu dem gleichzähligen Segmente das gleichzählige Myotom, nicht aber (wie auch aus der Tabelle sofort ersichtlich) die gleichzählige Visceralbogenhöhle gehört.

Somit resp. Myotom.	Aus dem Myotome stammende Muskeln.	Ventrale Nervenwurzel.	Segment.	Visceralbogenhöhle.	Aus dem Pericardium und den Wänden der Visceralbogenhöhlen stammende Muskeln.	Dorsale Nervenwurzel.
1	Musc. rect. sup., int., inf. und obl. inf.	Oculomotorius	1	Vordere, bei Galeus selbständige Verlängerung des 1sten Somites?	?	Ophthalmicus profundus
2	Musc. obl. sup.	Trochlearis	2	Erste (mandibulare- oder Kieferhöhle)	Kiemen- und Kiefermuskulatur mit Ausnahme des sterno-hyoideus.	Trigeminus (nach Abzug des Ophth. prof.)
3	Musc. rect. ext.	Abducens	3	Zweite (hyoidale Höhle)		Acustico-Facialis
4	Keine	Keine	4			
5	Keine	Keine	5	Dritte (Höhle des ersten Kiemenbogens)		Glossopharyngeus
6	Sehr rudimentär	Nicht wahrgenommen	6	Vierte		Vagus
7	Vom Schädel zum Schultergürtel ziehende Muskeln, nebst dem vordersten Theile des des sterno-hyoideus	Hypoglossus	7	Fünfte		
8			8	Sechste		
9			9	Nicht von der Pericardialhöhle differenzirt		

BUCHSTABENERKLÄRUNG.

1, 2, 3, 4 etc. 1stes 2tes 3tes 4tes etc. Somit oder Myotom.

a_1 a_2 etc. erster (mandibularer) zweiter (hyoidaler) etc. Aortenbogen.

ac. Acusticus.

af. Acustico-Facialis.

as. Stiel der Augenblase (Opticusanlage).

au. Auge.

ch. Chorda.

comm. Dorsale Commissur der dorsalen Nervenwurzeln (aus der Nervenleiste stammend).

d. Darm.

da. Dorsale Ausstülpung des 2ten Myotomes.

df. Darmfaserblatt.

ds. Dotterstiel.

ec. Epidermis.

ep'. Anlage der Epiphysis.

fa, fa', fa'', fa'''. Facialis, Portio Facialis (des Ram. ophth. superficialis), Ram. buccalis, Ram. hyoideus.

gl. Glossopharyngeus.

gl c. Ganglion ciliare.

gl o. Ganglion Oculomotorii.

gl sy. Sympathisches Ganglion.

g th. Glandula thyreoidea.

h_1, h_2, h_3 etc. erste (mandibulare), zweite (hyoidale), dritte etc. Visceralbogenhöhle oder deren Wände.

ha. Hintere ventrale Ausstülpung des 1sten Myotomes.

hf. »Hautfaserblatt".

hn_1, hn_2 etc. Dorsale Wurzel des ersten, zweiten etc. Halsnerven.

hn_1', hn_2' etc. die resp. ventralen Wurzeln.

hp' hp'' hp''' erste, zweite und dritte Wurzel des Hypoglossus.

ht. Herz.

hy. Hyoidknorpel.

k_1, k_2 etc. erste, zweite etc. Kiementasche.

ka. Kiemenarterie (Truncus arteriosus).

l. Laterale Grenze des Bindegewebes in Fig. 38.

*

lh. Leibeshöhle.
le + sv. Kapsel der Leber und des hinteren Theiles des Sinus venosus.
m chy. Musc. coraco-hyoideus (sterno-hyoideus).
m cbr + cm. Musc. coraco-branchialis + coraco-mandibularis.
mh. Mittelhirn.
mn. Mandibularknorpel.
moi. Musc. obl. inf.
mos. Musc. obl. sup.
mre. Musc. rect. ext.
mri. Musc. rect. inf.
na. Nasengrube (oder-Verdickung).
nl. Nervenleiste.
ob. Ohrblase (oder-Verdickung).
oc. Oculomotorius.
op. Ophthalmicus profundus.
p. Communication des Pericardialraums mit der Leibeshöhle zur Seite des Darmes.
pc Pericardialhöhle.
pc'. Deren vordere Verlängerung.
p op. Portio Ophthalmici profundi des Ram. opthalmicus superficialis.
rl. vg. Ram. lateralis Vagi.
rop. Ram. ophthalmicus profundus.
s Schultergürtel.
sl. Seitenlinie.
tr, tr', tr'', tr'''. Trigeminus; Ram. I (Portio Trigemini des Ram. ophth. sup.), Ram. II, Ram. III Trigemini.
va. Vordere ventrale Ausstülpung des 1sten Myotomes.
vg. Vagus.
vg_1, vg_2, vg_3. Ram. branchialis I, II, III Vagi
vg_4. Ram. intestinalis Vagi.
vg. comm. Dorsale Commissur des Vagus mit den dorsalen Wurzeln der Rückenmarksnerven.
vj. Vena jugularis oder Zweige derselben.
vv. Vordere Verlängerung des ersten Somites, wahrscheinlich eine praeorale Visceralbogenhöhle.
x. Gewebsmassen welche nicht mit der Anlage der oberen Bogen verwechselt werden müssen (vgl. Balfour, l. c. p. 151).
zm. Vordere Verschmelzungsmasse des Darmes mit der Chorda und dem Mesoderm.
* Grenze zwischen der Höhle des zweiten Somites (resp. Myotomes) und der Kieferhöhle.

FIGURENERKLÄRUNG.

Alle Figuren sind mittels einer OBERHÄUSER'schen Camera gezeichnet. Als Objectiv wurde Hartnack 4 nach Abschraubung der unteren Linse gebraucht. Wo das ganze Objectiv genommen wurde, ist dies durch (Hartn. 4) angedeutet. Die Kerne sind unter Zuhülfenahme eines stärkeren Objectivs hinein gezeichnet. Die Vergrösserung der Figuren beträgt resp. 46 und 82.

Die in Fig. 1, 2 und 3 abgebildeten Schnitte sind demselben Embryo von Scyllium catulus entnommen.

Fig. 1. Verticaler Längsschnitt durch einen Embryo aus einem Stadium kurz nach dem Anfang des I.

Er zeigt die Somite des Kopfes, und den Zusammenhang (*ep'*) des Gehirns mit der Epidermis an der Stelle, wo später die Epiphysis auftritt Die mediale Wand des 2ten bis 5ten und die laterale des 9ten und 10ten Somites ist getroffen. Die mediale Grenze der Ohrblase fällt noch gerade auf dem Schnitt.

Fig. 2. Lateral unmittelbar auf dem in Fig. 1 abgebildeten folgender Schnitt.

Er zeigt die Höhlen des 2ten bis 5ten Somites, welche auf dem vorhergehenden nicht sichtbar waren. Die laterale Wand der Ausstülpung der zweiten Kiementasche, sowie die mediale Wand der Ohrblase sind getroffen.

Fig. 3. Der Schnitt ist der andern Seite des Embryo's entnommen, und trifft die laterale Wand (*d'*) eines Theiles des Vorderdarms, sowie diejenige der ersten und der kaum angelegten dritten Kiementaschenausstülpung.

Er zeigt den Zusammenhang des fünften Somites, dessen laterale Wand getroffen ist, mit dem dritten Visceralbogen.

Fig. 4. (Hartn. 4) Querschnitt durch einen Embryo von Scyllium canicula aus dem Ende des Stadiums H, unmittelbar hinter der Anlage des zweiten Visceralbogens. Der

Schnitt ist schief, sodass die linke Hälfte etwas mehr nach vorn als die rechte liegt, und die hintere Grenze der Ohrverdickung (*ob*) trifft.

Er zeigt, dass die Somitenplatte sich auch im Kopfe nur wenig unter der oberen Grenze des Darmes erstreckt. Links ist der obere Theil der Seitenplatten noch durch die, vor der Region aus welcher der Schnitt genommen ist befindliche zweite Kiementasche verdrängt; rechts sicht man, dass sich in der Region des dritten Visceralbogens die beiden Blätter der Seitenplatten an einander gelegt haben. Bei † ist der Darm zufolge der Präparation gerissen.

Fig. 5 und 6. (Hartn. 4) Querschnitte aus derselben Serie wie Fig. 4.

Fig. 5 zeigt den Zusammenhang des Vorderendes der Chorda (*ch*) mit der vorderen Darmwand; der nächstvordere Schnitt ist dem abgebildeten ähnlich; der zweitvordere aber (Fig. 6) zeigt, dass vor der Chorda das erste Somit (1) auch mit der vorderen Darmwand verschmolzen ist.

Fig. 7. Verticaler Längsschnitt durch den Kopf eines Embryo's von Scyllium catulus aus dem Anfang des Stadiums H. Der Schnitt ist zwar vertical, macht aber mit der Längsachse einen kleinen Winkel, sodass er nicht median ist und die beiden Kiementaschen trifft.

Er zeigt, dass das Ectoderm noch nicht mit der vorderen Verschmelzungsmasse (*z m*) von Chorda, Darm und Mesoderm verschmolzen ist.

Fig. 8. Verticaler Längsschnitt durch einen Embryo von Scyllium canicula aus dem Ende des Stadiums J.

Er zeigt das Rudiment des fünften Myotomes; weiter ist ersichtlich, dass der Trigeminus mit seiner hinteren Hauptmasse noch nicht (wie später der Fall ist) ganz hinter dem zweiten Myotome liegt, und dass die drei hinteren der vier Vagusausläufer bis vor dem siebenten Myotome nach vorn gedrängt sind.

Fig. 9. Verticaler Längsschnitt durch den Vorderkopf eines Embryo's von Pristiurus aus der Mitte des Stadiums J.

Er zeigt den Zusammenhang des vierten Myotomes mit den Wänden der Hyoidhöhle (h_2).

Fig. 10. Schnitt aus derselben Serie wie Fig. 9 aber zu der andern Seite des Embryo's gehörig.

Er zeigt den im Vagusgebiete verbreiterten Theil der Nervenleiste und die zwei hinteren, über dem 8ten und 9ten Myotome befindlichen Vagusausläufer. Der hintere Theil des nächstvorderen, über dem 7ten Myotome befindlichen Vagusausläufers ist noch getroffen.

Fig. 11. Verticaler Längsschnitt durch einen Embryo von Pristiurus aus dem Ende des Stadiums J. Er trifft die mediale Wand der Ohrblase (*o b*) und des dritten Myotomes, und liegt mit seinem hinteren Theile nahe unter der Haut.

Er zeigt die Anlage des Ram. I Vagi welcher von Anfang an ganz hinter dem 5ten Myotome liegt, und die Aussenwand des 6ten kreuzt.

Fig. 12. Schnitt aus derselben Serie wie Fig. 11, aber zu der andern Seite des Embryo's gehörig.

Er zeigt die ventrale Communication der Höhlen in den Visceralbogen mit dem Pericardialraum.

Fig. 13. Verticaler Längsschnitt durch den Vorderkopf eines Embryo's von Galeus canis aus dem Anfang des Stadiums K (Osmiumsäure Präp.).

Er zeigt die selbständige vordere Verlängerung (*v v*) des ersten Myotomes.

Fig. 14—16. Drei auffolgende verticale Längsschnitte durch einen Embryo von Pristiurus aus dem Ende des Stadiums K. Fig. 14 ist der meist laterale Schnitt.

Sie zeigen die weit fortgeschrittene Abschnürung des zweiten Somites von der mandibularen Hohle (h_1), welche so gut als obliterirt ist. Weiter den Verlauf des Ophthalmicus profundus längs der Aussenwand des ersten Somites und die Lagerungsbeziehung des Ram. ophth. prof. (*r o p*) zu der Portio Ophthalmici prof. (*p o p*). Fig. 14 zeigt noch die Commissur (*n l*) zwischen Vagus und Glossopharyngeus und die beiden Wurzelbündel des letzteren. 16

Fig. 17 ist der der Fig. 16 zweitfolgende Schnitt.

Er zeigt den Ursprung des Oculomotorius aus dem Mittelhirn, die Wurzelfasern des Vagus und das letzte, nicht scharf begrenzte Ueberbleibsel des fünften Myotomes.

Fig. 18 und 19. Zwei auffolgende verticale Längsschnitte durch einen Embryo von Scyllium canicula aus dem Stadium L; Fig. 18 ist der mediale Schnitt.

Beide zeigen den Verlauf der Rami posttrematici vor den entsprechenden Höhlen der Visceralbogen; die beiden ventralen Ausstülpungen (*v a* und *h a*) des ersten und die dorsale (*d a*) des zweiten Myotomes.

Fig. 20—22. Verticale Längsschnitte durch einen Embryo von Scyllium catulus aus dem Anfang des Stadiums O (nur die vorderen Kiemenspalten waren mit langen Kiemenfäden versehen).

Fig. 20 zeigt die Anlage des Musc. obl. sup. (*m o s*), die äusserste, vorderste Spitze des dritten und den Rest der Höhle des zweiten Myotomes. Der lateralwärts unmittelbar folgende Schnitt, auf welchem das dritte Myotom nicht mehr sichtbar ist, ist nicht abgebildet, weil er der Fig. 20 fast vollkommen gleicht.

Fig. 21. Lateralwärts der Fig. 20 zweitfolgende Schnitt.

Er zeigt den Zusammenhang der Anlage des Musc. obl. sup. mit dem zweiten Myotome.

Fig. 22. Aus dem der Fig. 21 nächstfolgenden Schnitt zeigt, dass sich der Rest der Höhle des zweiten Somites bis in die Anlage des Musc. obl. sup. ausstreckt.

Fig. 23. Aus derselben Serie wie Fig. 14—17 (fünf Schnitte medialwärts von dem in Fig. 17 abgebildeten).

Er zeigt den ersten Halsnerv, dessen dorsale Wurzel ($h\,n_1$) beträchtlich dünner ist als die der folgenden; weiter die ventrale Verlängerung und die mit dem Unterende nach vorn gerichtete Umbiegung der Myotome aus der Region des Halses und Hinterkopfes.

Fig. 24. Verticaler Längsschnitt (nahe der Medianebene) durch die ventrale Wand des Kiemen- und Kieferapparates, aus derselben Serie wie Fig. 14—17.

Er zeigt die vordere Verlängerung (*p c'*) der Pericardialhöhle (*p c*), welche sich bis in den ventralen Theil der Mandibel ausstreckt, und die Lagerungsbeziehung dieser Verlängerung zur Glandula thyreoidea (*g th*) und Kiemenarterie (*k a*).

Fig. 25. Verticaler Längsschnitt durch die ventrale Wand des Kiemen- und Kieferapparates eines Embryo's von Scyllium canicula aus dem Stadium P.

Er zeigt die Anlage des aus der Wand der vorderen Verlängerung des Pericardialraums und der Unterenden der Visceralbogenhöhlen stammenden Musc. coraco-branchialis + coraco-mandibularis (*m cbr + cm*), sowie diejenige des aus hinteren Kopf- und vorderen Rumpfsomiten stammenden Musc. coraco-hyoideus (*m chy*).

Fig. 26. Aus derselben Serie wie Fig, 20—22. Mehr medialwärts, aber an derselben Seite des Embryo's wie Fig. 20—22.

Der Schnitt zeigt die Anlage des Musc. rectus externus (*m r e*) aus der oberen Wand des dritten Myotomes, dessen Höhle dem Schwinden nahe ist; weiter die Anlage des Musc. obliquus int. aus der hinteren der beiden ventralen Ausstülpungen des ersten Myotomes.

Fig. 27. (Hartn. 4) Querschnitt durch den Vorderkopf eines Torpedo-embryo's aus dem Anfang des Stadiums G; bei † ist das Nervenrohr zufolge der Präparation gerissen. Der Schnitt geht durch die Augenblasen.

Er zeigt die Nervenleiste (*n l*) am Vorderkopfe; weiter die vordere Oeffnung des Medullarrohres bei § und den verdickten Rand derselben.

Fig. 28. (Hartn. 4) Querschnitt durch einen Embryo von Pristiurus aus der Mitte des Stadiums G; rechts ist die vordere Wand der rechten Augenblase getroffen; bei † sind das Nervenrohr und die Epidermis zufolge der Präparation gerissen.

Er zeigt, dass der verdickte Rand, mittels welcher die Augenblase etwas früher mit der Epidermis zusammenhängt, zu der letzteren gehört.

Fig. 29. (Hartn. 4) Querschnitt durch das vordere Kopfende eines Embryo's von Scyllium catulus aus dem Stadium I. Der Schnitt trifft die Vorderwand der rechten Augenblase, und ist einer Serie von horizontalen Längsschnitten durch den Körper entnommen, welche den Vorderkopf, wegen der Kopfbeuge, im Querschnitt treffen.

Er zeigt den Zusammenhang des Nervenrohres mit der Epidermis an der Stelle, wo die Epiphysis (*ep'*) angelegt wird.

Fig. 30. (Hartn. 4) Querschnitt durch den Kopf eines Embryo's von Scyllium canicula aus dem Stadium H durch die Gegend der Augenblasen, wo noch kein Mesoderm vorhanden ist; bei † sind das Nervenrohr und die Epidermis zufolge der Präparation gerissen.
Er zeigt dass die mit der Trigeminusanlage zusammenhängende Nervenleiste (*n l*) sich bis über die Augenblasen ausstreckt.

Fig. 31. Verticaler Längsschnitt aus derselben Serie wie Fig. 1—3.
Er zeigt die breite, sich von vorn nach hinten einschnürende Anlage des Trigeminus (*tr*), und die des Ganglions ciliare (*gl c*).

Fig. 32—34. Drei auffolgende Querschnitte durch den Kopf eines Embryo's von Pristiurus aus der ersten Hälfte des Stadiums K. Fig. 32 ist der vorderste. Die Schnitte sind einer Serie von horizontalen Längsschnitten durch den Körper entnommen, welche den Vorderkopf, wegen der Kopfbeuge, im Querschnitt treffen. Sie zeigen, dass das Ganglion ciliare (*gl c*) nicht in der Bahn des Oculomotorius (*oc*) liegt. Weiter dass dieses Ganglion einen kurzen Nerv (*p o p*) zur Epidermis entsendet. Der Zusammenhang des Oculomotorius mit dem Gehirn ist nicht zu sehen, weil der Nerv mit äusserst feinen, parallel der Längsachse des Thieres angeordneten Fasern entspringt.
Die drei folgenden, der Raumersparniss wegen nicht abgebildeten Schnitte zeigen dieselben Verhältnisse an der andern Seite des Embryo's.

Fig. 35. Aus einem Längsschnitt durch einen Embryo von Scyllium canicula aus dem Stadium O. Der Schnitt macht einen ziemlich grossen Winkel mit der Dorso-ventralachse.
Er zeigt das am Oculomotorius aufgetretene Ganglion Oculomotorii (*gl o*).

Fig. 36. Aus derselben Serie wie Fig. 35 (acht Schnitte medialwärts).
Der Schnitt zeigt das Ganglion ciliare (*gl c*). Mittels des fast horizontal verlaufenden Musc. rect. externus (*m re*) kann man sich durch Vergleichung mit der Fig. 35 einigermassen die Entfernung dieses Ganglions von dem des Oculomotorius vorstellen.

Fig. 37. Aus derselben Serie wie Fig. 18 und 19. Das Auge (*au*) ist bei der Einbettung des Schnittes aus seiner natürlichen Lage zu viel nach unten getrieben.
Der Schnitt zeigt die Endigung der Portio Facialis *fa'* und des Ram. buccalis *fa''* in der Haut

Fig. 38. (Hartn. 4) Aus derselben Serie wie Fig. 32—34.
Der Schnitt zeigt die Verschmelzung der Portio Facialis mit der vom Bindegewebe abgehobenen Epidermis (*ec*), und das wahrscheinliche Hineintreten einiger ihrer Kerne in den Nerv; *l* ist die laterale Grenze des Bindegewebes. Der Schnitt trifft die untere Wand des zweiten Somites.

Fig. 39. Horizontaler Längsschnitt aus derselben Serie wie Fig. 32—34 und 38. Er liegt acht Schnitte dorsalwärts von dem in Fig. 38 abgebildeten; seine rechte Seite hat den Embryo etwas höher getroffen als die linke.

Er zeigt die Verschmelzung der Rami dors. des Facialis, Glossopharyngeus und Vagus mit den isolirt angelegten Schleimorganen. Weiter die Einsenkung des Hinterendes der Seitenlinie.

Fig. 40 und 41. Zwei auffolgende Längsschnitte, welche einen Winkel mit der Dorsoventralachse bilden, durch einen Embryo von Scyllium catulus aus dem Anfang des Stadiums I. Fig. 40 ist der erste Schnitt der Serie und trifft die Epidermis, unter welcher die Ränder der Obrblase (*ob*) und die Anlage des Vagus (*vg*), dessen hinterer Theil noch nicht aufgetreten ist, sichtbar wird.

Fig. 41, gewissermassen das Complement der vorhergehenden Figur, trifft den Boden der Ohrblase (*ob*), die Anlage des Trigeminus (*tr*), Acustico-Facialis (*af*) und Glossopharyngeus (*gl*).

Fig. 42, aus derselben Serie wie Fig 14—16, zeigt die Endigung des Ram. intestinalis Vagi (vg_4) in der Wand des Pericardialraums vor der Stelle, wo derselbe zur Seite des Darmes mit der Leibeshöhle communicirt. Diese Communication fällt nicht auf dem abgebildeten Schnitt (er tritt zwei Schnitte medialwärts auf). Seine Grenzen sind durch die punctirten Linien *p* angegeben. Auf dem Schnitt ist ersichtlich, dass die Pericardialhöhle ventral und seitlich von der die Leber umschliessenden Kapsel (*le* + *sv*) noch mittels der Höhle im Dotterstiel mit der Leibeshöhle (*lh*) communicirt.

Fig. 43. Aus derselben Serie wie Fig. 35 und 36.

Der Schnitt zeigt die dorsale Verlängerung des 7ten bis 9ten Kopfmyotomes, sowie diejenigen der vorderen Rumpfmyotome. Weiter die quer durchschnittenen drei ventralen Wurzeln des Hypoglossus (hp' hp'' hp'''), sowie diejenigen der drei vorderen Halsnerven (hn_1' hn_2' hn_3').

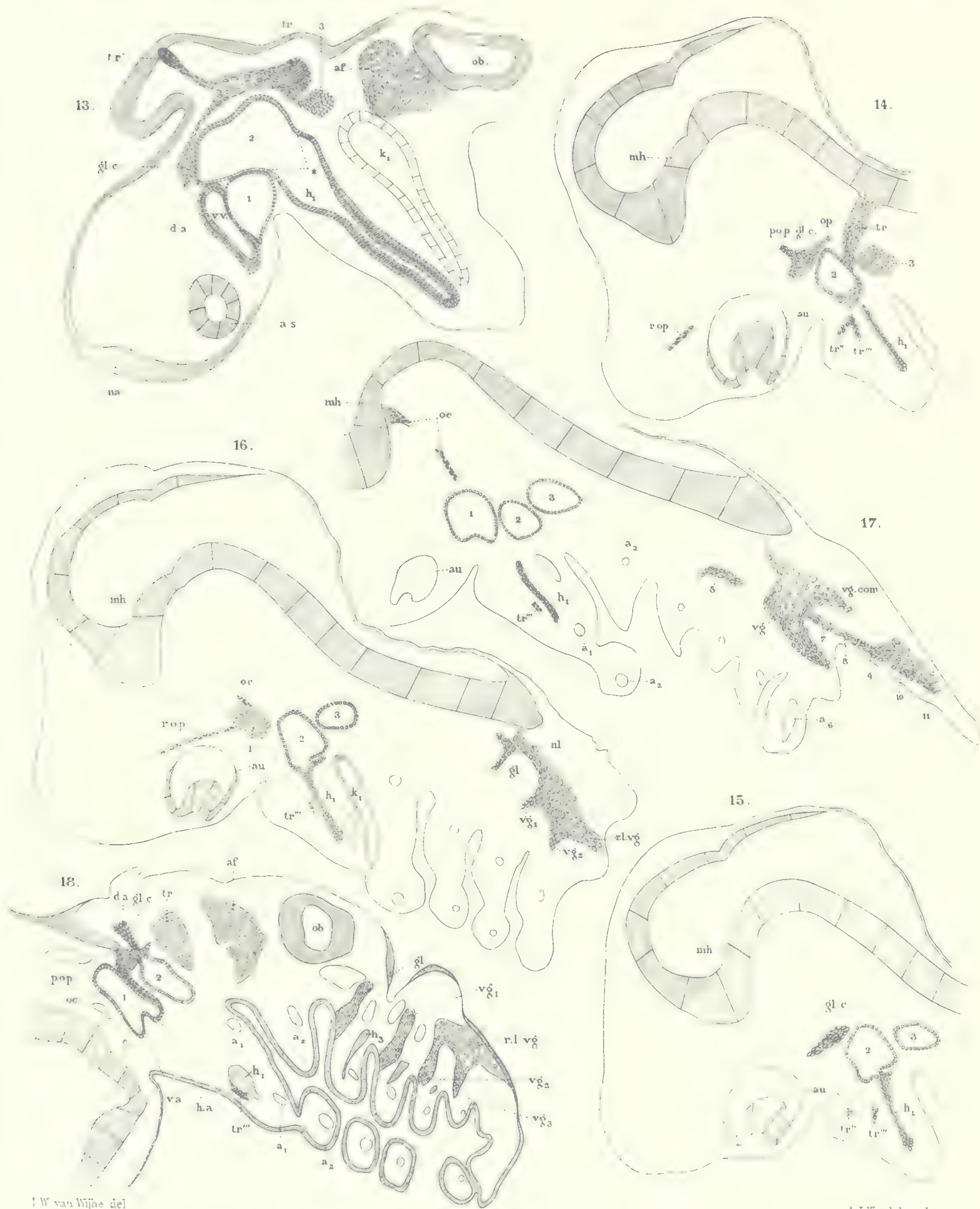
Fig. 44, aus derselben Serie wie Fig. 43, zeigt die drei hinteren Kopfmyotome.

Fig. 45, aus derselben Serie wie Fig. 14—17 und Fig. 24, zeigt die Bildung eines sympathischen Ganglions (*gl sy*) an dem hinteren der drei Hypoglossuswurzeln.



J. W. van Wijhe del.

A J. Wendel sculps.

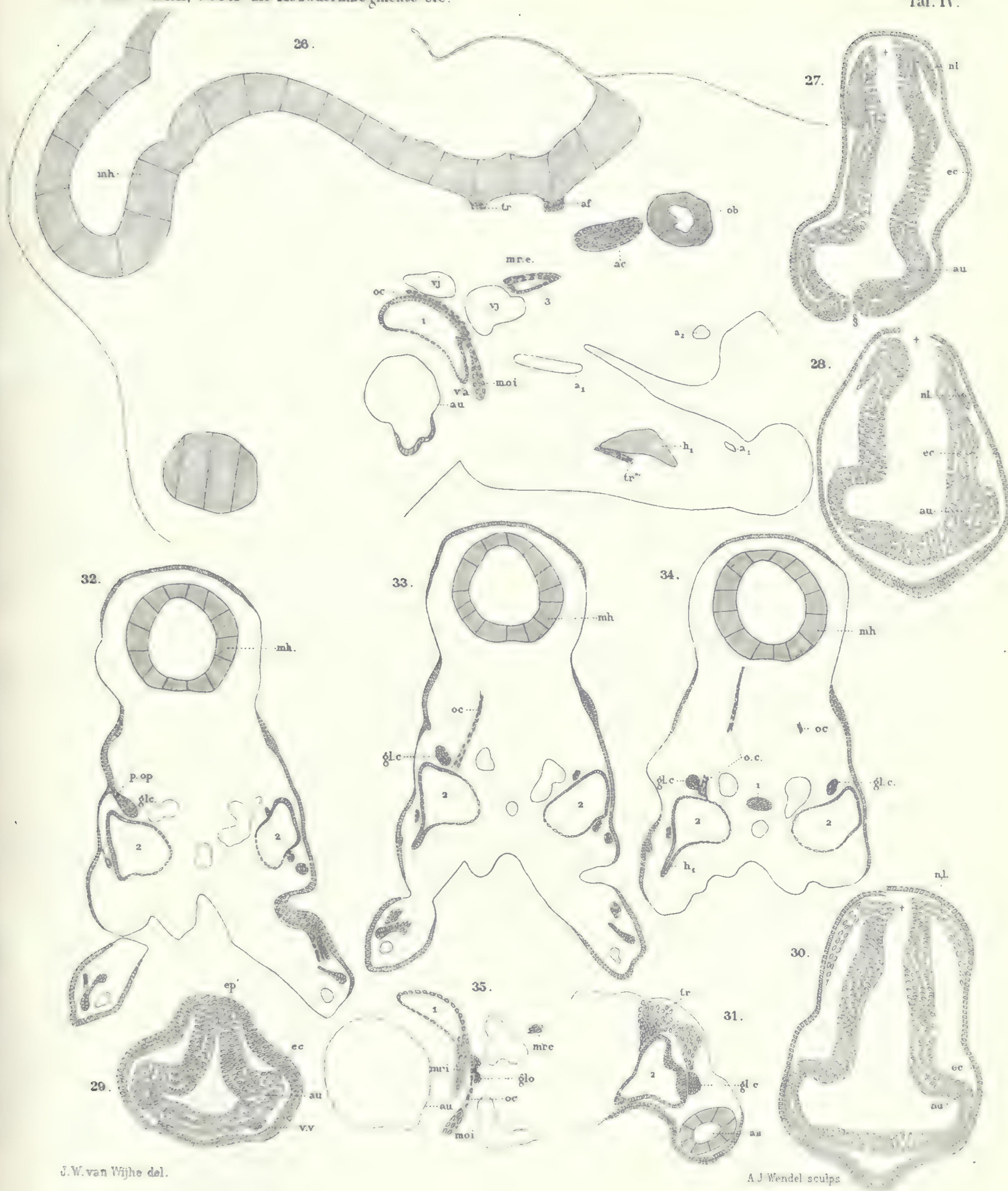


J W van Wijhe del

A J. Wendel sculps

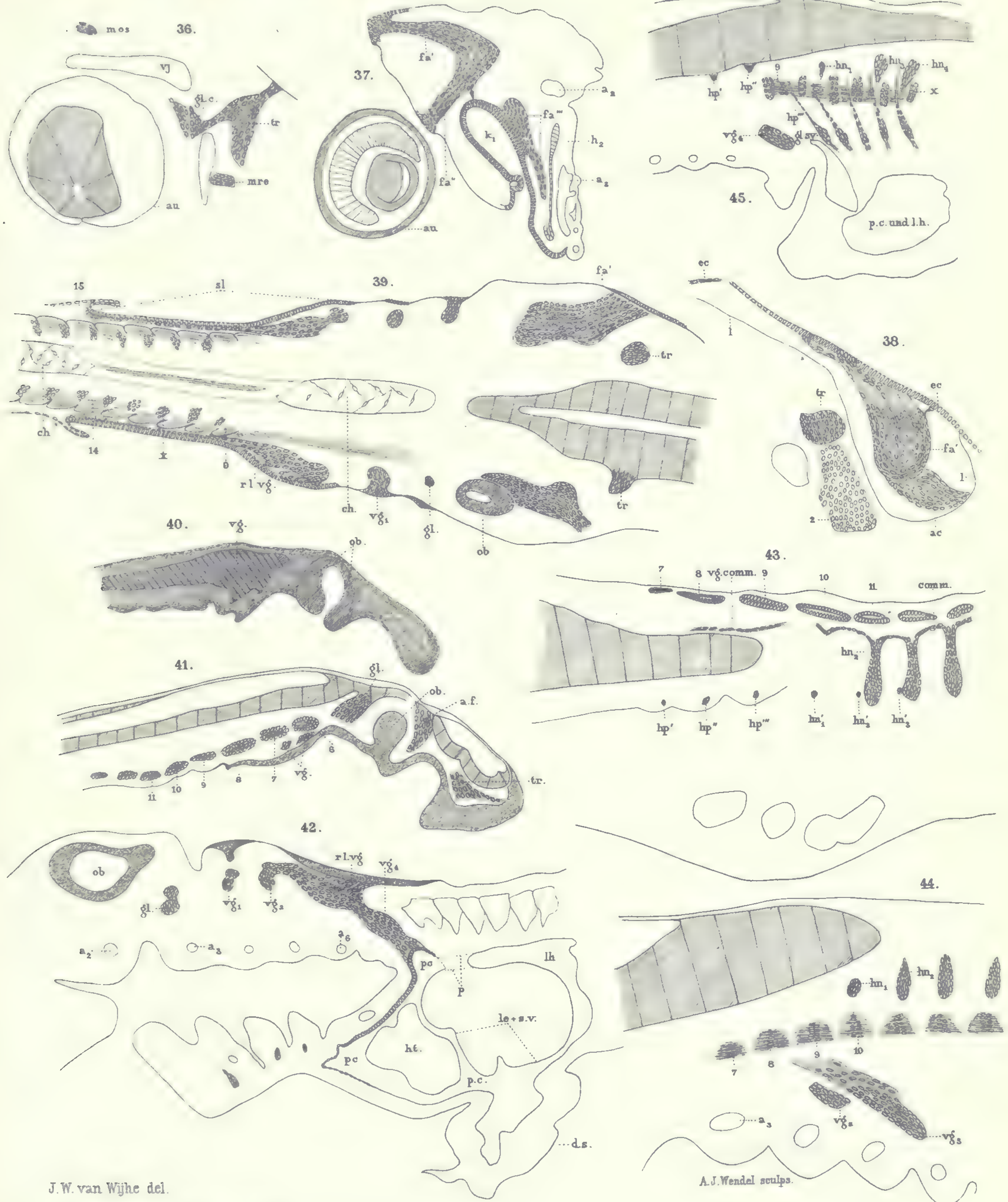


J. W. van Wijhe del. A. J. Wendel sculps.



J. W. van Wijhe del.

A. J. Wendel sculps.



J. W. van Wijhe del. A. J. Wendel sculps.